

A vibrant, glowing orange and yellow nebula or star formation region, possibly the Helix or Ring nebula, is centered in the image. The bright, irregularly shaped cloud of gas and dust is set against a deep black background, with a bright white-yellow core at its center. The text "Astronomija i astrofizika I" is overlaid in the middle of the image.

Astronomija i astrofizika I

ATMOSFERE ZVIJEZDA

OPIS POLJA ZRAČENJA

- **Atmosfera zvijezde** $\Rightarrow$ vanjski prozirni sloj zvijezde iznad guste neprozirne unutrašnjosti iz koje potječe svjetlost koju opažamo
- Oblik spektra ovisi o temperaturi, gustoći i sastavu zvjezdane atmosfere u kojoj nastaje opažena svjetlost
- Energija opaženih fotona $\rightarrow$ posljedica termonuklearnih procesa, gravitacijske kontrakcije i hlađenja u unutrašnjosti $\Rightarrow$ na osnovu opaženog sjaja i spektra dolazimo do procesa u unutrašnjosti zvijezde

Problem: **međudjelovanje svjetlosti sa plinom u atmosferi zvijezde**

Specifični i srednji intenzitet zračenja

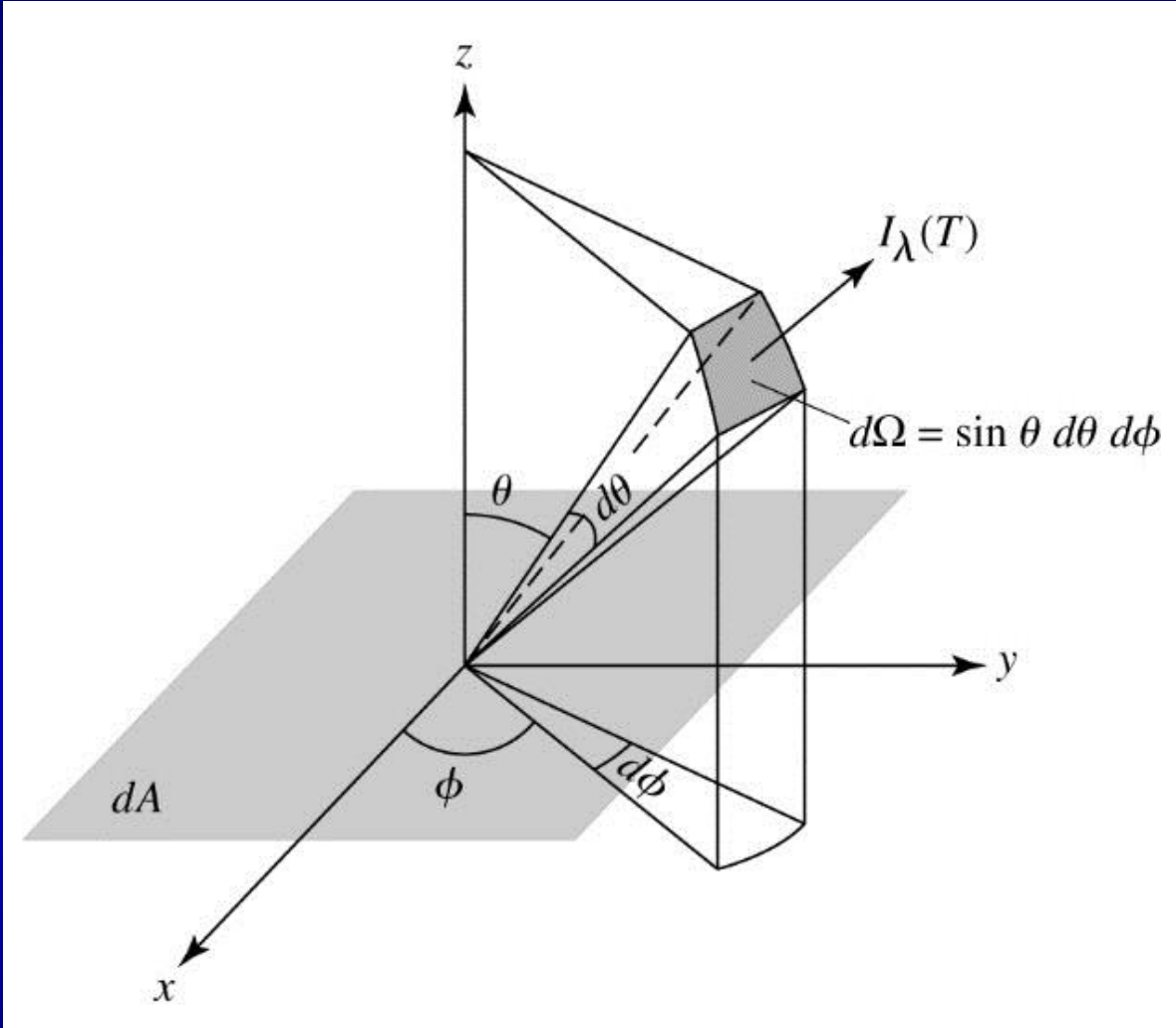
Zraka svjetlosti valne duljine između λ i $\lambda + d\lambda$ koja prolazi kroz plohu površine dA pod kutem θ u stožac određen prostornim kutem $d\Omega$, ima **SPECIFIČNI INTENZITET zračenja** određen kao:

$$I_{\lambda} = \frac{\partial I}{\partial \lambda} = \frac{E_{\lambda} d\lambda}{d\lambda dt dA \cos \theta d\Omega}$$

- Kut θ je kut između smjera zrake i okomice na površinu dA
 $\Rightarrow dA \cos \theta$ je površina dA projicirana na ravninu okomitu na smjer širenja zrake

E_{λ} je količina energije koju posjeduje zraka emitirana u stožac u vremenu dt :

$$E_{\lambda} = \frac{\partial E}{\partial \lambda}$$



Specifični intenzitet se najčešće naziva **INTENZITETOM ZRAČENJA**

Jedinice intenziteta zračenja: $\text{Wm}^{-3}\text{sr}^{-1}$

Planckova funkcija (B_λ) je intenzitet za poseban slučaj zračenja crnog tijela

- Energija zračenja, pa tako i intenzitet, ne moraju ovisiti o valnoj duljini na isti način kao i zračenje crnog tijela

U sfernom koordinatnom sustavu, energija elektromagnetskog zračenja valne duljine između λ i $\lambda+d\lambda$ koja prolazi u vremenu dt kroz površinu dA u prostorni kut $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ jednaka je:

$$E_\lambda d\lambda = I_\lambda d\lambda dt dA \cos \theta d\Omega = I_\lambda d\lambda dt dA \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi$$

- Energije zrake intenziteta I_λ koja se širi kroz vakuum ne divergira (ne raspršuje se) jer je intenzitet definiran u granici $d\Omega \rightarrow 0 \Rightarrow$ **intenzitet zračenja je konstantan po bilo kojoj putanji zrake kroz vakuum**
- Intenzitet zračenja ovisi o smjeru zrake $\Rightarrow$ **SREDNJI INTENZITET** zračenja predstavlja intenzitet zračenja usrednjen po smjerovima

- Srednji intenzitet zračenja dobiva se integriranjem specifičnog intenziteta po svim smjerovima i dijeljenjem sa 4π (prostorni kute sfere):

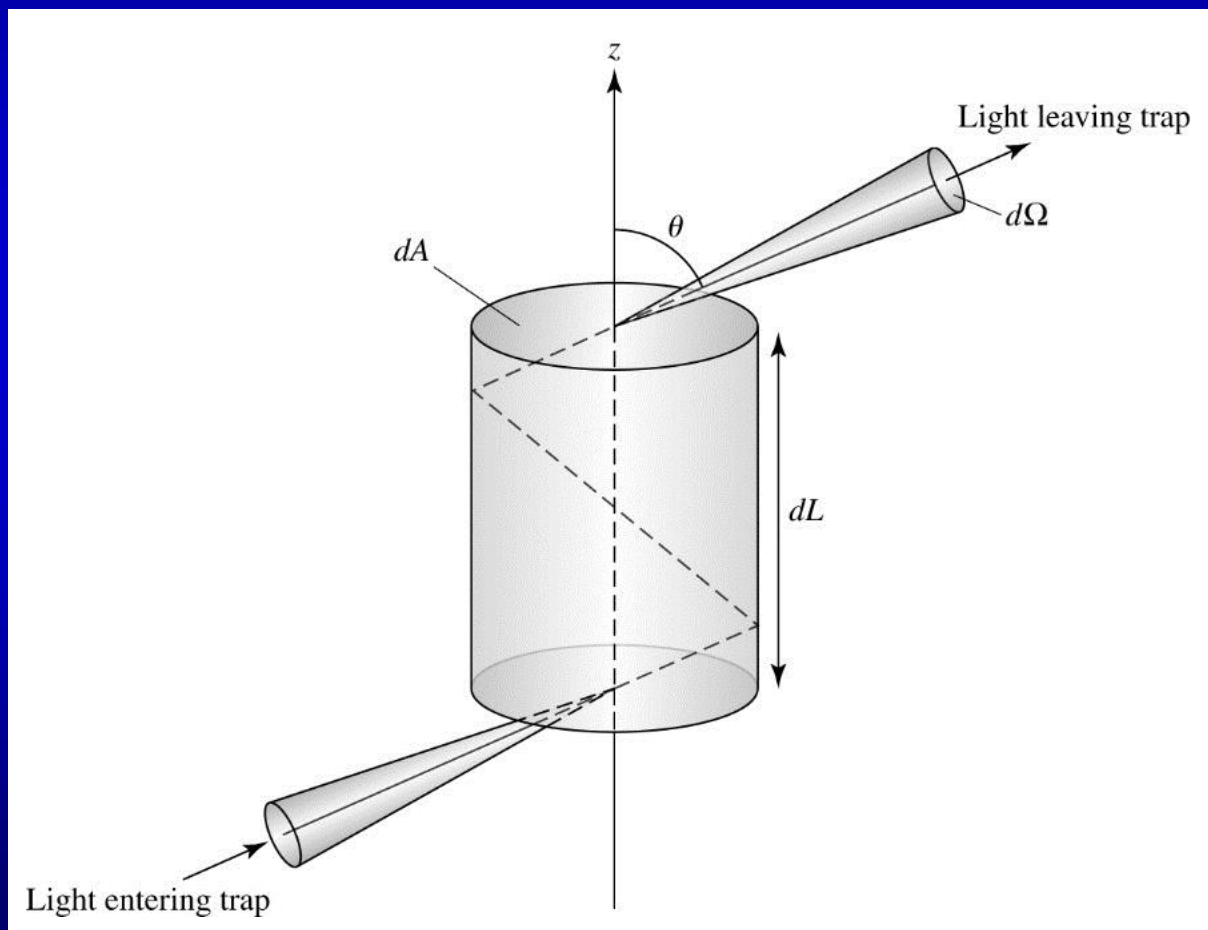
$$\langle I_\lambda \rangle \equiv \frac{1}{4\pi} \int I_\lambda d\Omega = \frac{1}{4\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} I_\lambda \sin \theta d\theta d\phi$$

IZOTROPNO polje zračenja (intenzitet je jednak u svim smjerovima): $\langle I_\lambda \rangle = I_\lambda$

Zračenje crnog tijela je izotropno: $\langle I_\lambda \rangle = B_\lambda$

Specifična gustoća energije

- Kako odrediti ukupnu energiju sadržanu u polju zračenja?



Pogledajmo
količinu energije
sadržane u malom
cilindru dužine dL
otvorenom na oba
kraja, sa savršeno
reflektirajućim
stjenkama

Carroll, B.W., Ostlie, D.A.,
2006, 'Introduction to
Modern Astrophysics',
Pearson

- Svjetlost koja ulazi u cilindar reflektira se i izlazi na drugi kraj $\Rightarrow$ energija u cilindru jednaka je energiji u toj točki prostora kada cilindra ne bi bilo
- Vrijeme potrebno zračenju koje ulazi pod kutem θ da prijeđe kroz cilindar iznosi: $dt = \frac{dL}{c \cos \theta}$

Energija valne duljine između λ i $\lambda+d\lambda$ unutar cilindra uslijed zračenja koje ulazi pod kutem θ iznosi:

$$E_{\lambda} d\lambda = I_{\lambda} d\lambda dt dA \cos \theta d\Omega = I_{\lambda} d\lambda dA d\Omega \frac{dL}{c}$$

$dA dL$ je volumen cilindra

SPECIFIČNA GUSTOĆA ENERGIJE: energija zračenja po jediničnom volumenu valne duljine između λ i $\lambda+d\lambda$ dobiva se integriranjem gornje relacije po svim prostornim kutovima:

$$\begin{aligned}u_{\lambda}d\lambda &= \frac{1}{c} \int I_{\lambda}d\lambda d\Omega \\&= \frac{1}{c} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} I_{\lambda}d\lambda \sin \theta d\theta d\phi \\&= \frac{4\pi}{c} \langle I_{\lambda} \rangle d\lambda\end{aligned}$$

Izotropno polje zračenja: $u_{\lambda}d\lambda = (4\pi/c)I_{\lambda}d\lambda$

Zračenje crnog tijela:

$$u_{\lambda}d\lambda = \frac{4\pi}{c} B_{\lambda}d\lambda = \frac{8\pi hc/\lambda^5}{e^{hc/\lambda kT} - 1} d\lambda$$

$$u_\nu d\nu = \frac{4\pi}{c} B_\nu d\nu = \frac{8\pi h\nu^3 / c^3}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu$$

Uz $u_\lambda d\lambda = u_\nu d\nu$ i $\nu = hc/\lambda$

- $u_\nu d\nu$ je gustoća energije zračenja s frekvencijom između ν i $\nu+d\nu$

UKUPNA GUSTOĆA ENERGIJA ZRAČENJA svih valnih duljina (integriranje gornje relacije po svim valnim duljinama):

$$u = \int_0^\infty u_\lambda d\lambda = \int_0^\infty u_\nu d\nu$$

Zračenje crnog tijela ($I_\lambda = B_\lambda$):

$$u = \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty B_\lambda(T) d\lambda = \frac{4\sigma T^4}{c} = aT^4$$

$a \equiv 4\sigma/c$ je **konstanta zračenja** $\Rightarrow$

$$a = 7.565767 \times 10^{-16} \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-4}$$

Specifični tok zračenja

SPECIFIČNI TOK ZRAČENJA F_λ je resultantna energija zračenja valne duljine između λ i $\lambda+d\lambda$ koja svake sekunde prolazi kroz jediničnu plohu u smjeru z-osi:

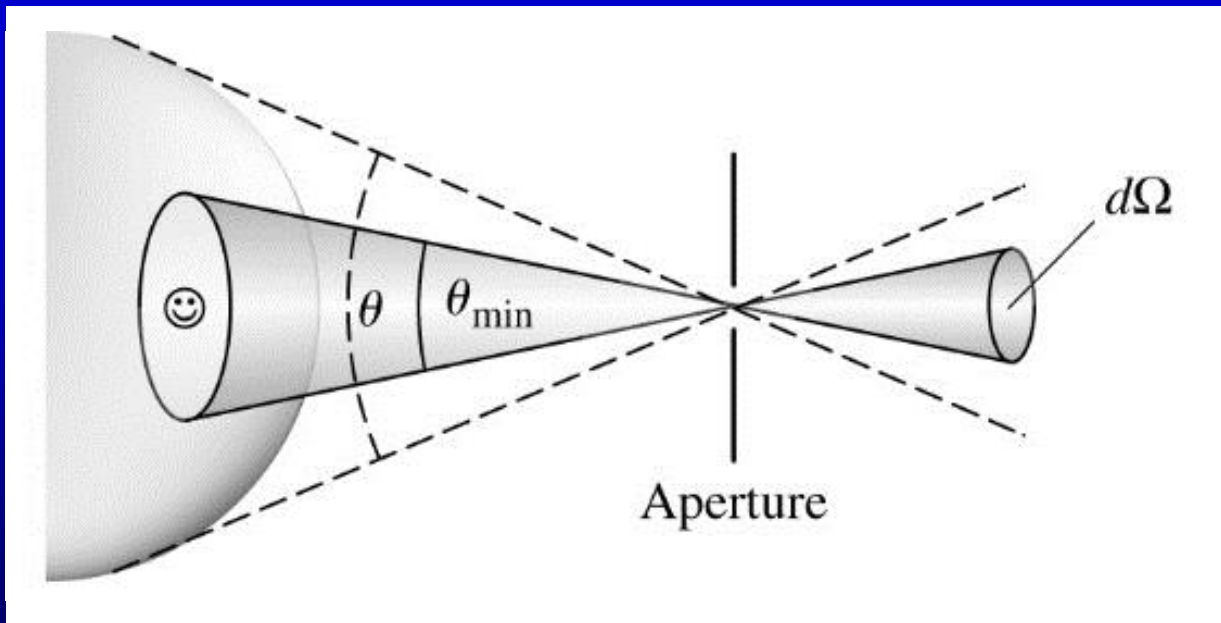
$$F_\lambda d\lambda = \int I_\lambda d\lambda \cos \theta d\Omega = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} I_\lambda d\lambda \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi$$

- z-komponenta zrake je određena sa $\cos \theta$
- Zrake u međusobno suprotnim smjerovima se poništavaju

Izotropno zračenje $\Rightarrow$ nema resultantnog prijenosa energije
($F_\lambda = 0$)

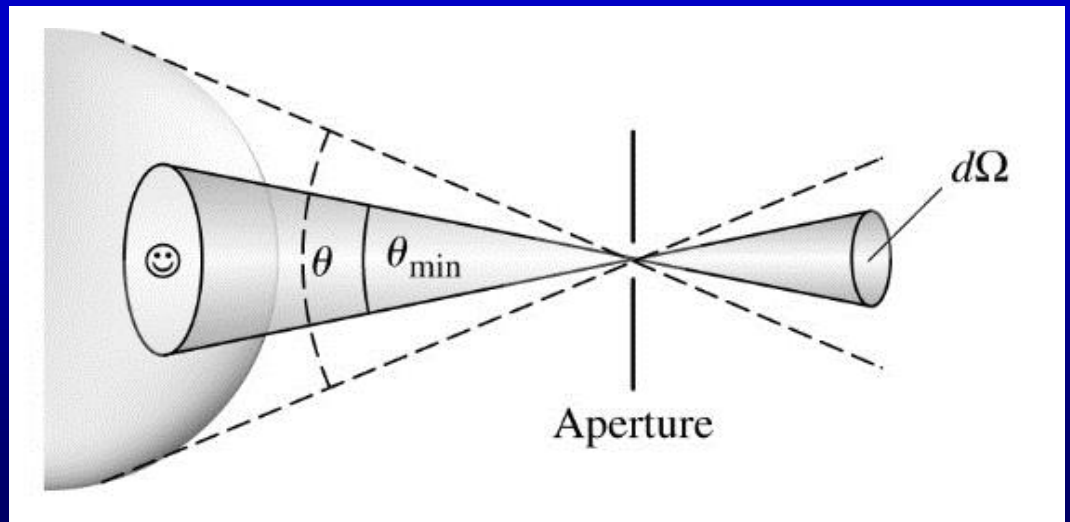
Tok zračenja i specifični intenzitet opisuju svjetlost opaženo s nekog nebeskog izvora $\Rightarrow$ koju od ove dvije veličine opažamo teleskopom?

- Pretpostavimo jednoliki izvor svjetlosti (bez tamnjenja rubova)
- Ako je izvor **moguće razlučiti** $\Rightarrow$ mjerimo **specifični intenzitet** (kut θ pod kojim se opaža izvor puno je veći od najmanjeg kuta θ_{min} kojeg razlučuje teleskop)



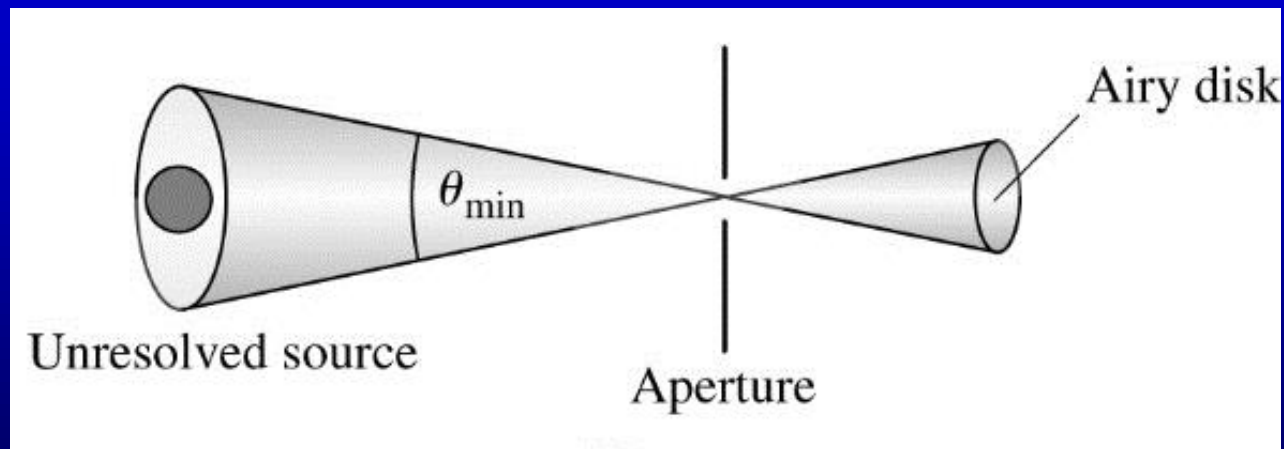
Razlučeni izvor $\Rightarrow$ mjeri se količina energije koja u jednoj sekundi prolazi kroz otvor određen rezolucijom i kutom θ_{min} u prostorni kut $d\Omega_{min}$

- Specifični intenzitet Sunca pri valnoj duljini 501 nm $\Rightarrow$
 $I_{501} = 4.03 \times 10^{13} \text{ W m}^{-3} \text{ sr}^{-1}$
- Ako se izvor udalji na dvostruko veću udaljenost $\Rightarrow$ sa svakog kvadratnog metra izvora prima se $\frac{1}{4}$ energije, ali se površina koja doprinosi opaženoj energiji emitiranoj u prostorni kut Ω_{min} ako je izvor još uvijek razlučen povećava za 4 $\Rightarrow$ ukupna količina energije koju prima kvadratni metar detektora ostaje nepromijenjena $\Rightarrow$
specifični intenzitet je konstantan



Nerazlučeni izvor $\Rightarrow$ mjerimo tok zračenja

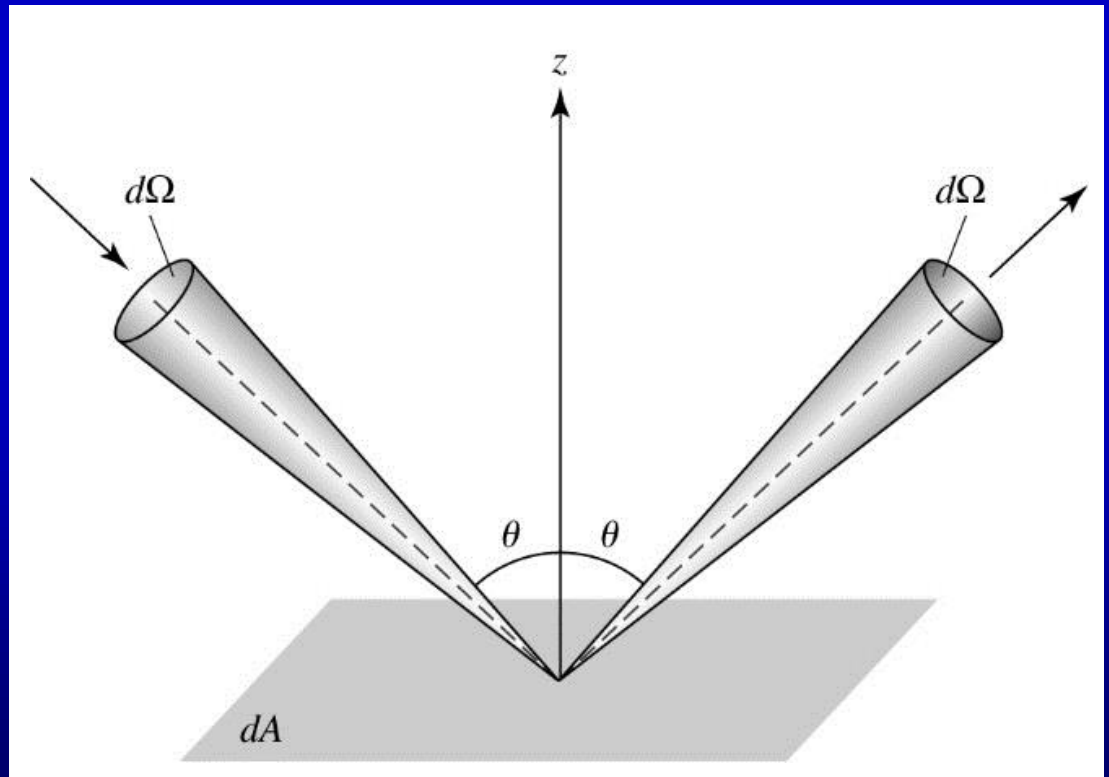
- Ako je izvor na sve većoj udaljenosti $\Rightarrow$ kut θ pod kojim vidimo izvor postaje manji od kuta razlučivanja θ_{min} (izvor više **nije razlučen**)
- Svjetlost koja dolazi do teleskopa napušta izvor pod svim kutevima $\Rightarrow$ teleskop 'integrira' specifični intenzitet po svim kutevima $\Rightarrow$ dobivamo tok zračenja
- Količina energije koja upada na teleskop opada s kvadratom udaljenosti izvora ($1/r^2$) $\Rightarrow$ tok zračenja ovisi o udaljenosti izvora



Tlak zračenja

Foton posjeduje energiju E i nosi količinu gibanja $p = E/c$ iako nema masu $\Rightarrow$ foton pokazuje **TLAK ZRAČENJA**

- Foton upada na površinu dA pod kutom θ i reflektira se u prostorni kut $d\Omega$
- Upadni kut i kut refleksije su jednaki $\Rightarrow$ jednaki su i upadni i reflektirani prostorni kutovi $d\Omega$



Promjena z-komponente količine gibanja fotona valne duljine između λ i $\lambda+d\lambda$ koji se u jedinici vremena dt reflektira o površinu dA iznosi:

$$\begin{aligned} dp_{\lambda} d\lambda &= [(p_{\lambda})_{kon,z} - (p_{\lambda})_{poč,z}] d\lambda \\ &= \left[\frac{E_{\lambda} \cos \theta}{c} - \left(-\frac{E_{\lambda} \cos \theta}{c} \right) \right] d\lambda \\ &= \frac{2E_{\lambda} \cos \theta}{c} d\lambda \\ &= \frac{2}{c} I_{\lambda} d\lambda dt dA \cos^2 \theta d\Omega \end{aligned}$$

Zadnji red proizlazi iz:

$$E_{\lambda} d\lambda = I_{\lambda} d\lambda dt dA \cos \theta d\Omega$$

Newtonov drugi i treći zakon $\Rightarrow -dp_{\lambda}/dt$ je sila kojom fotoni djeluju na površinu dA

TLAK ZRAČENJA je sila kojom fotoni djeluju na jediničnu površinu dA u prostornom kutu $d\Omega$

Integracija po svim smjerovima daje **tlak zračenja fotona** s valnim duljinama između λ i $\lambda+d\lambda$:

$$\begin{aligned} P_{\text{rad},\lambda} &= \frac{2}{c} \int_{\text{polusfera}} I_{\lambda} d\lambda \cos^2 \theta d\Omega \quad (\text{refleksija}) \\ &= \frac{2}{c} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} I_{\lambda} d\lambda \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\phi \end{aligned}$$

- Tlak zračenja postoji svugdje u polju zračenja fotonskog plina $\Rightarrow$ površina dA je matematička površina kroz koju fotoni putuju na drugu stranu
- Faktor 2 iz gornje jednadžbe može se ukloniti u izrazu za tlak zračenja u **izotropnom polju zračenja**, uz integraciju po svim kutevima:

$$P_{\text{rad},\lambda} = \frac{1}{c} \int_{\text{sfera}} I_{\lambda} d\lambda \cos^2 \theta d\Omega \quad (\text{transmisija})$$

$$P_{\text{rad},\lambda} = \frac{1}{c} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} I_{\lambda} d\lambda \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\phi$$

$$P_{\text{rad},\lambda} = \frac{4\pi}{3c} I_{\lambda} d\lambda \quad (\text{izotropno polje zračenja})$$

- Neizotropno polje zračenja $\Rightarrow$ tlak ovisi o orijentaciji površine dA u relaciji za transmisiju
- Integracijom gornje jednadžbe po svim valnim duljinama dolazi se do ukupnog tlaka zračenja:

$$P_{\text{rad}} = \int_0^{\infty} P_{\text{rad},\lambda} d\lambda$$

Tlak zračenja crnog tijela:

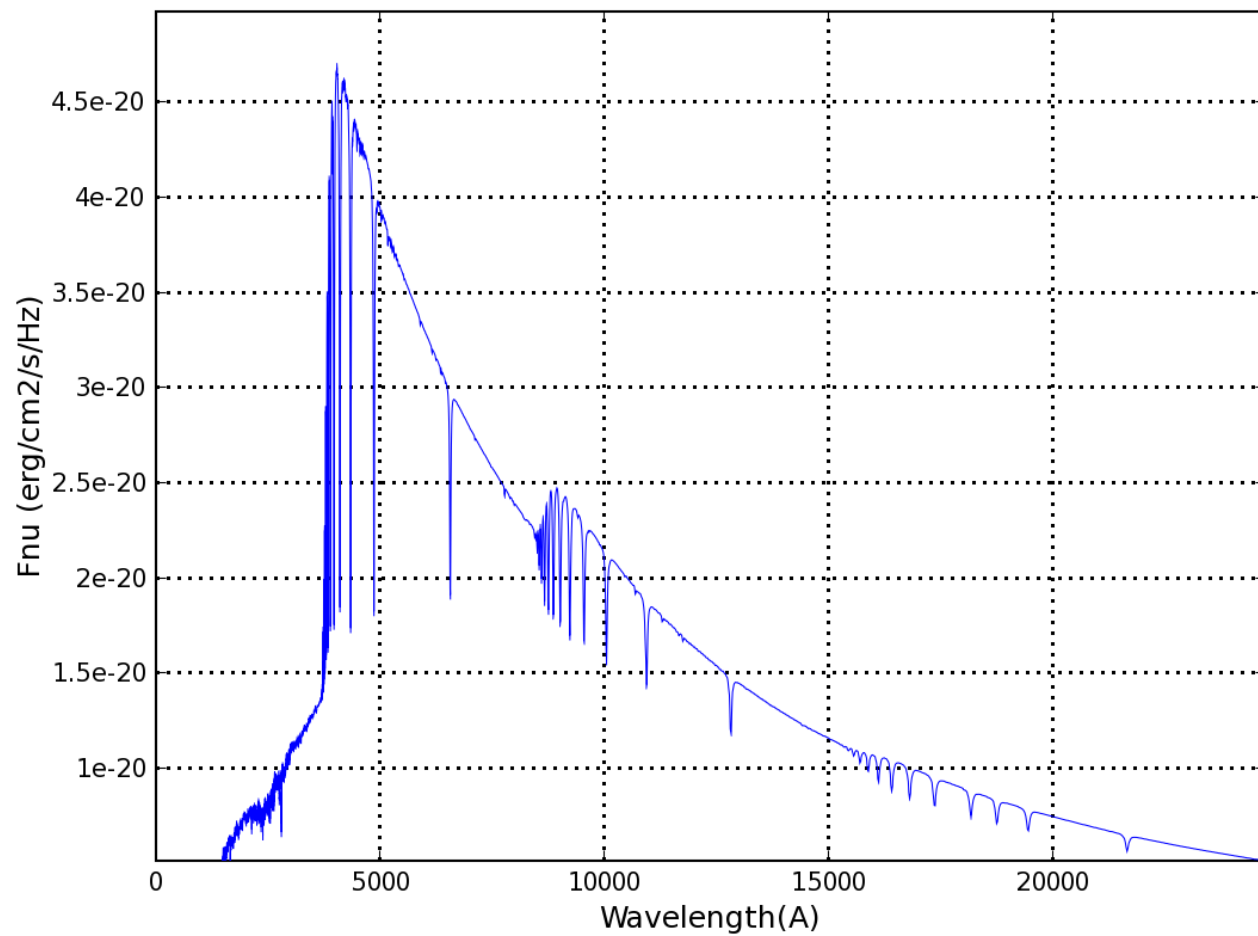
$$P_{\text{rad}} = \frac{4\pi}{3c} \int_0^{\infty} B_{\lambda}(T) d\lambda = \frac{4\sigma T^4}{3c} = \frac{1}{3} aT^4 = \frac{1}{3} u$$

- **Tlak zračenja crnog tijela** jednak je trećini gustoće energije (kod monoatomnog plina, idealni tlak jednak je 2/3 gustoće energije)

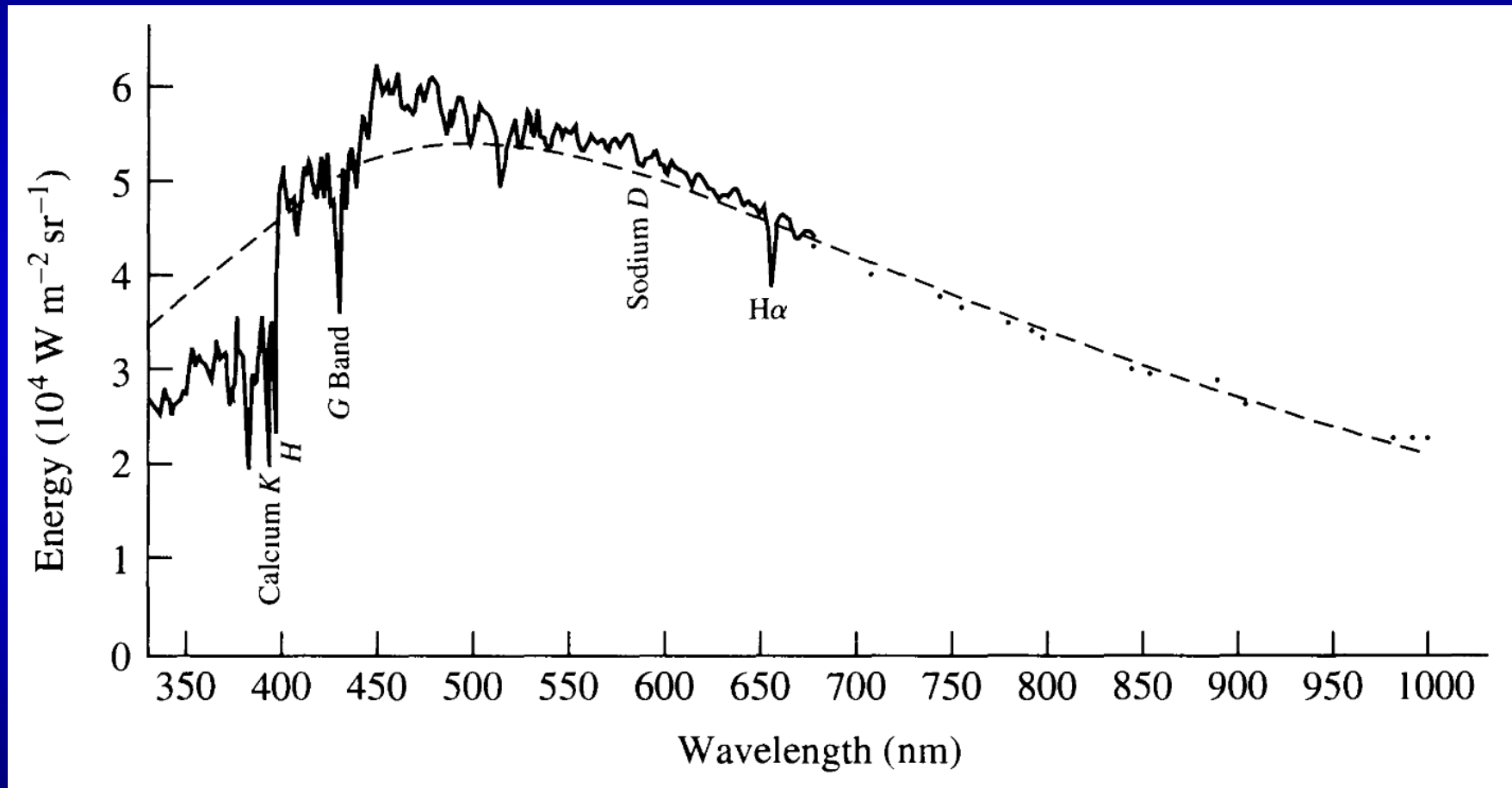
ZVJEZDANI OPACITET (PROZIRNOST)

- Zvijezde nisu crna tijela $\Rightarrow$ problem određivanja makroskopskih svojstava zvijezda poput 'površinske' temperature
- Stefan-Boltzmannov zakon određuje temperaturu crnog tijela $\Rightarrow$ spektri zvijezda (Sunce) znatno odstupaju od spektra crnog tijela!
- Apsorpcijske linije efikasno uklanjaju fotone iz kontinuiranog spektra na određenim valnim duljinama
- Niz gustih metalnih apsorpcijskih linija $\Rightarrow$ gotovo kontinuirana apsorpcija i smanjenje intenziteta u spektru!
 $\Rightarrow$ **prekrivanje linija ('line blanketing')**
- U drugim spektralnim područjima, emisijske linije mogu pojačati intenzitet kontinuiranog spektra (rendgensko, UV područje)

Vega Spectrum

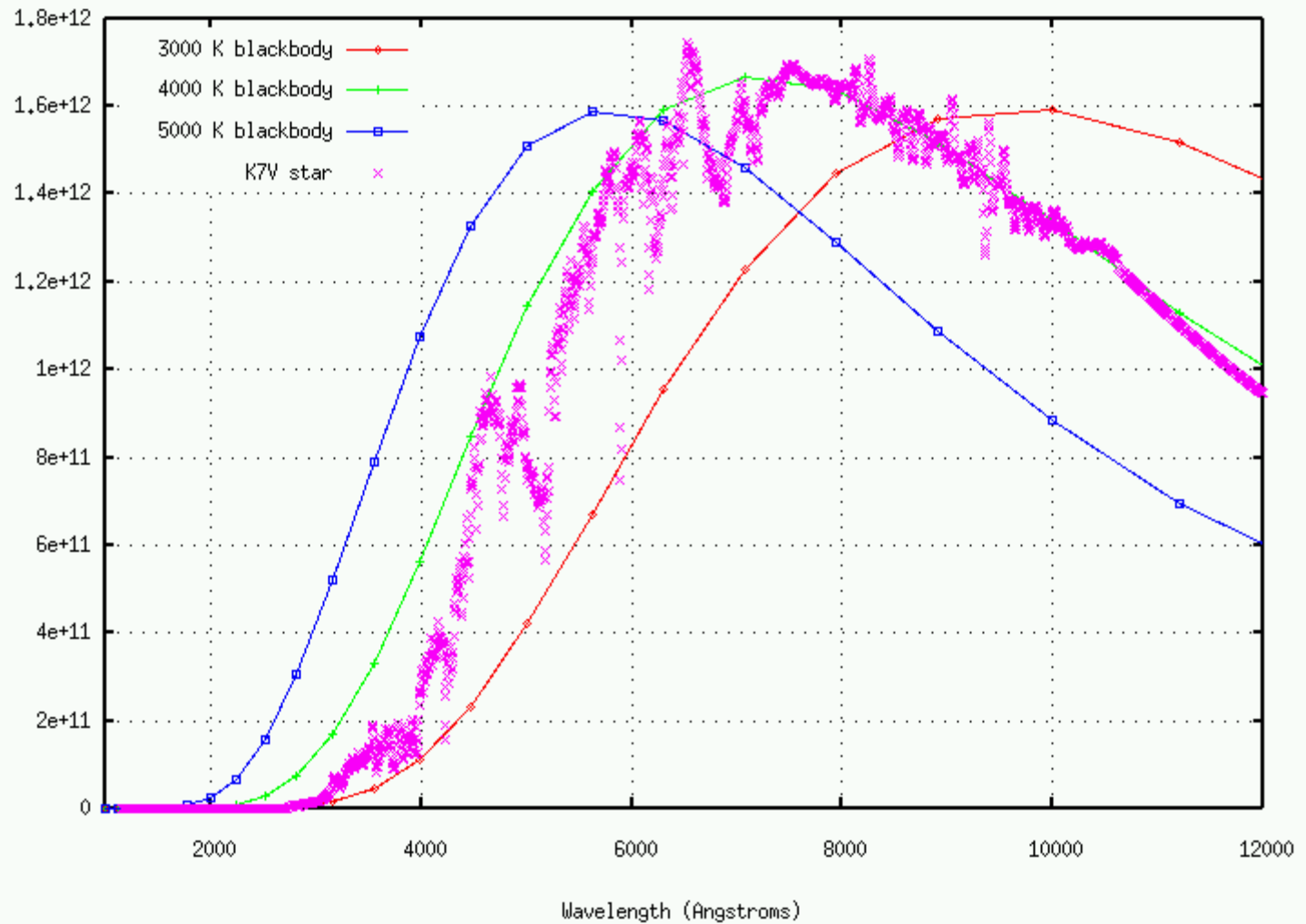


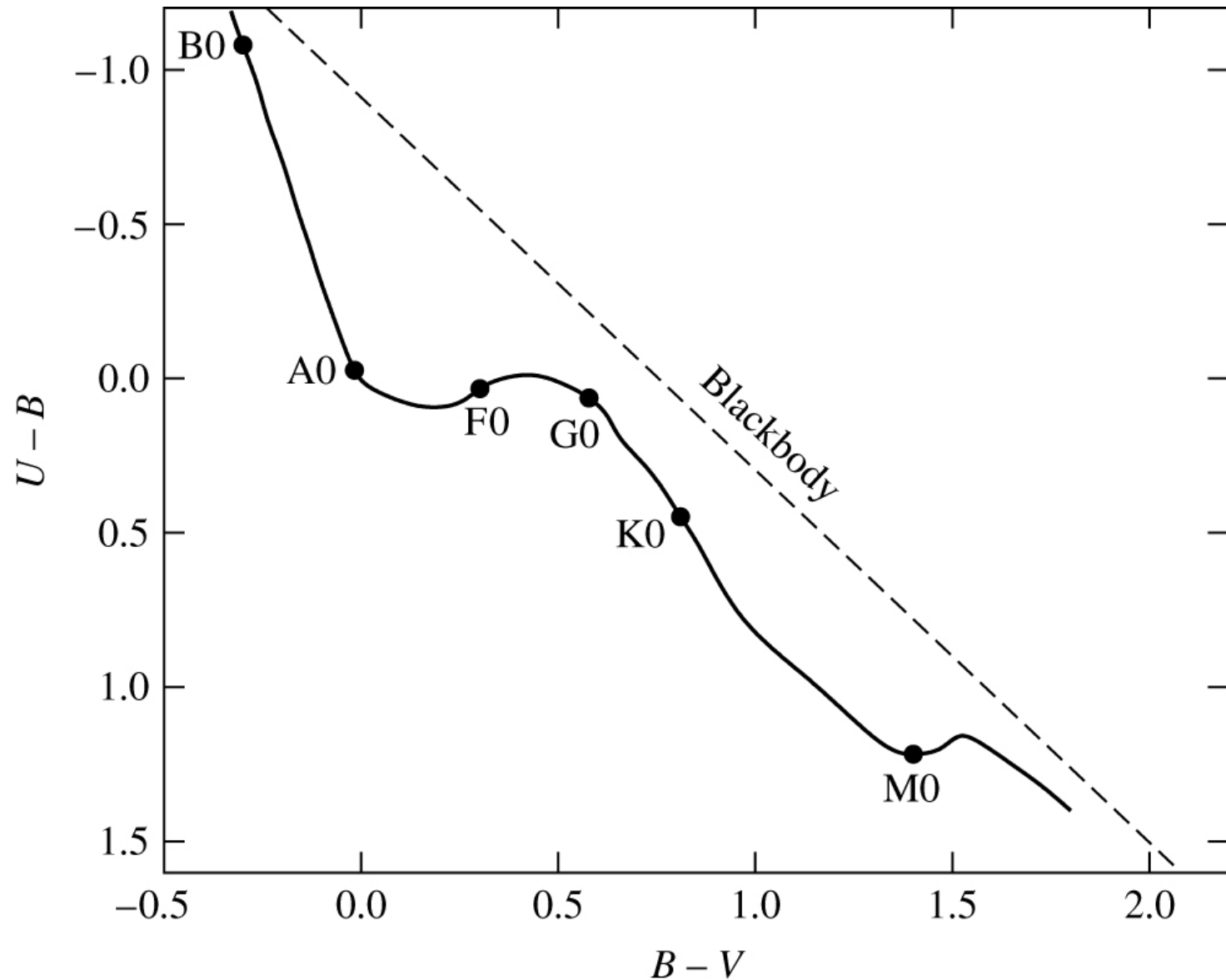
Sunčev spektar – G2V



Aller, 1991, *'Atoms, Stars and Nebulae'*, Cambridge University Press, New York

Spectrum of a cool star compared to blackbodies





Temperatura i lokalna termodinamička ravnoteža

Temperaturu u zvijezdi možemo definirati na različite načine u ovisnosti o fizikalnom procesu koji opisuje:

- 1. EFEKTIVNA TEMPERATURA** – određena mjerenjem luminoziteta (sjaja) iz Stefan-Boltzmannovog zakona za određeni sloj unutar zvijezde
- 2. EKSCITACIJSKA TEMPERATURA** – određena je Boltzmannovom jednačbom
- 3. IONIZACIJSKA TEMPERATURA** – određena je Sahinom jednačbom
- 4. KINETIČKA TEMPERATURA** – određena je Maxwell-Boltzmannovom raspodjelom
- 5. TEMPERATURA BOJE** – određena je prilagodbom oblika kontinuiranog spektra zvijezde Planckovoj funkciji

- Različite vrste temperature (osim efektivne) mogu se odrediti za bilo koju točku unutar zvijezde i ovise o **stanju plina**
- Sve vrste temperatura (osim efektivne) su jednake za plin sadržan u 'idealnom volumenu' → unutar tog volumena čestice plina i zračenja crnog tijela biti će u ravnoteži i mogu se opisati **jedinstvenom temperaturom** → nema resultantnog toka energije kroz takav volumen plina ili između čestica plina i zračenja ⇒ svaki proces **uravnotežen** je suprotnim procesom (npr. apsorpcija i emisija) ⇒ plin je u **TERMODINAMIČKOJ RAVNOTEŽI**
- Zvijezda ne može biti u savršenoj termodinamičkoj ravnoteži jer mora postojati **resultantni tok energije** iz unutrašnjosti prema površini ⇒ temperatura **ovisi o položaju unutar zvijezde**

- Čestice plina i zračenja u neki volumen dolaze iz područja različitih temperatura $\Rightarrow$ međudjelovanje čestica plina (sudari) i fotona (emisija i apsorpcija) $\Rightarrow$ složen opis procesa pobuđenja i ionizacije
- **LOKALNA TERMODINAMIČKA RAVNOTEŽA (LTE)** $\Rightarrow$ udaljenost na kojoj se temperatura značajno mijenja puno je veća od udaljenosti koju prevale čestice plina i fotona između sudara (**srednji slobodni put**) $\Rightarrow$ čestice plina i fotoni ne mogu izaći iz lokalnog volumena te imaju gotovo **konstantnu temperaturu**
- Lokalni volumen plina može se opisati jedinstvenom konstantnom temperaturom u uvjetima lokalne termodinamičke ravnoteže

Primjer: Fotosfera je sloj atmosfere Sunca iz koje fotoni mogu bez raspršenja otići u cirkumstelarni prostor. Prema modelu Sunčeve atmosfere, temperatura u fotosferi se mijenja od 5580 K do 5790 K na udaljenosti od 25 km. Koliko iznosi temperaturna visinska skala i u kakvoj je odnosu sa srednjim slobodnim putem atoma u fotosferi Sunca?

- Karakteristična udaljenost na kojoj se neka fizikalna veličina mijenja naziva se **visinska skala** (*scale height*)
⇒ za temperaturu → **temperaturna visinska skala:**

$$H_T = \frac{T}{|dT/dr|}$$

Sunčeva fotosfera:

$$H_T = \frac{T}{|dT/dr|} = \frac{5685 \text{ K}}{(5790 \text{ K} - 5580 \text{ K})/(25 \text{ km})} = 677 \text{ km}$$

- Temperatura od 5685 K je srednja temperatura u intervalu od 5580 K i 5790 K

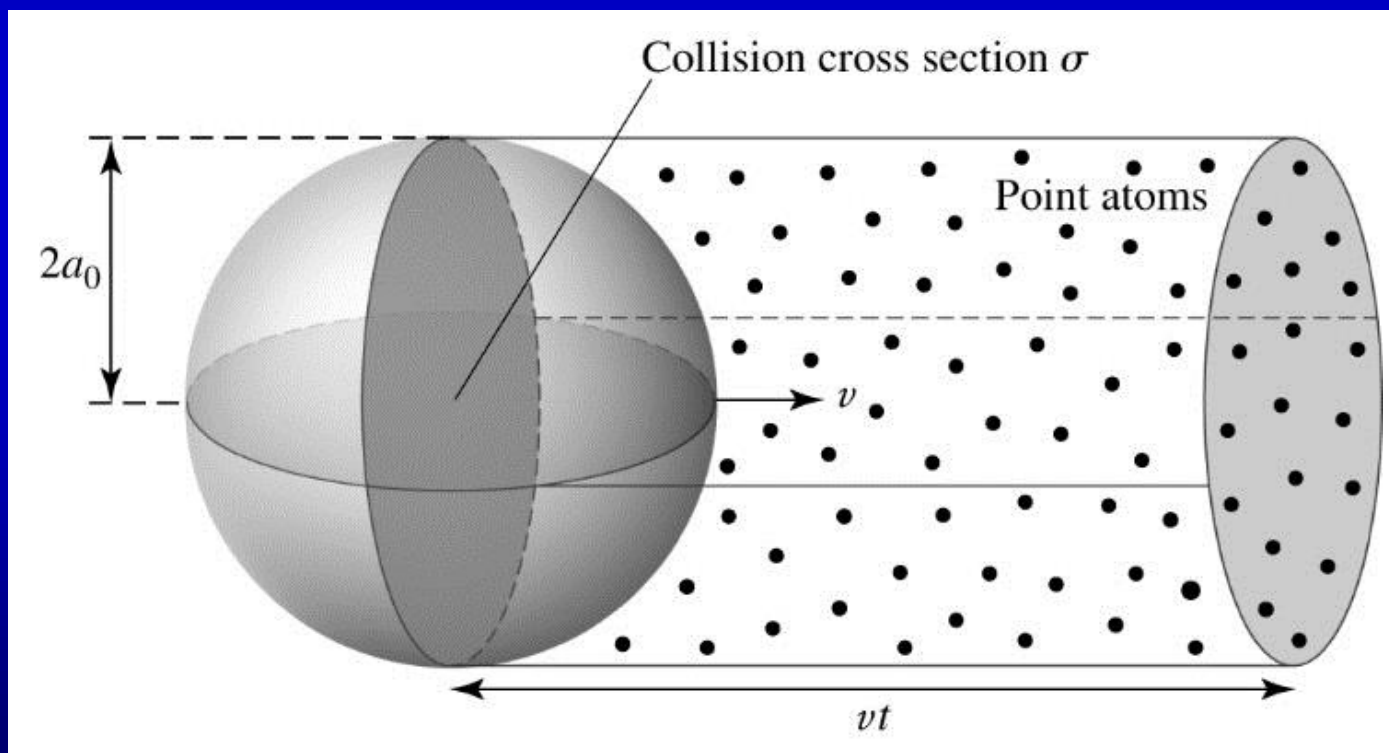
Koliko iznosi srednji slobodni put atoma u Sunčevoj fotosferi?

- Srednji slobodni put atoma odgovara srednjem putu kojeg atom pređe između dva uzastopna sudara
- Fotosfera se sastoji uglavnom od neutralnih atoma vodika u osnovnom stanju s gustoćom $\rho = 2.1 \cdot 10^{-4} \text{ kg/m}^3$
- Uz pretpostavku plina sastavljenog od čistog vodika $\rightarrow$ broj vodikovih atoma u kubnom metru iznosi:

$$n = \frac{\rho}{m_H} = 1.25 \times 10^{23} \text{ m}^{-3}$$

- Klasična aproksimacija: atomi kao čvrste sfere polumjera jednakog Bohrovom polumjeru (a_0)
- Dva atoma će se sudariti ako se mimoiđu s razmakom manjim od promjera atoma - $2a_0$

- Problem je ekvivalentan razmatranju jednog atoma promjera $2a_0$ koji se giba brzinom v preko niza statičnih točaka koje predstavljaju središta drugih atoma
- Za vrijeme t atom pređe udaljenost vt i prebriše volumen $V = \pi(2a_0)^2 vt = \sigma vt$ gdje je σ **udarni presjek**



Geometrijski udarni presjek:

$$\sigma \equiv \pi(2a_0)^2$$

- Unutar prebrisanog volumena V nalazi se $nV = n\sigma vt$ točkastih atoma s kojima je razmatrani atom doživio sudar

Srednji slobodni put između dva sudara je srednja udaljenost između dva uzastopna sudara:

$$\ell = \frac{vt}{n\sigma vt} = \frac{1}{n\sigma}$$

- Srednji slobodni put za detaljniji proračun uzevši u obzir Maxwellovu raspodjelu brzina svih atoma:

$$\ell = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma}$$

Geometrijski udarni presjek vodikovog atoma:

$$\sigma = \pi(2a_0)^2 = 3.52 \times 10^{-20} \text{ m}^2$$

Srednji slobodni put atoma vodika u fotosferi:

$$\ell = \frac{1}{n\sigma} = 2.27 \times 10^{-4} \text{ m}$$

- **Srednji slobodni put atoma u fotosferi Sunca** je oko 9 redova veličina **manji od temperaturne visinske skale** na kojoj se temperatura značajno mijenja!
- Atomi u plinu između uzastopnih sudara nalaze se unutar volumena gotovo konstantne kinetičke temperature $\Rightarrow$ **atomi fotosfere su u lokalnoj termodinamičkoj ravnoteži!**
- Atomi su ograničeni unutar konačnog volumena konstantne temperature u fotosferi Sunca

- Fotosfera je vidljivi sloj Sunčeve atmosfere $\Rightarrow$ fotoni se u tom sloju atmosfere ne raspršuju i neometano dolaze do Zemlje $\Rightarrow$ **srednji slobodni put fotona je puno veći od temperaturne visinske skale $\Rightarrow$ fotoni u fotosferi Sunca NISU u termodinamičkoj ravnoteži**

Opacitet (prozirnost)

Apsorpcija $\Rightarrow$ svi procesi koji uklanjaju fotone iz zrake svjetlosti

Apsorpcija uključuje:

- **Raspršenje fotona** (npr. Comptonovo raspršenje) iz zrake
- **Prava apsorpcija fotona** uslijed prijelaza elektrona u atomu s nižeg u više energijsko stanje, uključujući i molekulske prijelaze u hladnim zvijezdama

Promjena intenziteta dI_λ zrake valne duljine λ pri prolasku kroz plin gustoće ρ proporcionalna je intenzitetu I_λ i putu ds kojeg je zraka prošla (Beerov zakon):

$$dI_\lambda = -\kappa_\lambda \rho I_\lambda ds$$

- Put s mjeri se uzduž puta kojeg je zraka prešla i povećava se u smjeru prostiranja zrake

Apsorpcijski koeficijent κ_λ ili opacitet (neprozirnost) predstavlja udarni presjek za apsorpciju fotona valne duljine λ po jediničnoj masi plina zvijezde (m^2/kg)

- Apsorpcijski koeficijent je ovisan o valnoj duljini
- Apsorpcijski koeficijent je općenito ovisan o sastavu, gustoći i temperaturi plina

Primjer: Odredite intenzitet zračenja nakon prolaska zrake kroz sredstvo gustoće ρ , apsorpcijskog koeficijenta κ_λ i debljine s ako je intenzitet neatenuiranog (početnog) zračenja jednak $I_{\lambda,0}$

Konačni intenzitet $I_{\lambda,f}$ zračenja nakon što je zraka svjetlosti prošla put s kroz sredstvo može se odrediti integriranjem relacije:

$$\begin{aligned} dI_\lambda &= -\kappa_\lambda \rho I_\lambda ds \\ \int_{I_{\lambda,0}}^{I_{\lambda,f}} \frac{dI_\lambda}{I_\lambda} &= - \int_0^s \kappa_\lambda \rho ds \end{aligned}$$

Rješenje integrala:

$$I_\lambda = I_{\lambda,0} e^{-\int_0^s \kappa_\lambda \rho ds}$$

Za plin jednolike gustoće i konstantnog opaciteta:

$$I_\lambda = I_{\lambda,0} e^{-\kappa_\lambda \rho s}$$

- Za čistu apsorpciju, bez raspršenja i emisije $\Rightarrow$ broj fotona u snopu opada i ne može se obnoviti $\Rightarrow$ intenzitet zračenja opada eksponencijalno za faktor $1/e$ na karakterističnoj udaljenosti:

$$\ell = \frac{1}{\kappa_{\lambda} \rho}$$

- U Sunčevoj fotosferi gustoća iznosi oko $\rho = 2.1 \cdot 10^{-4} \text{ kg/m}^3$
- Koeficijent apsorpcije (opacitet) Sunčeve atmosfere na optičkim valnim duljinama od 500 nm iznosi $\kappa_{500} = 0.03 \text{ m}^2/\text{kg}$

Karakteristična udaljenost koju pređe optički foton prije nego je apsorbiran (**srednji slobodni put fotona**) iznosi:

$$\ell = \frac{1}{\kappa_{500} \rho} = 160 \text{ km}$$

- Srednji slobodni put je reda veličine temperaturne visinske skale ($H_T = 677 \text{ km}$) fotosfere $\Rightarrow$ fotoni putuju kroz područja **različitih temperatura $\Rightarrow$ fotoni NISU u termodinamičkoj ravnoteži u fotosferi Sunca**

Optička dubina

Srednji slobodni put fotona:

$$\ell = \frac{1}{\kappa_\lambda \rho} = \frac{1}{n\sigma_\lambda}$$

- $\kappa_\lambda \rho$ i $n\sigma_\lambda$ mogu se promatrati kao udio fotona koji se iz snopa raspršuju po metru pređene udaljenosti → 'vjerojatnost' raspršenja fotona

Optička dubina uzduž puta kojim je prošla zraka:

$$d\tau_\lambda = -\kappa_\lambda \rho ds$$

s je udaljenost mjerena uzduž puta fotona u smjeru njegovog gibanja

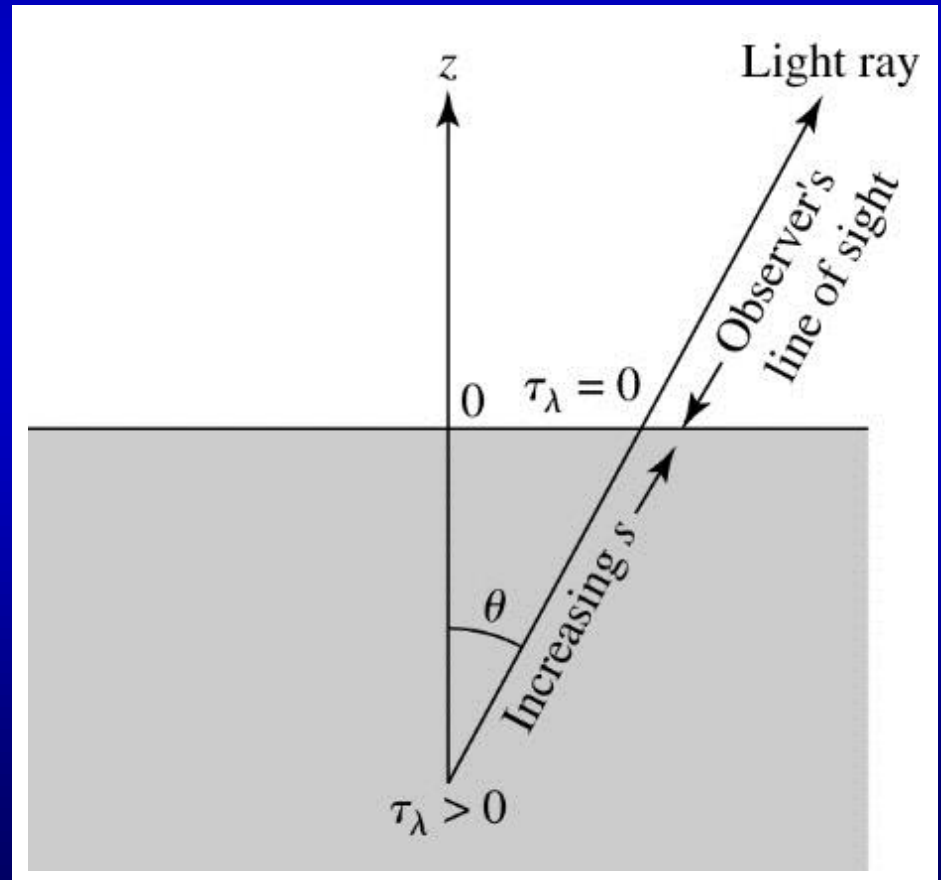
- Promatramo put unatrag kojim je prošla zraka svjetlosti do opažača iz svjetlosnog izvora

- Razlika u optičkim dubinama $\tau_{\lambda,f}$ i $\tau_{\lambda,0}$ početnog ($s = 0$) i konačnog (f) položaja zrake svjetlosti koja je prošla put s jednaka je:

$$\Delta\tau_{\lambda} = \tau_{\lambda,f} - \tau_{\lambda,0} = - \int_0^s \kappa_{\lambda} \rho \, ds$$

$\Delta\tau_{\lambda} < 0$ kako se svjetlost približava opažaču $\rightarrow$ zraka svjetlosti putuje kroz sredstvo sa sve manjom optičkom dubinom

$\tau_{\lambda} = 0$ za vanjske dijelove zvijezde (fotosfera) u kojima se foton ne raspršuje i neometano putuje do opažača



⇒ Početna optička dubina zrake svjetlosti koja putuje udaljenost s iz unutrašnjosti zvijezde da bi stigla do vrha atmosfere:

$$0 - \tau_{\lambda,0} = - \int_0^s \kappa_{\lambda} \rho \, ds$$
$$\tau_{\lambda} = \int_0^s \kappa_{\lambda} \rho \, ds$$

τ_{λ} je optička dubina početnog položaja zrake svjetlosti na udaljenosti s ($s > 0$) od vrha atmosfere zvijezde.

Iz relacije za promjenu intenziteta pri čistoj apsorpciji:

$$I_{\lambda} = I_{\lambda,0} e^{-\int_0^s \kappa_{\lambda} \rho \, ds}$$

dolazimo do promjene intenziteta zračenja pri prolasku zrake kroz plin optičke dubine τ_{λ} do opažača:

$$I_{\lambda} = I_{\lambda,0} e^{-\tau_{\lambda}}$$

Za plin s optičkom dubinom $\tau_\lambda = 1$ početnog položaja zrake, intenzitet zračenja smanjit će se za $1/e$ prije nego napusti zvijezdu $\Rightarrow$

Optička dubina predstavlja broj srednjih slobodnih puteva fotona na putu fotona uzduž zrake svjetlosti od početnog položaja do površine zvijezde

Optička dubina predstavlja srednji broj raspršenja fotona na njegovom putu od početnog položaja do površine zvijezde

- U atmosferu zvijezde možemo vidjeti do dubine na kojoj je optička dubina $\tau_\lambda \approx 1$

Optički DEBELO sredstvo $\Rightarrow \tau_\lambda \gg 1$

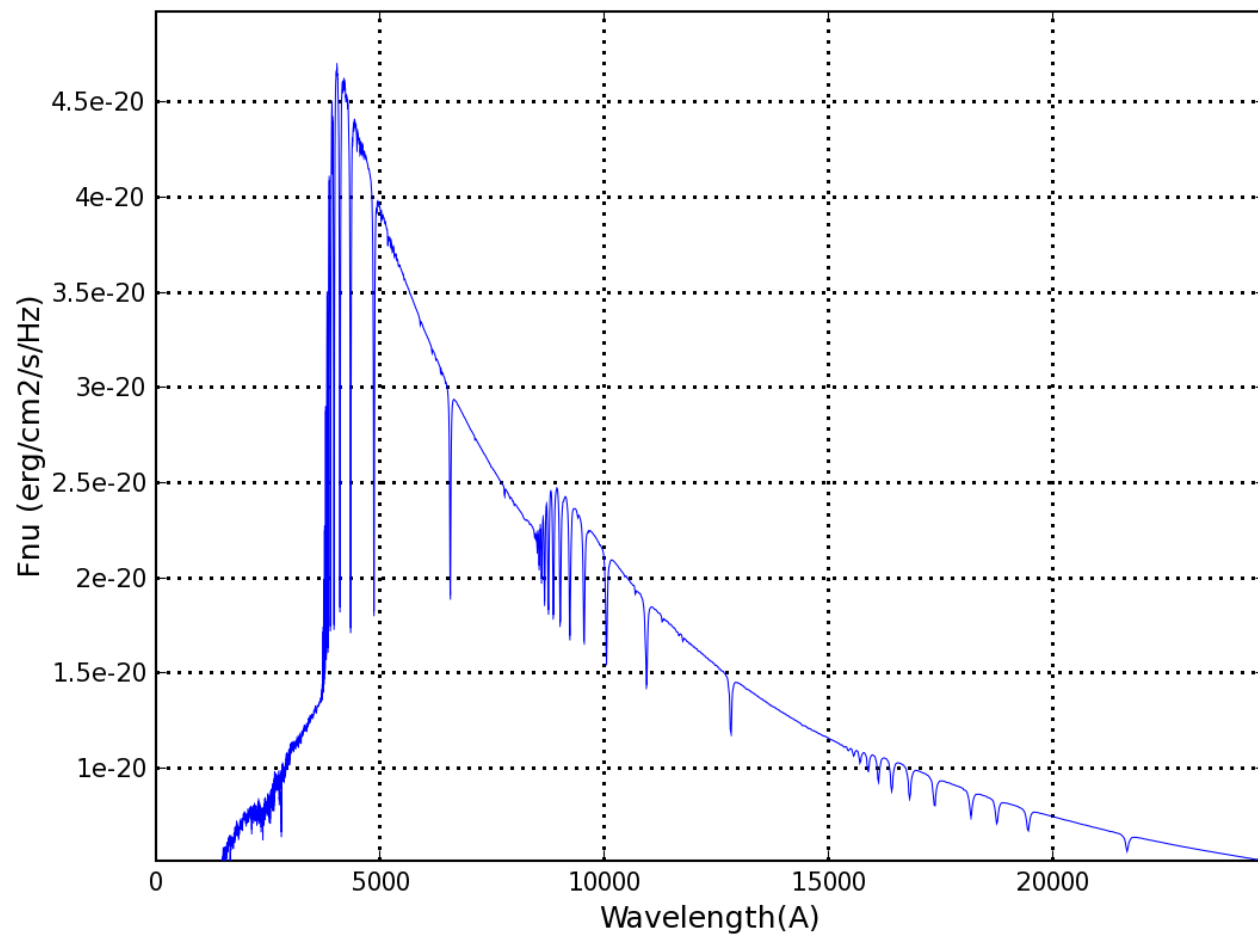
Optički TANKO sredstvo $\Rightarrow \tau_\lambda \ll 1$

- Plin može biti optički tanak na jednim valnim duljinama, a optički debel na nekim drugim valnim duljinama $\Rightarrow$ hladni plin i prašina su optički debeli na vizualnim valnim duljinama, ali tanki u radio području
- Zemljina atmosfera je optički tanka u vidljivom području, ali optički debela u rendgenskom području

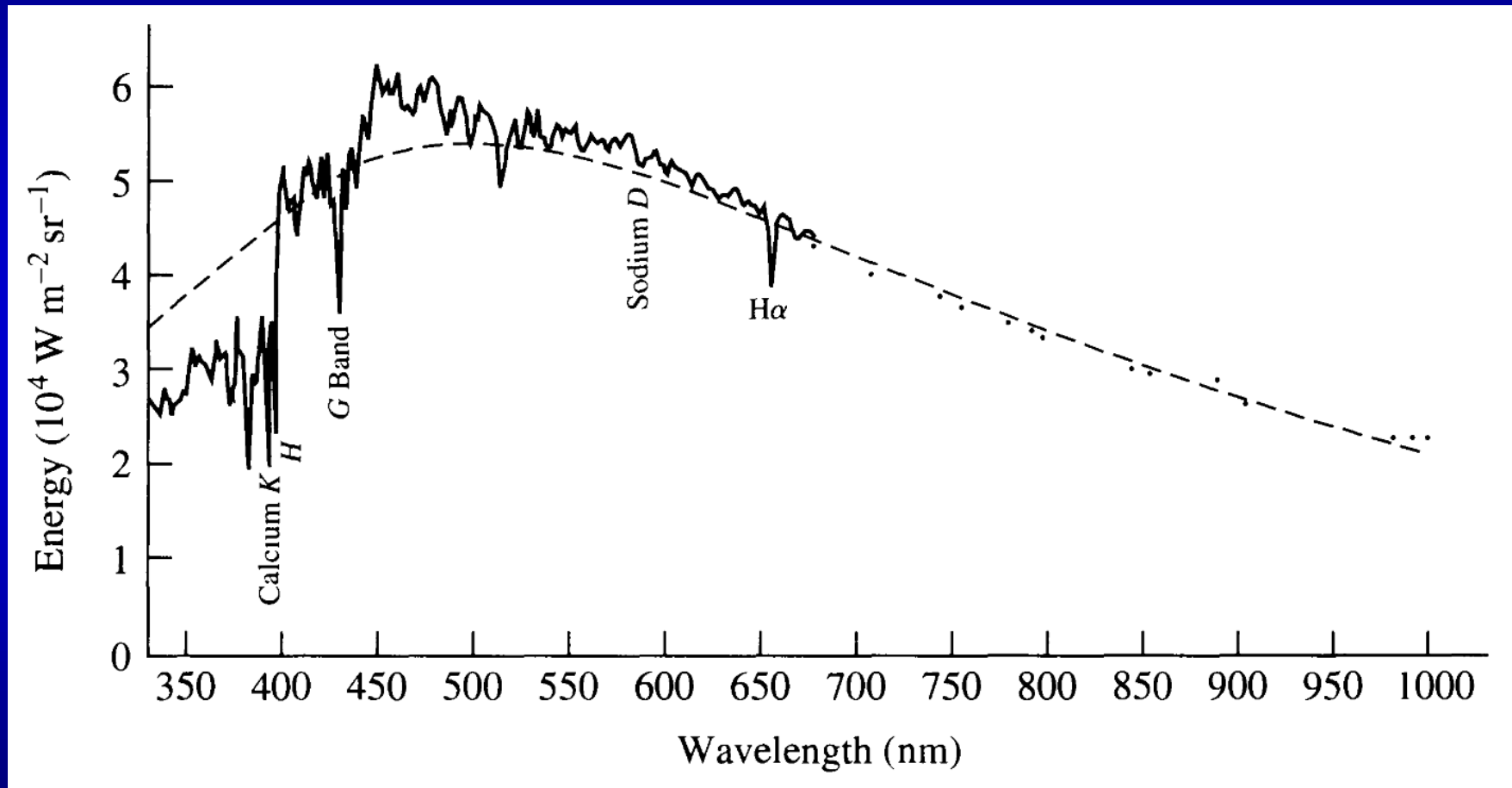
Izvori opaciteta (neprozirnosti)

- Opacitet atmosfere je određen procesima međudjelovanja fotona sa česticama plina (atomi, ioni, slobodni elektroni)
- Foton u međudjelovanju s plinom može biti **apsorbiran** ili **raspršen**
- **Apsorpcija** $\Rightarrow$ foton nestaje, a njegova energija prelazi u termičku energiju plina
- **Raspršenje** $\Rightarrow$ foton mijenja svoj smjer
- Apsorpcija i raspršenje uklanjaju fotone iz snopa svjetlosti $\Rightarrow$ doprinose opacitetu κ_{λ} materijala zvijezde
- Ukoliko se opacitet sporo mijenja s valnom duljinom $\Rightarrow$ **kontinuirani spektar zvijezde** (*kontinuum*) $\Rightarrow$ **spektralna energijska raspodjela** (SED)
- Brza promjena opaciteta s valnim duljinama $\Rightarrow$ tamne apsorpcijske linije superponirane na kontinuirani spektar

Vega Spectrum



Sunčev spektar – G2V



Aller, 1991, *'Atoms, Stars and Nebulae'*, Cambridge University Press, New York

- Glavni izvori opaciteta uključuju promjenu kvantnog stanja elektrona
- Pri promjeni kvantnog stanja, elektron može biti **vezan** ili **nevezan** u atomu

1. **Vezano-vezani prijelazi** (ekscitacije i deekscitacije)

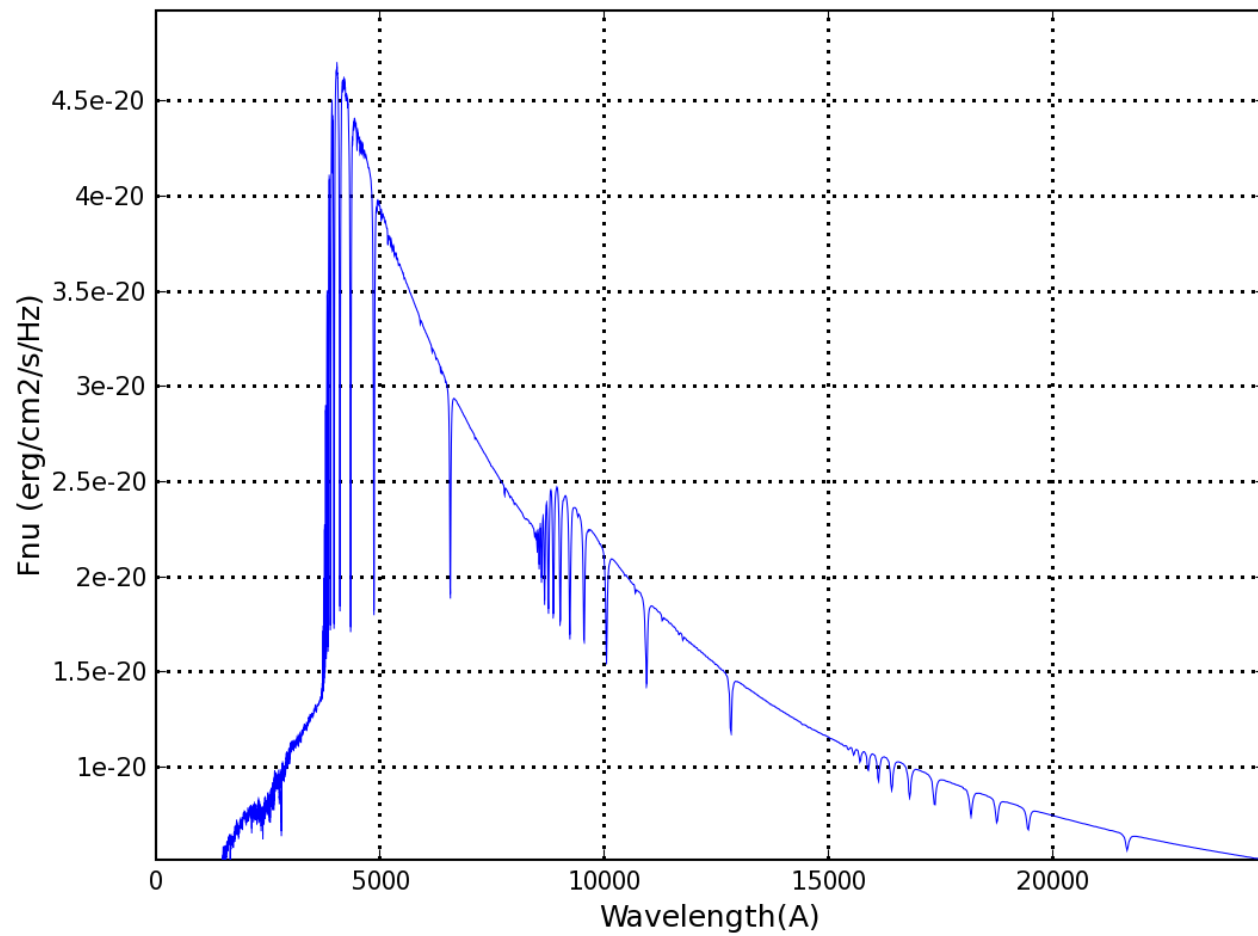
- Elektron prijelazi iz jedne orbitale (energijskog nivoa) u drugu unutar atoma ili iona
- **Apsorpcija** $\Rightarrow$ prijelaz elektrona iz nižeg u više stanje uz apsorpciju fotona $\Rightarrow \kappa_{\lambda,bb}$
- Opacitet je vrlo malen osim za one valne duljine pri kojima dolazi do prijelaza $\Rightarrow$ tvorba **apsorpcijskih linija**
- **Emisija** $\Rightarrow$ suprotan prijelaz elektrona iz višeg u niže stanje uz nastanak fotona $\Rightarrow$ tvorba **emisijских linija**
- **Raspršenje** $\Rightarrow$ apsorpcija fotona na atomu i prijelaz u isto početno energijsko stanje uz emisiju fotona iste valne duljine, ali uz promjenu smjera gibanja fotona

- Apsorpcija fotona i prijelaz atoma u pobuđeno stanje → deekscitacija pobuđenog atoma u neko drugo energijsko stanje ⇒ emisija fotona valne duljine **različite** od valne duljine apsorbiranog fotona ⇒ **procesuiranje početnog spektra zračenja u drugi oblik spektra** (npr. prašina: snažna apsorpcija u UV području i emisija u infracrvenom području)

Što se događa s pobuđenim atomom koji je apsorbirao foton?

- **Sudarna deekscitacija** ⇒ pobuđeni atom kroz sudare predaje suvišak energije i deekscitira se u početno stanje ⇒ **energija apsorbiranog fotona prelazi u termičku energiju plina (grijanje plina)**
- Rezultat apsorpcije je **smanjenje srednje energije fotona**
- Opacitet vezano-vezanih prijelaza je izvor linijske apsorpcije

Vega Spectrum



2. Vezano-slobodni prijelazi (fotoionizacija)

- Apsorbirani foton posjeduje dovoljno energije za **ionizaciju atoma** $\Rightarrow$ izbačeni elektron može imati bilo koju energiju
- Ionizacija atoma s ionizacijskom energijom χ_n n-te orbitale $\Rightarrow$ svaki foton valne duljine $\lambda \leq hc/\chi_n$ može **ionizirati** atom $\Rightarrow$ **kontinuirana apsorpcija**
- Opacitet vezano-slobodnih prijelaza $\kappa_{\lambda,bf}$ je izvor **kontinuirane apsorpcije**

Udarni presjek fotoionizacije vodikovog atoma u kvantnom stanju n fotonom valne duljine λ :

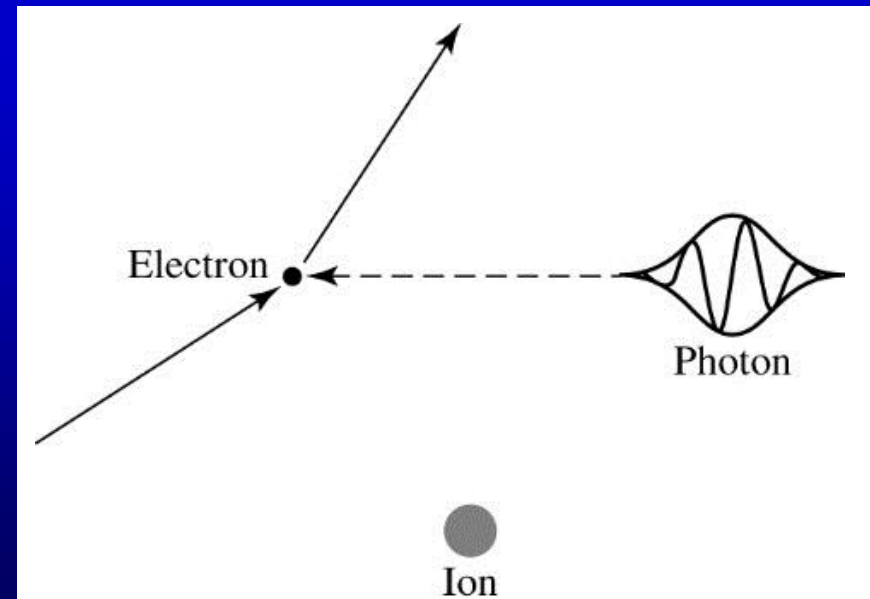
$$\sigma_{bf} = 1.31 \times 10^{-19} \frac{1}{n^5} \left(\frac{\lambda}{500 \text{ nm}} \right)^3 \text{ m}^2$$

- Udarni presjek za fotoionizaciju sličan je sudarnom presjeku vodikovog atoma

- **Rekombinacija** $\Rightarrow$ suprotan proces u kojem se elektron rekombinira s ionom uz emisiju jednog ili više fotona $\Rightarrow$ smanjenje srednje energije fotona

3. Slobodno-slobodni prijelazi

- Raspršenje u kojem **slobodni elektron** u blizini iona apsorbira foton $\Rightarrow$ elektron mijenja smjer i brzinu
- Proces se može odvijati za bilo koje energije i valne duljine fotona $\Rightarrow$ slobodno-slobodni opacitet $\kappa_{\lambda,ff}$ je izvor **kontinuirane apsorpcije**



Carroll, B.W., Ostlie, D.A., 2006,
'Introduction to Modern Astrophysics',
Pearson

- **Zakočno zračenje (bremsstrahlung)** $\Rightarrow$ prilikom prolaska elektrona blizu iona, elektron može gubiti energijom emisijom fotona $\Rightarrow$ elektron 'koči' i smanjuje brzinu uz emisiju zračenja

4. Elektronsko raspršenje

- Raspršenje fotona na slobodnom elektronu kroz **Thomsonovo raspršenje**
- Elektron se ponaša kao kvantni oscilator koji oscilira u elektromagnetskom polju fotona $\Rightarrow$ zračenje mijenja smjer, ali ne i energiju
- Elektron je vrlo malen $\Rightarrow$ malen udarni presjek za upadni foton $\Rightarrow$ malen udarni presjek za Thomsonovo raspršenje
- Thomsonovo raspršenje je neovisno o valnoj duljini fotona:

$$\sigma_T = \frac{1}{6\pi\epsilon_0^2} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 = 6.65 \times 10^{-29} \text{ m}^2$$

- Thomsonovo raspršenje je **9 redova veličine manje** od udarnog presjeka fotoionizacije ili sudara
- Elektronsko raspršenje je značajan izvor opaciteta samo pri **vrlo visokim elektronskim gustoćama** što zahtjeva **visoke temperature** $\Rightarrow$ elektronsko raspršenje dominira u **masivnim vrućim zvijezdama** i u **unutrašnjosti zvijezda** u uvjetima u kojima je plin gotovo potpuno ioniziran
- Opacitet κ_{es} uslijed elektronskog raspršenja je izvor **kontinuirane apsorpcije**

Raspršenje fotona na elektronu **slabo vezanom** za atom:

- 1. Comptonovo raspršenje** ako je valna duljina fotona puno manja od dimenzija atoma
- 2. Rayleighovo raspršenje** ako je valna duljina fotona puno veća od dimenzija atoma

- Comptonovo raspršenje se tretira kao Thomsonovo raspršenje
- Udarni presjek Rayleighovog raspršenja manji je od Thomsonovog raspršenja i **ovisi o valnoj duljini kao $\lambda^{-4} \Rightarrow$ brzo opadanje s valnom duljinama**
- Rayleighovo raspršenje može biti značajno u **UV području** za proširene ovojnice atmosfera **superdivova** te u **hladnim zvijezdama glavnog niza**
- Rayleighovo raspršenje je važno u **atmosferama planeta**

Primjer: Odredite najmanju valnu duljinu fotona koji može fotoionizirati vodikov atom u prvom pobuđenom stanju ($n=2$)

Energija elektronskih stanja vodikovog atoma:

$$E_n = -\frac{13.6 \text{ eV}}{n^2}$$

Za $n = 2$:

$$E_2 = -\frac{13.6 \text{ eV}}{2^2} = -3.40 \text{ eV}$$

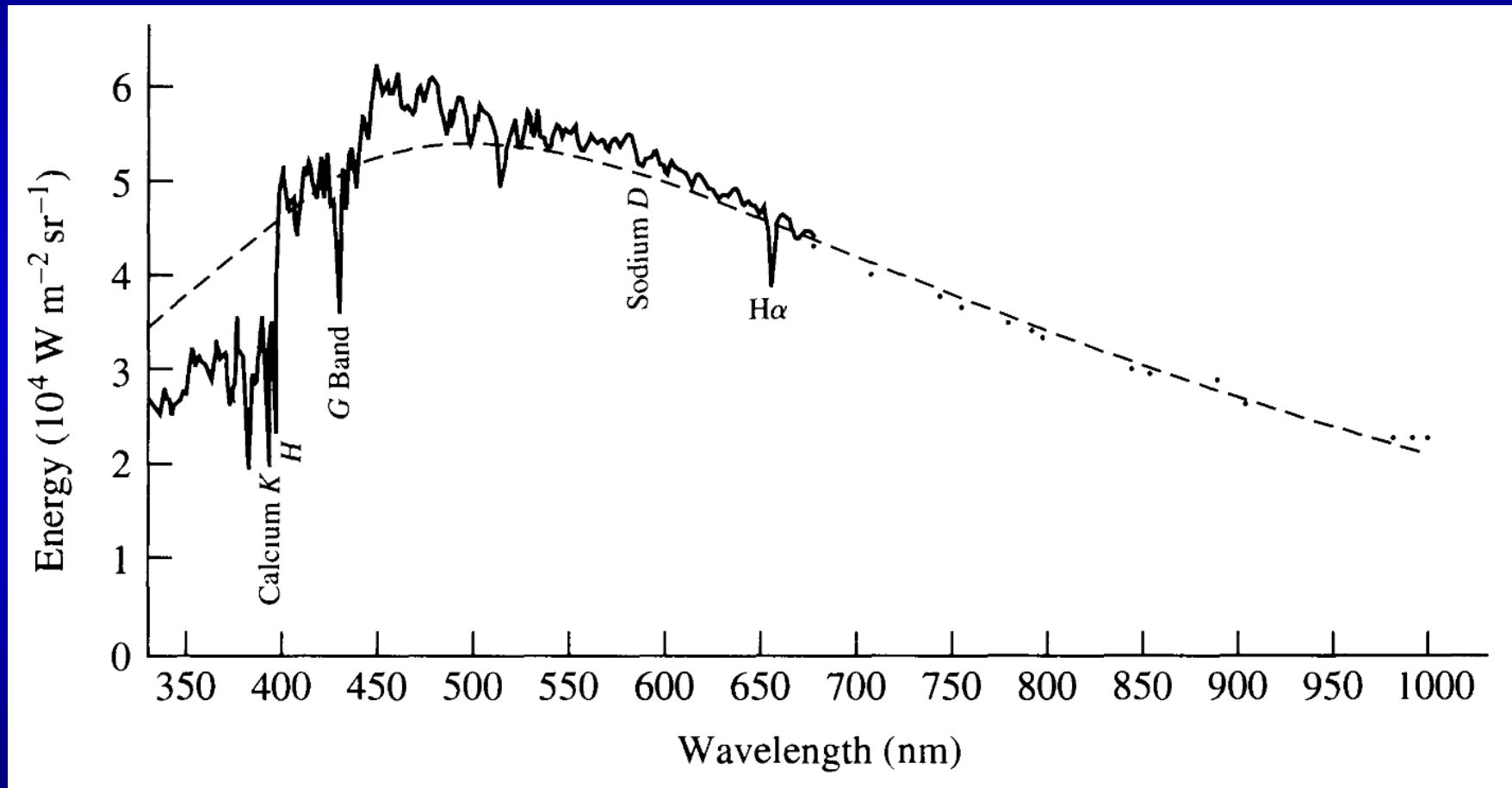
- Foton mora imati energiju od barem $\chi_2 = 3.40 \text{ eV}$ za fotoionizaciju i izbacivanje elektrona iz vodikovog atoma
- Ova energija fotona odgovara valnoj duljini:

$$\lambda \leq \frac{hc}{\chi_2} = 364.7 \text{ nm}$$

Svi fotoni s valnom duljinom kraćom od 364.7 nm imaju dovoljno energije za fotoionizaciju pobuđenog vodikovog atoma

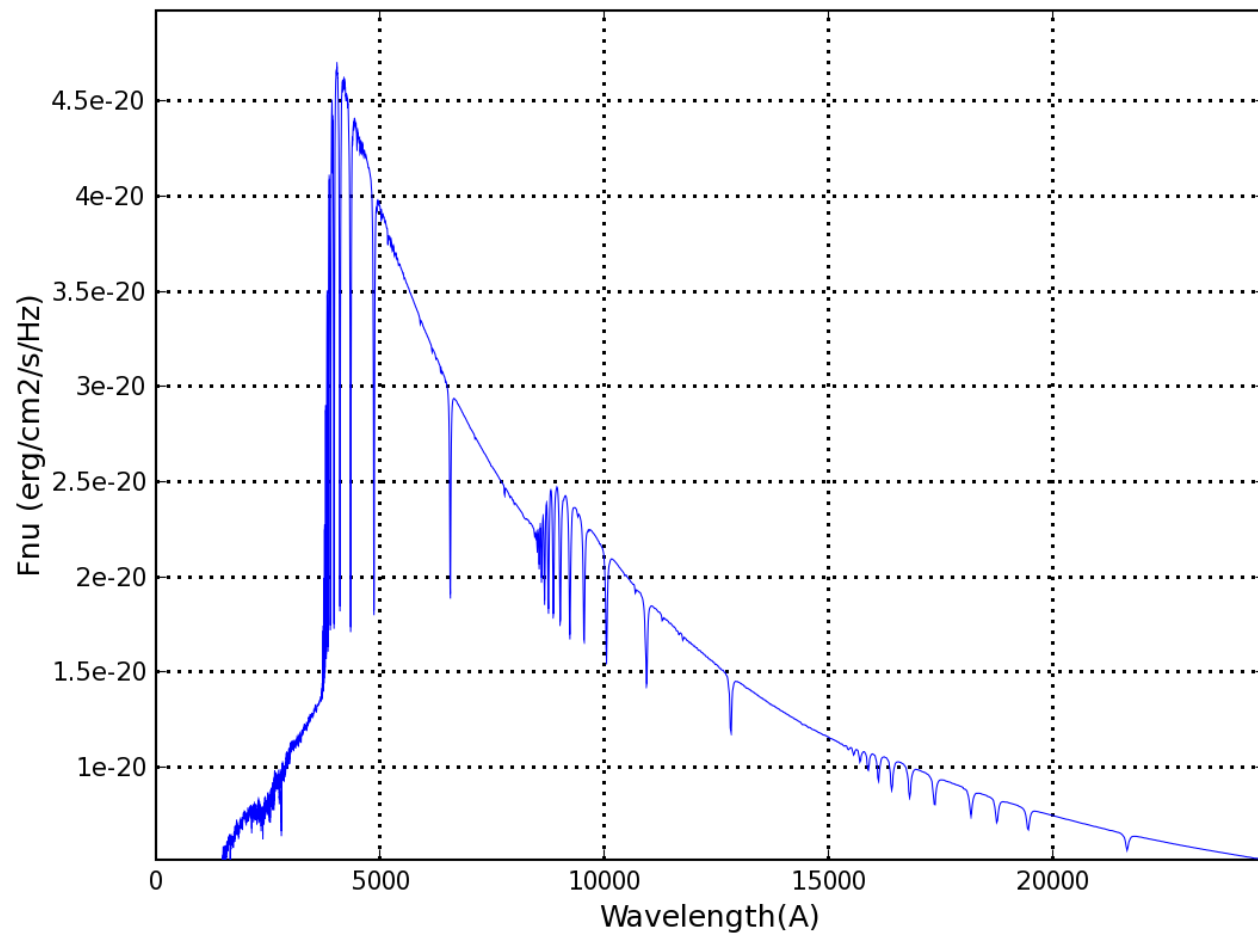
- **Opacitet** zvjezdanog materijala **naglo raste** na valnim duljinama $\lambda \leq 364.7 \text{ nm}$ zbog fotoionizacije vodika $\Rightarrow$ **tok zračenja naglo pada**
- **Balmerov skok** $\Rightarrow$ nagli pad intenziteta zračenja u spektru zvijezda uslijed fotoionizacije vodika
- Balmerov skok ovisi o udjelu vodikovih atoma u prvom pobuđenom stanju $\Rightarrow$ **ovisnost o temperaturi** (Boltzmannova jednadžba)
- Veličina Balmerovog skoka koristi se za **određivanje atmosferske temperature** (posebno u vrućim zvijezdama)
- Balmerov skok točno na sredini U pojasa $\Rightarrow$ smanjuje sjaj i povećava magnitudu u U pojasu i indeks boje $U - B \Rightarrow$ efekt je najveći na temperaturi od 9600 K kada je udio pobuđenih vodikovih atoma najveći (zvijezde A0 spektralnog tipa)

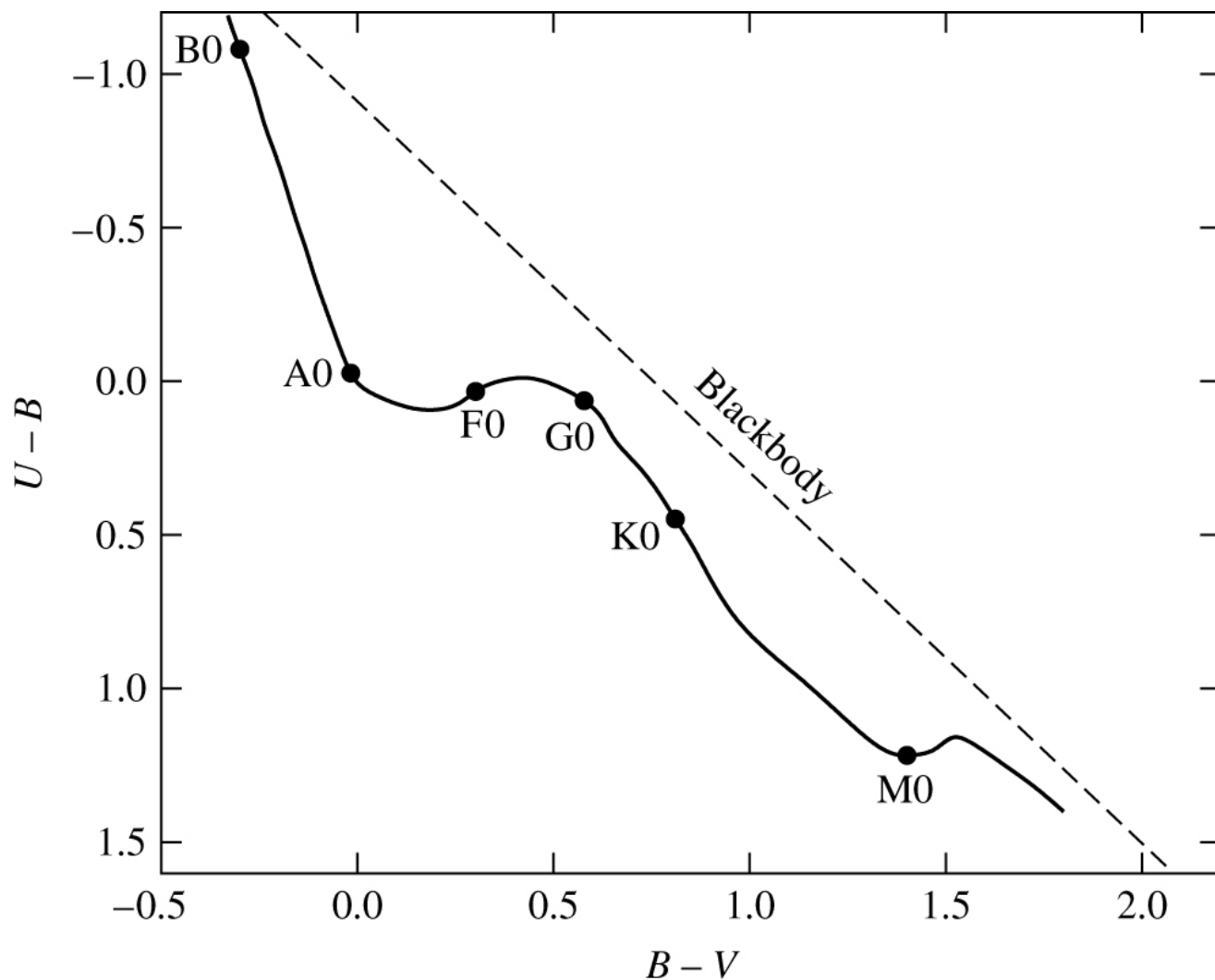
Sunčev spektar – G2V



Aller, 1991, *'Atoms, Stars and Nebulae'*, Cambridge University Press, New York

Vega Spectrum





Indeks boja najviše se razlikuje od crnog tijela upravo za A0 tip

Dodatni efekt prekrivanja metalnih linija povećava indeks boje $B-V$

Kontinuirani opacitet i H^- ion

H^- ion je vodikov ion na koji je slabo vezan dodatni elektron

Glavni izvor kontinuiranog opaciteta u atmosferama zvijezda spektralnog tipa kasnijeg od F0 je fotoionizacija H^- iona

- Drugi elektron se može slabo vezati za vodikov atom uslijed **zasjenjenja** prvog elektrona **jezgrom**
- Drugi elektron je bliže jezgri nego prvom elektronu $\Rightarrow$ Coulombova privlačna sila

Energija vezanja H^- iona je vrlo mala $\Rightarrow$ **samo 0.754 eV**

Energija ionizacije vodikovog atoma u osnovnom stanju je puno veća $\Rightarrow$ 13.6 eV

Svi fotoni s energijom većom od 0.754 eV mogu ionizirati H⁻ ion!!

- Uхват elektrona vodikovim atomom vodi do formiranja H⁻ iona i emisije fotona s energijom koja odgovara energiji vezanja iona i kinetičkoj energiji elektrona prije vezanja



0.754 eV odgovara valnoj duljini od 1640 nm $\Rightarrow$ svi fotoni s valnom duljinom kraćom od 1640 nm mogu ionizirati H⁻ ion (vezano-slobodni opacitet)

- H⁻ ion doprinosi slobodno-slobodnom opacitetu pri većim valnim duljinama

H⁻ ioni su važan izvor kontinuiranog opaciteta za zvijezde hladnije od spektralnog tipa F0

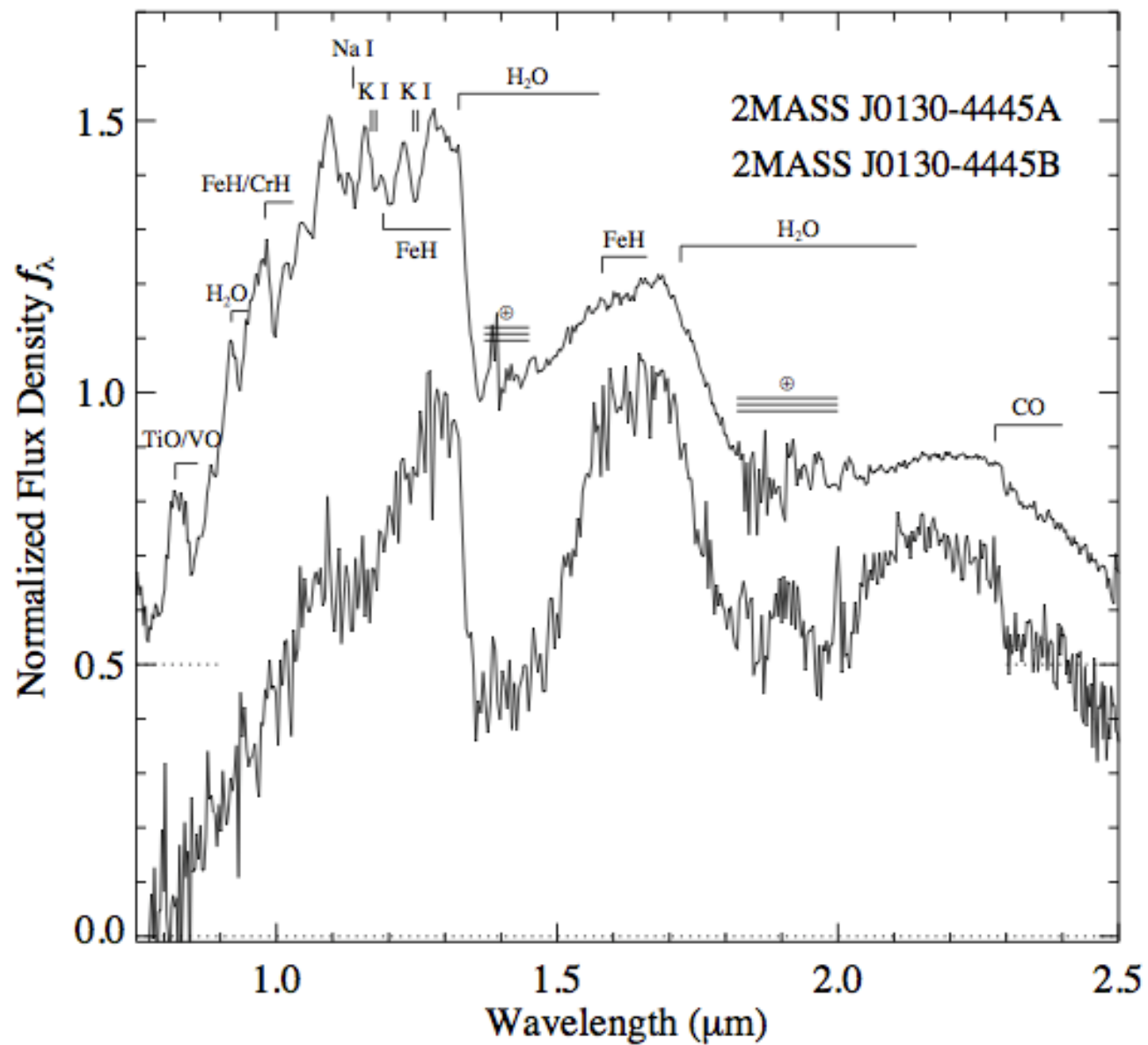
- Pri višim temperaturama, H⁻ ion postaje sve više ioniziran i ne doprinosi kontinuiranom opacitetu

Zvijezde toplije od spektralnog tipa F0:

- Zvijezde **A i B spektralnog tipa** $\Rightarrow$ glavni izvori kontinuiranog opaciteta su **fotoionizacija** vodikovog atoma i **slobodno-slobodna apsorpcija**
- Zvijezde **O spektralnog tipa** $\Rightarrow$ glavni izvori kontinuiranog opaciteta su **elektronsko raspršenje** uslijed ionizacije vodika, a doprinosi i fotoionizacija helija

Zvijezde kasnog spektralnog tipa $\Rightarrow$ hladnije atmosfere:

- Tvorba molekula koje doprinose **vezano-vezanom i vezano-slobodnom opacitetu**
- Veliki broj diskretnih molekulskih apsorpcijskih linija $\Rightarrow$ **molekulske apsorpcijske vrpce**
- **Fotodisocijacija** $\Rightarrow$ disocijacija molekula i kidanje molekulskih veza uslijed apsorpcije fotona $\Rightarrow$ važno u planetarnim atmosferama



Ukupni opacitet zvjezdane atmosfere je suma pojedinačnih doprinosa:

$$\kappa_{\lambda} = \kappa_{\lambda,bb} + \kappa_{\lambda,bf} + \kappa_{\lambda,ff} + \kappa_{es} + \kappa_{H^-}$$

- Ukupni opacitet ovisi o valnoj apsorbirane svjetlosti, sastavu, gustoći i temperaturi zvjezdanog materijala

Rosselandov srednji opacitet

Svein Rosseland (1924.)

- Opacitet usrednjen po valnim duljinama $\Rightarrow$ ovisi samo o svojstvima zvjezdanog materijala: gustoći, temperaturi i sastavu
- Rosselandov srednji opacitet je harmonička sredina i naglašava najniže vrijednosti opaciteta
- Uključuje i statističke težine u ovisnosti kako spektar crnog tijela ovisi o temperaturi

Rosselandov srednji opacitet:

$$\frac{1}{\bar{\kappa}} \equiv \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial \nu} d\nu}{\int_0^\infty \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial \nu} d\nu}$$

- Ne postoji jednostavna relacija koja može opisati sve kompleksne doprinose opacitetu vezano-vezanih prijelaza i individualnih spektralnih linija $\Rightarrow$ ne postoji analitički izraz za Rosselandov srednji opacitet
- Aproksimacija za **Rosselandove usrednjene opacitete vezano-slobodnih i slobodno-slobodnih prijelaza:**

$$\bar{\kappa}_{bf} = 4.34 \times 10^{21} \frac{g_{bf}}{t} Z(1 + X) \frac{\rho}{T^{3.5}} \text{ m}^2\text{kg}^{-1}$$

$$\bar{\kappa}_{ff} = 3.68 \times 10^{18} g_{ff}(1 - Z)(1 + X) \frac{\rho}{T^{3.5}} \text{ m}^2\text{kg}^{-1}$$

X i Y su maseni udjeli vodika i metala

- U sastavu zvijezde dominiraju vodik i helij (oko 99%) $\Rightarrow$ preostali elementi se nazivaju **metalima** $\Rightarrow$ govorimo o masenom udjelu metala

Maseni udio vodika:

$$X = \frac{\text{ukupna masa vodika}}{\text{ukupna masa plina}}$$

Maseni udio helija:

$$Y = \frac{\text{ukupna masa helija}}{\text{ukupna masa plina}}$$

Maseni udio metala:

$$Z = \frac{\text{ukupna masa metala}}{\text{ukupna masa plina}}$$

$$X + Y + Z = 1$$

Gaunt faktori g_{bf} i g_{ff} (J. A. Gaunt) $\Rightarrow$ kvantno-mehaničke korekcije ≈ 1 za optičko i UV područje zvjezdanih atmosfera

Giljotin faktor $t \Rightarrow$ opisuje prestanak doprinosa atoma opacitetu nakon što je ioniziran $\Rightarrow$ od 1 do 100

Kramersov zakon za opacitet (H. A. Kramers, 1923.):

Srednji opaciteti za vezano-slobodne i slobodno-slobodne prijelaze imaju oblik:

$$\bar{\kappa} = \kappa_0 \frac{\rho}{T^{3.5}}$$

κ_0 je aproksimativno konstantan za dani sastav zvijezde

- Prema Kramersovom zakonu $\Rightarrow$ srednji opacitet (neprozirnost atmosfere) **raste s gustoćom i opada s potencijom temperature!**

Rosselandov srednji opacitet za elektronsko raspršenje koje je neovisno o valnoj duljini:

$$\bar{\kappa}_{es} = 0.02(1 + X) \text{ m}^2\text{kg}^{-1}$$

Aproksimacija **Rosselandovog srednjeg opaciteta H⁻iona:**

$$\bar{\kappa}_{H^-} \approx 7.9 \times 10^{-34} (Z/0.02) \rho^{1/2} T^9 \text{ m}^2 \text{kg}^{-1}$$

- Gornja relacija vrijedi za temperature $3000 \text{ K} \leq T \leq 6000 \text{ K}$ i gustoće $10^{-7} \text{ kgm}^{-3} \leq \rho \leq 10^{-2} \text{ kgm}^{-3}$ za sastav $X \sim 0.7$ i $0.001 < Z < 0.03$ (tipičan sastav zvijezda glavnog niza)

Ukupan Rosselandov srednji opacitet je srednja vrijednost sume pojedinačnih doprinosa opacitetu:

$$\bar{\kappa} = \overline{\kappa_{bb} + \kappa_{bf} + \kappa_{ff} + \kappa_{es} + \kappa_{H^-}}$$

Aproksimacija **Rosselandovog srednjeg opaciteta H⁻iona:**

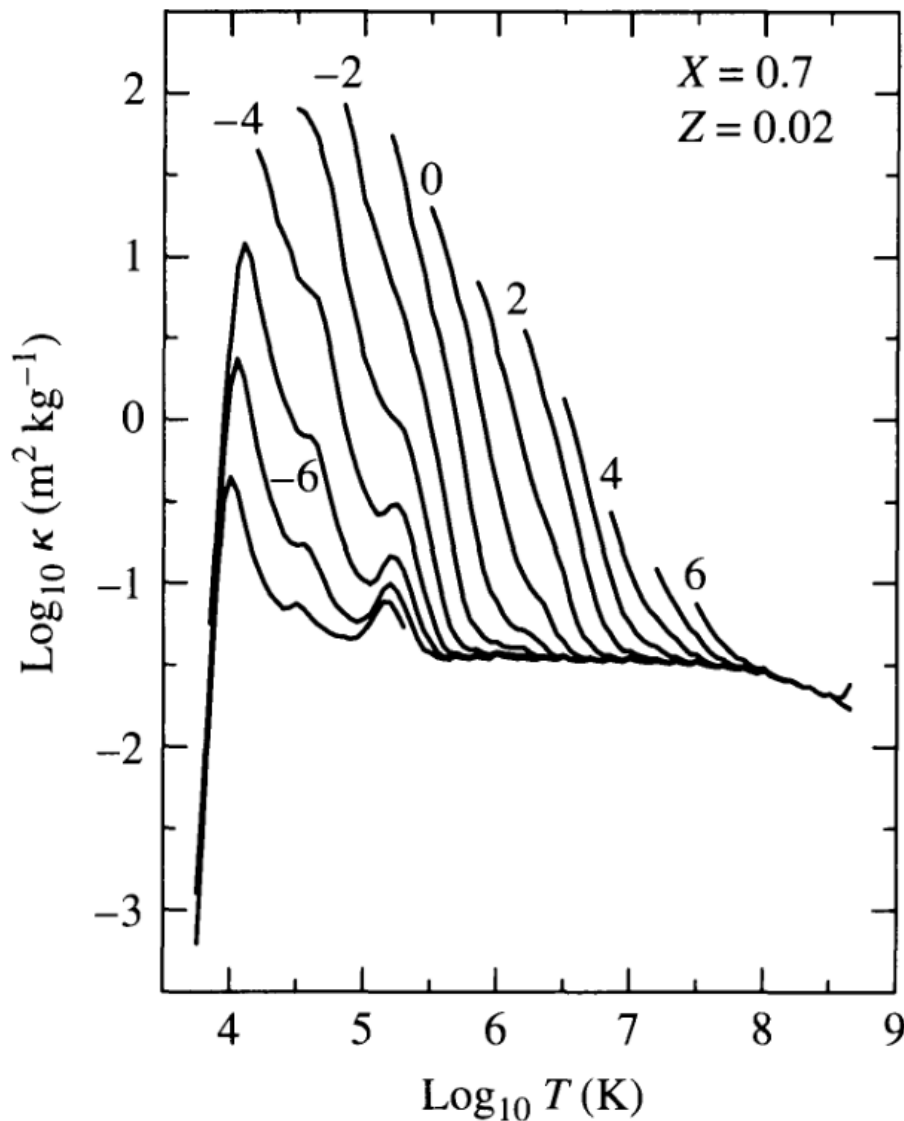
$$\bar{\kappa}_{H^-} \approx 7.9 \times 10^{-34} (Z/0.02) \rho^{1/2} T^9 \text{ m}^2 \text{kg}^{-1}$$

- Gornja relacija vrijedi za temperature $3000 \text{ K} \leq T \leq 6000 \text{ K}$ i gustoće $10^{-7} \text{ kgm}^{-3} \leq \rho \leq 10^{-2} \text{ kgm}^{-3}$ za sastav $X \sim 0.7$ i $0.001 < Z < 0.03$ (tipičan sastav zvijezda glavnog niza)

Ukupan Rosselandov srednji opacitet je srednja vrijednost sume pojedinačnih doprinosa opacitetu:

$$\bar{\kappa} = \overline{\kappa_{bb} + \kappa_{bf} + \kappa_{ff} + \kappa_{es} + \kappa_{H^-}}$$

Rosselandov srednji opacitet



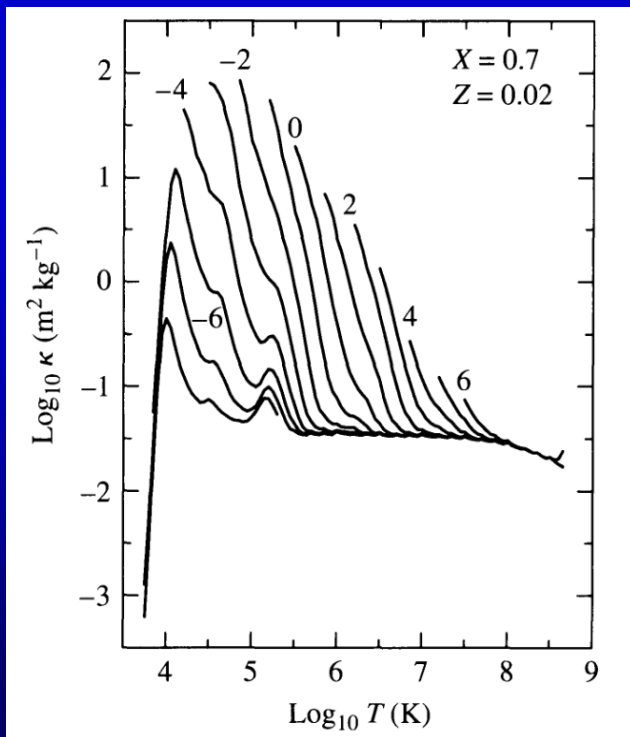
$$X = 0.7; \quad Z = 0.02$$

Kompjuterski izračun
uz detaljnu kvantnu
fiziku

Opacitet kao funkcija
temperature za
različite vrijednosti
gustoće

Iglesias & Rogers, 1996,
Astrophys. J., 464, 943

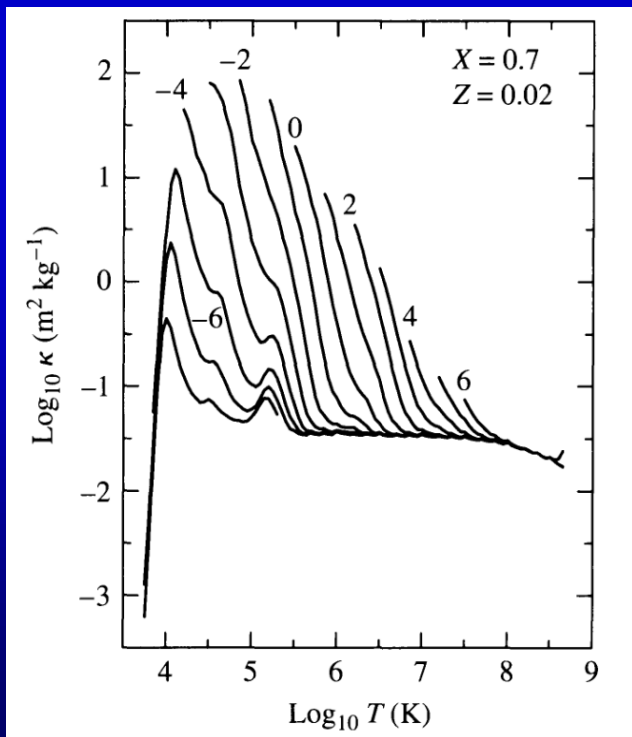
- **Opacitet raste s gustoćom** za konstantnu temperaturu
- Kod niskih gustoća, za temperature do $\approx 10000 \text{ K} \Rightarrow$
opacitet vrlo brzo raste s porastom temperature $\Rightarrow$
porast opaciteta je rezultat porasta broja elektrona uslijed
ionizacije atoma vodika i helija porastom temperature
 $\rightarrow$ područje parcijalne ionizacije vodika i neutralnog helija
ima temperaturu $\sim 10\,000 \text{ K}$



- Opadanje opaciteta nakon maksimuma slijedi Kramersov zakon $\bar{\kappa} \propto T^{-3.5} \Rightarrow$ opacitet potječe iz **vezano-slobodnih i slobodno-slobodnih prijelaza** (apsorpcije fotona)
- Pri temperaturi 40 000 K vidljiva je mala izbočina $\Rightarrow$ porast opaciteta uslijed porasta broja slobodnih elektrona zbog **ionizacije He II**

- Snažnija izbočina (porast opaciteta) na temperaturama iznad 10^5 K $\Rightarrow$ opacitet raste **uslijed ionizacije metala** (posebno željeza) i porasta broja slobodnih elektrona
- Gotovo **konstantni opacitet za visoke temperature** ovisno o gustoći plina $\Rightarrow$ dominira **elektronsko raspršenje** pri čemu je gotovo **sav zvjezdani materijal u ioniziranom stanju** $\rightarrow$ elektronsko raspršenje je

konstantno i ne ovisi o temperaturi i gustoći



PRIJENOS ZRAČENJA

- Zvijezda u **ravnoteži** $\Rightarrow$ ukupna energija svakog sloja atmosfere zvijezde ili unutrašnjosti **ne mijenja se u vremenu** $\Rightarrow$ procesi apsorpcije i emisije energije moraju biti uravnoteženi
- **Pulsirajuća zvijezda** $\Rightarrow$ postoji pozitivan (gubitak energije) i negativan (nagomilavanje energije) tok energije kroz slojeve zvjezdane atmosfere $\Rightarrow$ apsorpcija energije u vanjskim slojevima atmosfere vodi do oscilacija

EMISIJA $\Rightarrow$ procesi koji povećavaju broj fotona u promatranoj zruci svjetlosti:

1. Raspršenje fotona u zraku
2. Prava emisija fotona uslijed elektronskih prijelaza u atomu

- Svaki od prethodno navedenih izvora opaciteta može biti i izvor emisije u suprotnom procesu:
 1. Vezano-vezana emisija
 2. Slobodno-vezana emisija
 3. Slobodno-slobodna emisija (bremsstrahlung)
 4. Elektronsko raspršenje
- Tok fotona kroz zvijezdu **nije pravocrtan** $\Rightarrow$ niz procesa emisije i apsorpcije kroz koje se fotoni stvaraju i nestaju te raspršuju u i van zrake
- Prolazak fotona kroz zvijezdu $\Rightarrow$ foton putuje neometan na udaljenosti koja odgovara srednjem slobodnom putu fotona
- Srednji broj N raspršenja (koraka) fotona na nekom putu prije napuštanja površine zvijezde odgovara optičkoj dubini:

$$N = \tau_{\lambda}^2$$

- Kada je optička dubina $\tau_\lambda \approx 1 \Rightarrow$ foton doživljava zadnje raspršenje i može **slobodno napustiti** površinu zvijezde
- Atmosfera zvijezde iz koje foton valne duljine λ može neraspršen izaći s površine zvijezde nalazi se na dubini koja odgovara optičkoj dubini $\tau_\lambda = 2/3$
- **Gledajući zvijezdu pod bilo kojim putem, vidimo sloj atmosfere koji se nalazi na optičkoj dubini $\tau_\lambda = 2/3$ mjereno uzduž doglednice**
 $\Rightarrow$ **fotosfera zvijezde je sloj zvjezdane atmosfere u kojem nastaje vidljiva svjetlost i koja se nalazi na optičkoj dubini $\tau_\lambda \approx 2/3$**

Optička dubina:

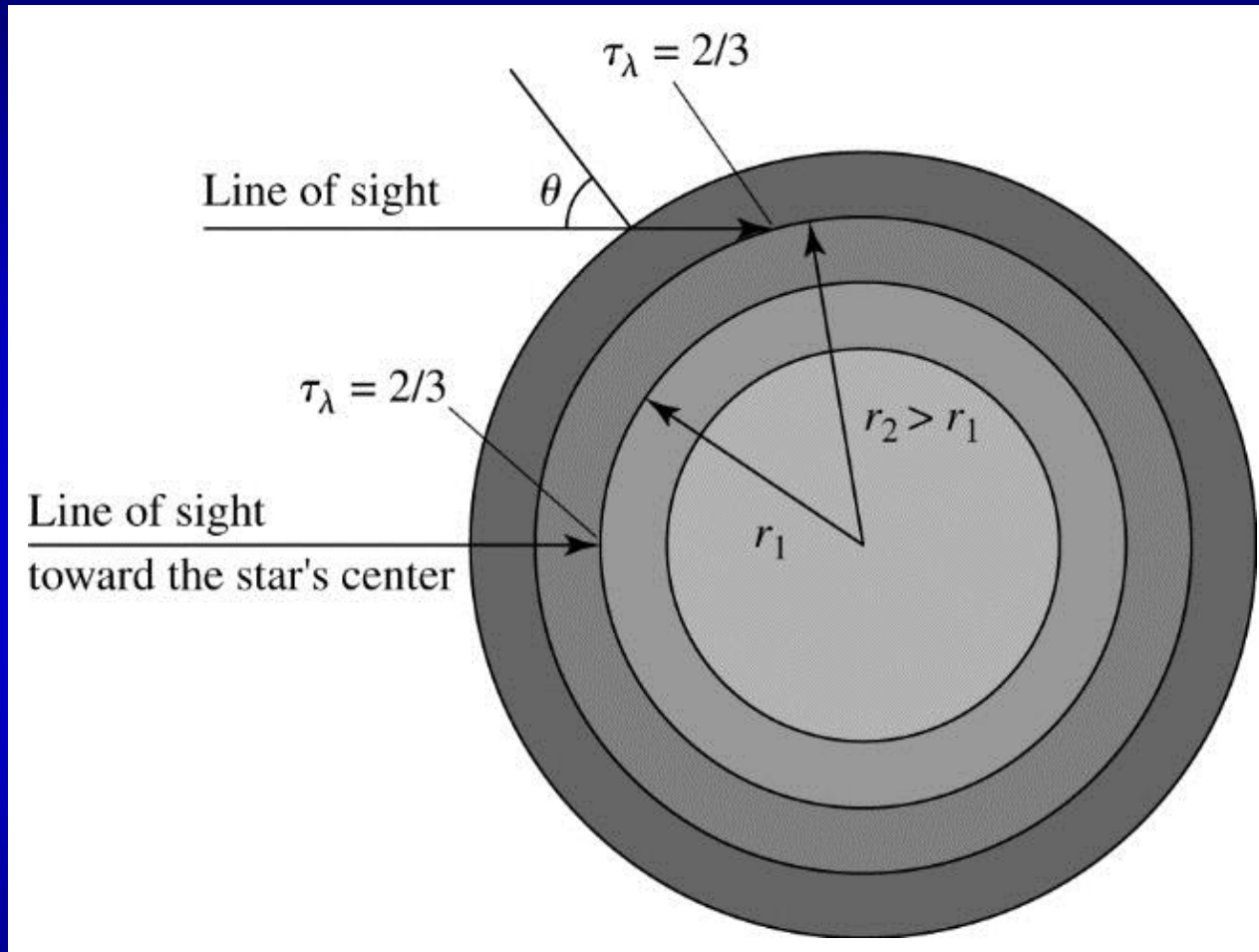
$$\tau_{\lambda} = \int_0^s \kappa_{\lambda} \rho \, ds$$

- ako je koeficijent apsorpcije κ_{λ} znatno povećan za neku valnu duljinu $\Rightarrow$ udaljenost (dubina u zvjezdanoj atmosferi) uzduž zrake svjetlosti na kojoj je optička dubina $\tau_{\lambda} = 2/3$ i na kojoj nastaju fotoni koje opažamo je **puno manja** nego za valne duljine pri kojima je koeficijent apsorpcije manji
- Na valnim duljinama pri kojim je opacitet veći (u spektralnim linijama), moguće je vidjeti pliće u atmosferu zvijezde
- Ako temperatura zvjezdane atmosfere opada prema van $\Rightarrow$ na valnim duljinama pri kojima je **opacitet veći** opažamo **plića područja atmosfere niže temperature** $\rightarrow$ takva područja daju **niži intenzitet** zračenja $\Rightarrow$ **nastanak apsorpcijskih linija**

**Zaključak $\Rightarrow$ temperatura u atmosferi mora opadati
prema van za nastanak apsorpcijskih linija**

Tamnjenje ruba (limb darkening)

- Posljedica opažanja fotona koji pristižu iz područja s optičkom dubinom $\tau_\lambda = 2/3$
- Smjer doglednice prema Sunčevom disku je usmjeren okomito na Sunčevu površinu u blizini središta diska
- Smjer doglednice je usmjeren pod sve većim kutom u odnosu na okomicu na Sunčevu površinu kako se približavamo rubu diska
- Pri opažanju ruba diska, opažač ne može vidjeti toliko duboko u zvjezdanu atmosferu kao pri opažanju središta diska → opažač pri opažanju **ruba diska opaža plće slojeve** zvjezdane atmosfere na **nižoj temperaturi** → zbog niže temperature **intenzitet zračenja je niži** → **rub diska je tamniji od središta diska** → **TAMNJENJE RUBA**



Carroll, B.W., Ostlie, D.A., 2006, 'Introduction to Modern Astrophysics', Pearson

Gradijent tlaka zračenja

- Foton vrlo sporo 'putuje' prema površini zvijezde → veliki broj raspršenja, apsorpcija i emisija → gotovo nasumično gibanje u svim smjerovima s malom rezultatnom komponentom prema površini zvijezde
- Srednji slobodni put je manji od centimetra u unutrašnjosti zvijezde → fotoni su gotovo zarobljeni unutar malog volumena
- Temperatura u zvijezdi opada prema površini ⇒ tlak zračenja je manji na većim udaljenostima od središta zvijezde → za crno tijelo:

$$P_{\text{rad}} = \frac{4\sigma T^4}{3c} = \frac{1}{3}aT^4$$

- **Gradijent tlaka zračenja** uzrokuje malo rezultatno **gibanje fotona i tok zračenja prema površini**

Gradijent tlaka zračenja uzrokuje tok zračenja u smjeru suprotnom od gradijenta:

$$\frac{dP_{\text{rad}}}{dr} = -\frac{\bar{\kappa}\rho}{c} F_{\text{rad}}$$

- Prijenos energije zračenjem kroz zvijezdu ostvaruje se sporom difuzijom fotona prema površini uslijed male razlike u tlaku zračenja

JEDNADŽBA PRIJENOSA

- Detaljniji opis **toka zračenja** kroz zvjezdanu atmosferu $\Rightarrow$ postavljanje i rješavanje **osnovne jednadžbe prijenosa zračenja**

Koeficijent emisije

Emisija $\Rightarrow$ svi procesi koji povećavaju intenzitet zrake svjetlosti valne duljine λ koja putuje kroz plin u zvijezdi

Povećanje intenziteta dI_λ zrake proporcionalno je putu ds koji je zraka prešla kroz plin i gustoći ρ plina $\Rightarrow$ za čistu emisiju (bez raspršenja i apsorpcije):

$$dI_\lambda = j_\lambda \rho ds$$

Koeficijent emisije j_λ ovisi o valnoj duljini svjetlosti

- Specifični intenzitet zrake valne duljine λ mijenja se kako zraka prolazi kroz plin **uklanjanjem fotona** iz zrake u procesima **apsorpcije i raspršenja iz zrake** te **dodavanjem fotona** u zraku u procesima **emisije i raspršenja u zraku**
- Uzmemo li u obzir smanjenje intenziteta zrake uslijed apsorpcije i povećanje intenziteta uslijed emisije $\Rightarrow$ promjena specifičnog intenziteta zrake valne duljine λ :
$$dI_\lambda = -\kappa_\lambda \rho I_\lambda ds + j_\lambda \rho ds$$
- Omjer brzina kojom se odvijaju procesi apsorpcije i emisije pokazuje koliko se brzo mijenja intenzitet zrake
- Intenzitet zračenja se mijenja tako da poprima karakteristike okolnog plina (primjer: automobili na autocesti)

Funkcija izvora i jednažba prijenosa

- Atmosfera zvijezde $\Rightarrow$ konkurencija između brzine kojom se fotoni uklanjaju iz zrake u procesima apsorpcije i brzine kojom se fotoni obnavljaju u zraci u procesima emisije
- **Omjer brzina emisije i apsorpcije opisuje brzinu promjene intenziteta zrake i nastojanje da fotoni u zraci poprime svojstva lokalnog izvora fotona u okolnom plinu**

Iz jednažbe:

$$dI_\lambda = -\kappa_\lambda \rho I_\lambda ds + j_\lambda \rho ds$$

dobijemo:

$$-\frac{1}{\kappa_\lambda \rho} \frac{dI_\lambda}{ds} = I_\lambda - \frac{j_\lambda}{\kappa_\lambda}$$

Funkcija izvora S_λ je omjer koeficijenata apsorpcije i emisije:

$$S_\lambda \equiv \frac{j_\lambda}{\kappa_\lambda}$$

- Funkcija izvora opisuje kako se fotoni u zraci uklanjaju i zamjenjuju fotonima iz okolnog plina
- Funkcija izvora je manje ovisna o svojstvima plina nego pojedinačni koeficijenti emisije i apsorpcije
- Funkcija izvora ima istu jedinicu kao i intenzitet $\Rightarrow$ $\text{W m}^{-3} \text{ sr}^{-1}$

Jednadžba prijenosa zračenja:

$$-\frac{1}{\kappa_\lambda \rho} \frac{dI_\lambda}{ds} = I_\lambda - S_\lambda$$

- Ako se intenzitet zrake ne mijenja ($dI_\lambda/ds = 0$) $\Rightarrow$ intenzitet je jednak funkciji izvora: $I_\lambda = S_\lambda$

Funkcija izvora S_λ je omjer koeficijenata apsorpcije i emisije:

$$S_\lambda \equiv \frac{j_\lambda}{\kappa_\lambda}$$

- Funkcija izvora opisuje kako se fotoni u zraci uklanjaju i zamjenjuju fotonima iz okolnog plina
- Funkcija izvora je manje ovisna o svojstvima plina nego pojedinačni koeficijenti emisije i apsorpcije
- Funkcija izvora ima istu jedinicu kao i intenzitet $\Rightarrow$ $\text{W m}^{-3} \text{ sr}^{-1}$

Jednadžba prijenosa zračenja:

$$-\frac{1}{\kappa_\lambda \rho} \frac{dI_\lambda}{ds} = I_\lambda - S_\lambda$$

- Ako se intenzitet zrake **ne mijenja**: $\frac{dI_\lambda}{ds} = 0 \Rightarrow$ intenzitet je **jednak** funkciji izvora: $I_\lambda = S_\lambda$

$$-\frac{1}{\kappa_{\lambda}\rho} \frac{dI_{\lambda}}{ds} = I_{\lambda} - S_{\lambda}$$

- Ako je intenzitet zrake **veći** od funkcije izvora zračenja:
 $I_{\lambda} > S_{\lambda} \Rightarrow$ intenzitet **opada** s udaljenosti jer je $\frac{dI_{\lambda}}{ds} < 0$
- Ako je intenzitet zrake **manji** od funkcije izvora zračenja:
 $I_{\lambda} < S_{\lambda} \Rightarrow$ intenzitet **raste** s udaljenosti jer je $\frac{dI_{\lambda}}{ds} > 0$

Intenzitet zrake nastoji poprimiti lokalnu vrijednost funkcije izvora, iako se funkcija izvora može toliko brzo mijenjati s udaljenošću da se to nikada ne dogodi.

Zračenje crnog tijela

- Promatrajmo neki volumen optički debelog plina na konstantnoj temperaturi T
- Čestice plina i zračenje su u takvom volumenu u termodinamičkoj ravnoteži $\Rightarrow$ nema resultantnog toka energije kroz volumen ili između čestica plina i fotona
- Termodinamička ravnoteža $\Rightarrow$ svi procesi apsorpcije su uravnoteženi emisijom
- Intenzitet zračenja je opisan Planckovom funkcijom:
$$I_\lambda = B_\lambda$$
- Intenzitet je konstantan unutar promatranog volumena:
$$\frac{dI_\lambda}{ds} = 0 \quad \Rightarrow \quad I_\lambda = S_\lambda$$

Funkcija izvora jednaka je Planckovoj funkciji u plinu u termodinamičkoj ravnoteži:

$$S_\lambda = B_\lambda$$

- Zvijezda ne može biti u termodinamičkoj ravnoteži $\Rightarrow$ postoji tok energije iz središta prema površini
- Duboko u atmosferi zvijezde foton se mnogostruko raspršuje prije nego što stigne do površine $\Rightarrow$ **srednji slobodni put** fotona je **mного manji** od **temperaturne visinske skale** $\Rightarrow$ foton je ograničen u volumenu gotovo **konstantne temperature** $\Rightarrow$ **LOKALNA TERMODINAMIČKA RAVNOTEŽA (LTE)**

U uvjetima lokalne termodinamičke ravnoteže $\Rightarrow$

$$S_{\lambda} = B_{\lambda}$$

- Intenzitet zračenja ne mora biti jednak Planckovoj funkciji ($I_{\lambda} = B_{\lambda}$) u uvjetima lokalne termodinamičke ravnoteže osim ako optička dubina nije velika $\tau_{\lambda} \gg 1$

- $I_\lambda = B_\lambda$ znači da je intenzitet zračenja opisan Planckovom funkcijom
- $S_\lambda = B_\lambda$ opisuje fizički izvor zračenja (j_λ/κ_λ) koji daje zračenje crnog tijela

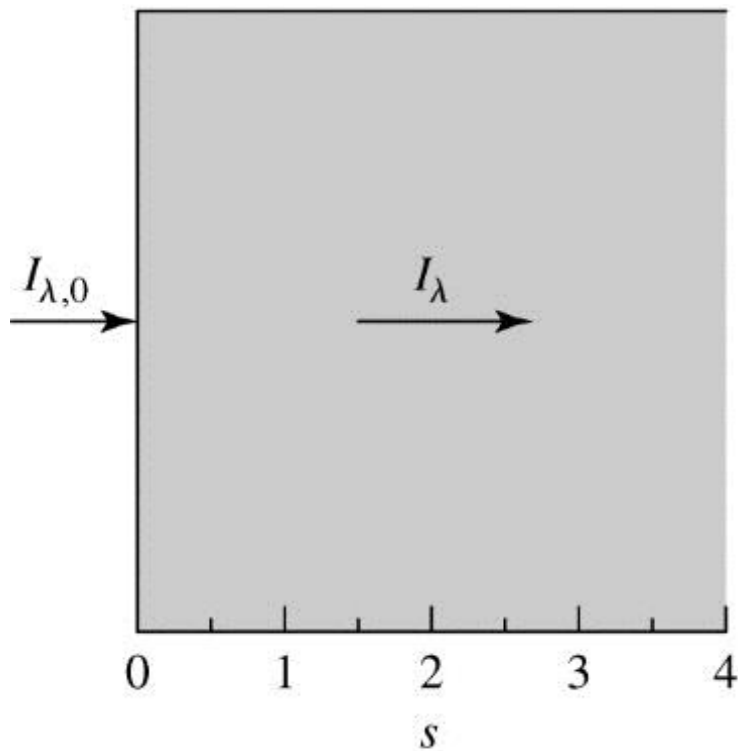
Primjer: Zraka svjetlosti početnog intenziteta $I_{\lambda,0}$ u $s = 0$ ulazi u volumen plina konstantne gustoće ρ , konstantnog opaciteta κ_λ i konstantne funkcije izvora S_λ .

Može se pokazati da se u tom slučaju jednačba prijenosa zračenja:

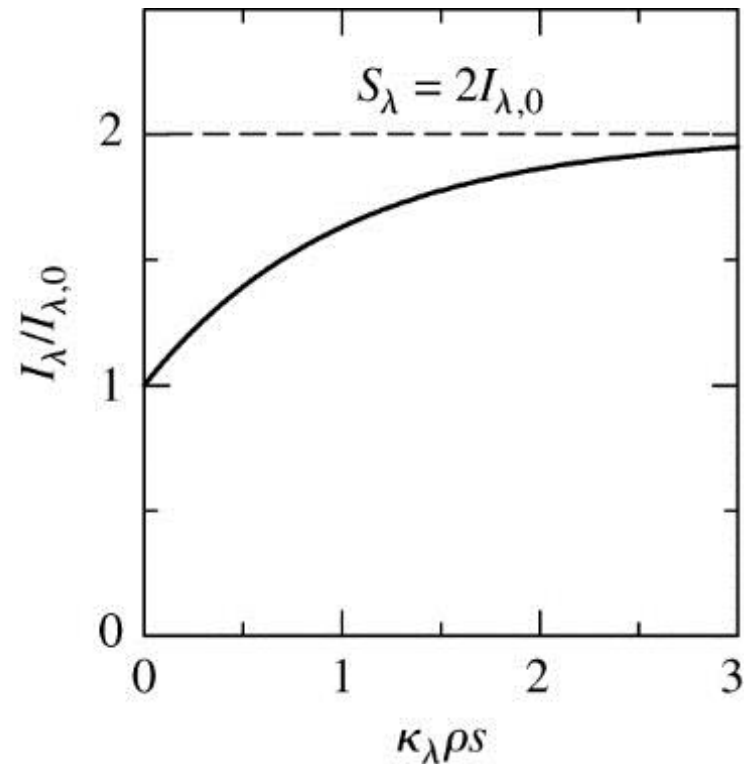
$$-\frac{1}{\kappa_\lambda \rho} \frac{dI_\lambda}{ds} = I_\lambda - S_\lambda$$

može riješiti kao:

$$I_\lambda(s) = I_{\lambda,0} e^{-\kappa_\lambda \rho s} + S_\lambda (1 - e^{-\kappa_\lambda \rho s})$$



(a)



(b)

U gornjem je slučaju uzeto $S_{\lambda} = 2I_{\lambda}$

- Rješenje prikazuje promjenu intenziteta zrake od početne vrijednosti $I_{\lambda,0}$ do vrijednosti funkcije izvora S_{λ}
- Karakteristična udaljenost na kojoj se ta promjena događa iznosi $s = 1/\kappa_{\lambda}\rho$, odnosno jedan srednji slobodni put fotona ili jedna optička dubina u plinu

Planparalelna atmosfera

- Jednadžba prijenosa zračenja složena je za rješavanje $\Rightarrow$ intenzitet zračenja **mora ovisiti o smjeru** kako bi postojao rezultantni tok energije prema površini
- Funkcija izvora, koeficijenti apsorpcije i emisije neovisni su o smjeru, ALI koeficijenti apsorpcije i emisije ovise o **temperaturi i gustoći**
- Određivanje fizikalnih svojstava atmosfere zvijezde: temperatura i gustoća $\Rightarrow$ nužno je poznavati mjesto (dubinu) na kojem nastaju spektralne linije
- Razvijen je niz metoda za rješavanje jednadžbe prijenosa zračenja kako bi se problem **pojednostavio**

Iz optičke dubine:

$$d\tau_\lambda = -\kappa_\lambda \rho ds$$

i jednađbe prijenosa zračenja:

$$-\frac{1}{\kappa_{\lambda}\rho} \frac{dI_{\lambda}}{ds} = I_{\lambda} - S_{\lambda}$$

dobijemo:

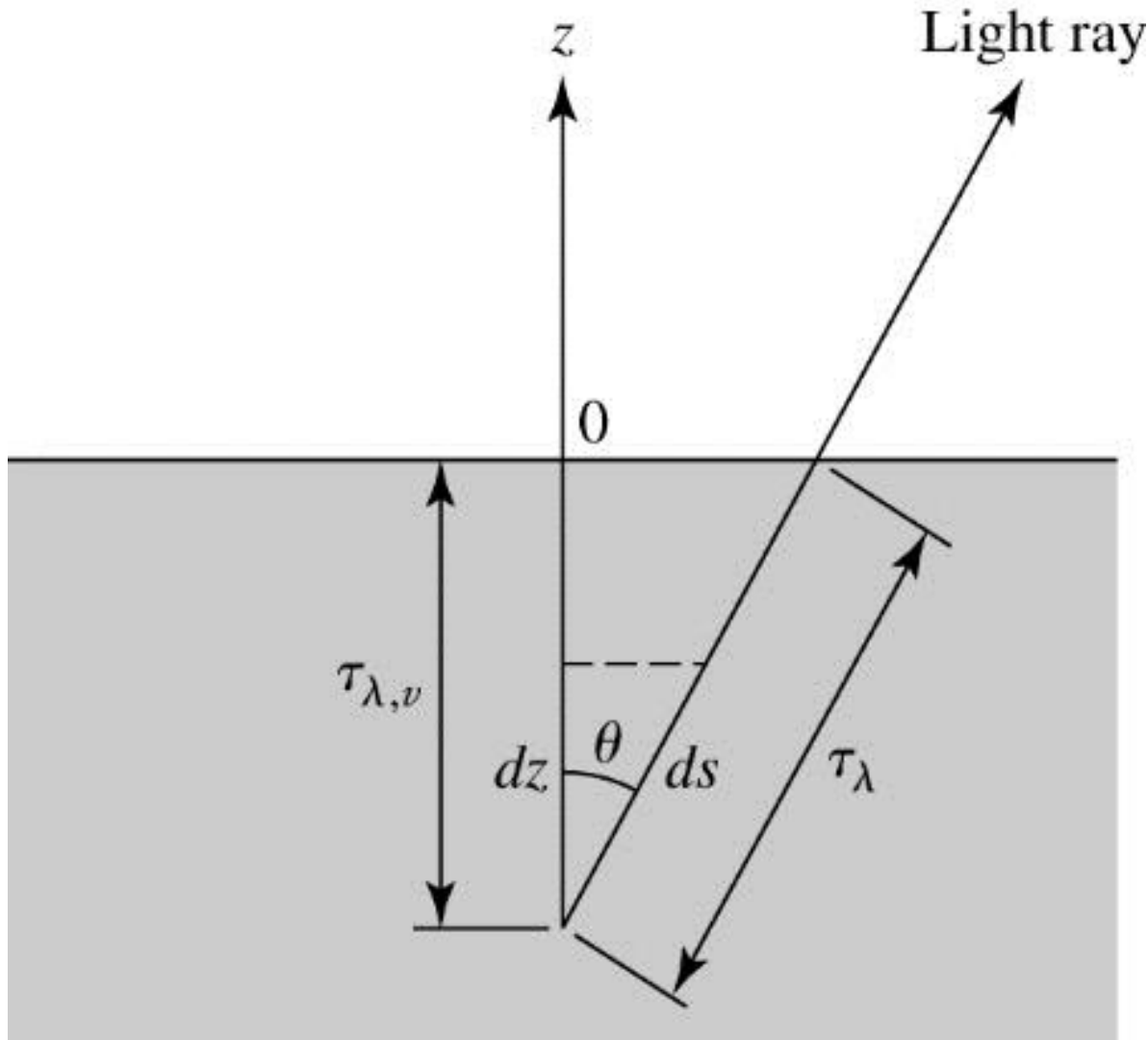
$$\frac{dI_{\lambda}}{d\tau_{\lambda}} = I_{\lambda} - S_{\lambda}$$

- Optička dubina se mjeri uzduž puta zrake $\Rightarrow$ optička dubina i udaljenost s ne odgovaraju jedinstvenom geometrijskoj dubini u atmosferi, već ovise o smjeru zrake $\Rightarrow$ optičku dubinu je potrebno **zamijeniti veličinom koja je određena položajem**
- Atmosfera zvijezde oko glavnog niza je **tanka** u odnosu na cijelu zvijezdu $\Rightarrow$ polumjer zakrivljenosti atmosfere puno je veći od debljine atmosfere $\Rightarrow$ sloj atmosfere možemo promatrati kao **planparalelni sloj**
- **Prva aproksimacija: slojevi atmosfere zvijezde tretiraju se kao planparalelni slojevi**

Planparalelna atmosfera

$z = 0$ na vrhu atmosfere

z je u smjeru okomitom na površinu atmosfere



Vertikalna optička dubina (definicija):

$$\tau_{\lambda,v}(z) \equiv \int_z^0 \kappa_{\lambda} \rho dz$$

- Usporedimo s relacijom $\tau_{\lambda} = \int_0^s \kappa_{\lambda} \rho ds \Rightarrow$ gornja relacija pokazuje da je $\tau_{\lambda,v}$ početna optička dubina zrake koja putuje vertikalno prema gore iz početnog položaja ($z < 0$) do površine zvijezde ($z = 0$) gdje je $\tau_{\lambda,v} = 0$
- Zraka koja iz istog početnog položaja putuje prema površini pod nekim kutom $\theta \Rightarrow$ mora putovati kroz više materijala plina na dužem putu $\Rightarrow$ optički put τ_{λ} zrake koja putuje pod nekim kutom θ **VEĆI** je od vertikalnog optičkog puta $\tau_{\lambda,v}$ za istu dubinu u atmosferi ($z < 0$)
- Putevi dviju zraka (dz i ds) odnose se kao:

$$dz = ds \cos \theta$$

Optičke dubine dviju zraka odnose se kao:

$$\tau_{\lambda} = \frac{\tau_{\lambda,v}}{\cos \theta} = \tau_{\lambda,v} \sec \theta$$

- Možemo vidjeti da vertikalna optička dubina **jedinstveno** određuje geometrijsku dubinu $z \Rightarrow$ njezina vrijednost ne ovisi o smjeru kojim zraka putuje $\Rightarrow$ vertikalna optička dubina je **vertikalna koordinata položaja** $\Rightarrow$ koordinata položaja u jednadžbi prijenosa zračenja

Jednadžba prijenosa zračenja poprima oblik (**planparalelna atmosfera**):

$$\cos \theta \frac{dI_{\lambda}}{d\tau_{\lambda,v}} = I_{\lambda} - S_{\lambda}$$

- Vertikalna optička dubina je ovisna o valnoj duljini $\Rightarrow$ **pretpostavimo da vertikalna optička dubina ne ovisi o valnoj duljini** (može se uzeti Rosselandov usrednjeni opacitet za određivanje vertikalne optičke dubine)

SIVA ATMOSFERA: model zvjezdane atmosfere u kojem opacitet i vertikalna optička dubina **ne ovise o valnoj duljini**

- Umjesto opaciteta κ_λ uzimamo usrednjeni opacitet $\bar{\kappa} \Rightarrow$ vertikalna optička dubina ne ovisi o valnoj duljini $\Rightarrow$ umjesto $\tau_{\lambda,v}$ uzimamo τ_v
- Ostale ovisnosti fizikalnih veličina u jednadžbi prijenosa o valnoj duljini mogu se ukloniti integriranjem po svim valnim duljinama:

$$I = \int_0^\infty I_\lambda d\lambda; \quad S = \int_0^\infty S_\lambda d\lambda$$

Jednadžba prijenosa zračenja **sive planparalelne atmosfere:**

$$\cos \theta \frac{dI}{d\tau_v} = I - S$$

Integriramo gornju jednadžbu za sivu planparalelnu atmosferu po svim prostornim kutovima:

$$\frac{d}{d\tau_v} \int I \cos \theta d\Omega = \int I d\Omega - S \int d\Omega$$

(Zadnji član proizlazi iz neovisnosti funkcije izvora o smjeru
 $\Rightarrow$ funkcija izvora ovisi samo o lokalnim uvjetima plina)

Iz definicije toka zračenja F_{rad} :

$$F_\lambda d\lambda = \int I_\lambda d\lambda \cos \theta d\Omega = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} I_\lambda d\lambda \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi$$

i definicije srednjeg intenziteta zračenja $\langle I \rangle$:

$$\langle I_\lambda \rangle \equiv \frac{1}{4\pi} \int I_\lambda d\Omega = \frac{1}{4\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} I_\lambda \sin \theta d\theta d\phi$$

integriranjem po svim valnim duljinama i uz $\int d\Omega = 4\pi$:

$$\frac{dF_{rad}}{d\tau_v} = 4\pi(\langle I \rangle - S)$$

Množenjem jednadžbe prijenosa za sivu planparalelnu atmosferu s $\cos \theta$ i integriranjem po svim valnim duljinama:

$$\frac{d}{d\tau_v} \int I \cos^2 \theta d\Omega = \int I \cos \theta d\Omega - S \int \cos \theta d\Omega$$

Integral na lijevoj strani je tok zračenja P_{rad} pomnožen s brzinom svjetlosti c :

$$P_{rad,\lambda} = \frac{1}{c} \int_{\text{sfera}} I_\lambda d\lambda \cos^2 \theta d\Omega$$

Prvi član na desnoj strani je ukupan tok zračenja. Integral u drugom članu na desnoj strani u sfernim koordinatama:

$$\int \cos \theta d\Omega = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi = 0$$

Konačno dobijemo:

$$\frac{dP_{rad}}{d\tau_v} = \frac{1}{c} F_{rad}$$

Može se pokazati (vidi vježbe) u sfernom koordinatnom sustavu s ishodištem u središtu zvijezde:

$$\frac{dP_{rad}}{dr} = -\frac{\bar{\kappa}\rho}{c} F_{rad}$$

Razlika (gradijent) u tlaku zračenja uzrokuje resultantni tok zračenja i energije u zvijezdi od središta prema površini $\Rightarrow$ nužno za određivanje temperaturne strukture u zvijezdi

- Procesi apsorpcije i emisije su u ravnoteži u zvjezdanoj atmosferi koja je u ravnoteži $\Rightarrow$ nema resultantnog toka energije $\Rightarrow$ u planparalelnoj atmosferi tok zračenja mora imati istu vrijednost na svakom nivou (dubini) atmosfere (uključujući površinu):

$$F_{rad} = \text{constant} = F_{surf} = \sigma T_e^4$$

Tok zračenja je konstantan: $dF_{rad}/d\tau_v = 0 \Rightarrow$ srednji intenzitet mora biti jednak funkciji izvora:

$$\langle I \rangle = S$$

Integriranjem jednačbe:

$$\frac{dP_{rad}}{d\tau_v} = \frac{1}{c} F_{rad}$$

Dobijemo tlak zračenja kao funkciju vertikalne optičke dubine:

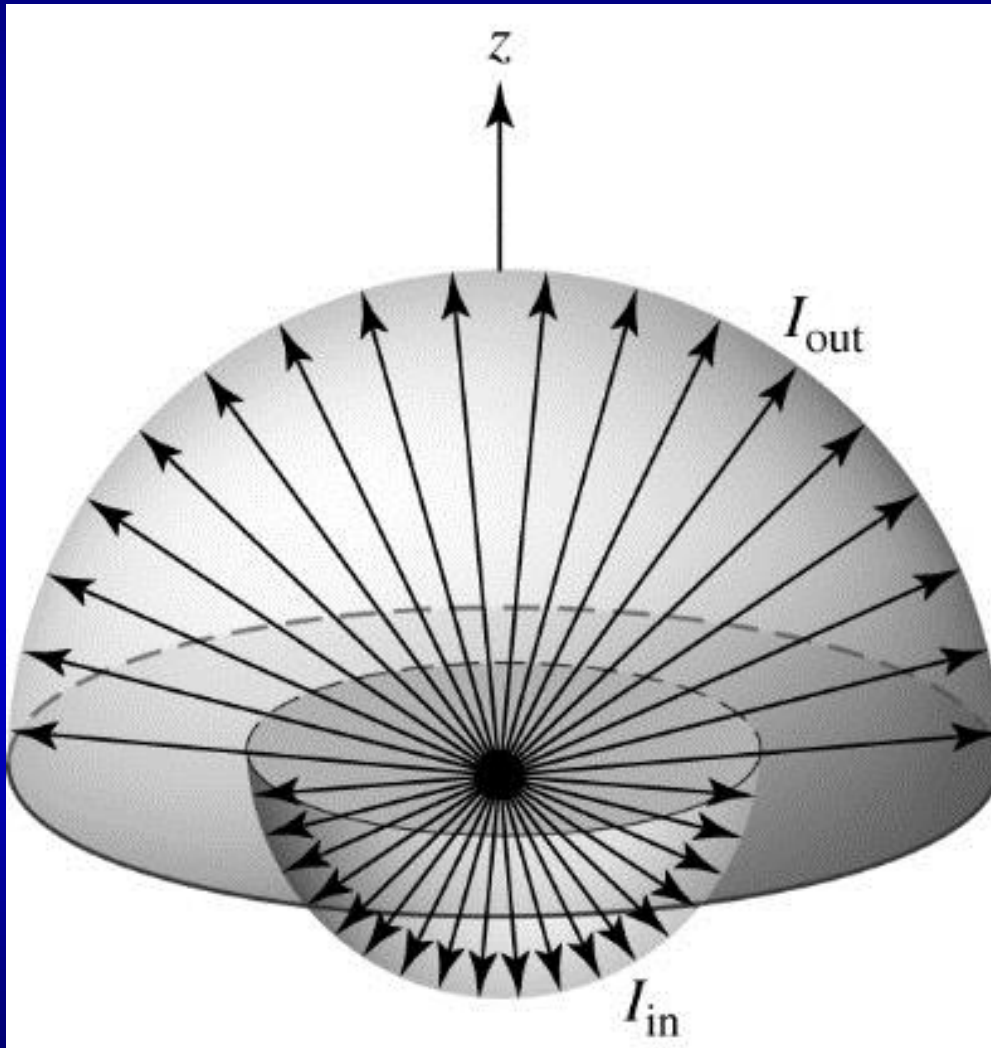
$$P_{rad} = \frac{1}{c} F_{rad} \tau_v + C$$

Eddingtonova aproksimacija

- Iz prethodne relacije moguće je odrediti **temperaturnu strukturu** sive planparalelne atmosfere ako poznajemo **ovisnost tlaka zračenja o temperaturi**

**Pretpostavljamo kutnu raspodjelu intenziteta $\Rightarrow$
Eddingtonova aproksimacija**

Sir Arthur Stanley Eddington (1882.-1944.)



$I_{out} \Rightarrow$ pretpostavljeni
intenzitet zračenja u
smjeru z osi (prema
van)

$I_{in} \Rightarrow$ pretpostavljeni
intenzitet zračenja u
smjeru $-z$ osi (prema
unutra)

I_{in} i I_{out} ovisni su o
dubini u atmosferi

$I_{in} = 0$ na vrhu
atmosfere gdje je $\tau_v = 0$

Eddingtonova aproksimacija za srednji intenzitet, tok i tlak zračenja:

$$\langle I \rangle = \frac{1}{2} (I_{out} + I_{in}) \quad (1)$$

$$F_{rad} = \pi (I_{out} - I_{in}) \quad (2)$$

$$P_{rad} = \frac{2\pi}{3c} (I_{out} + I_{in}) = \frac{4\pi}{3c} \langle I \rangle$$

$F_{rad} = \text{constant} \Rightarrow (I_{out} - I_{in}) = \text{constant}$ bilo gdje u atmosferi

Iz relacije:

$$P_{rad} = \frac{1}{c} F_{rad} \tau_v + C$$

dobijemo:

$$\frac{4\pi}{3c} \langle I \rangle = \frac{1}{c} F_{rad} \tau_v + C \quad (3)$$

Konstantu C dobijemo iz relacija (1) i (2) za vrh atmosfere gdje je $\tau_v = 0$ i $I_{in} = 0$:

$$\langle I(\tau_v = 0) \rangle = \frac{F_{rad}}{2\pi}$$

Uvrstimo gornju relaciju u (3) uz $\tau_v = 0$ (vrh atmosfere):

$$C = \frac{2}{3c} F_{rad}$$

Jednadžba (3) je sada:

$$\frac{4\pi}{3} \langle I \rangle = F_{rad} \left(\tau_v + \frac{2}{3} \right)$$

Tok zračenja je konstantan i zadan sa:

$$F_{rad} = \text{constant} = F_{surf} = \sigma T_e^4$$

Srednji intenzitet kao funkcija vertikalne optičke dubine postaje:

$$\langle I \rangle = \frac{3\sigma}{4\pi} T_e^4 \left(\tau_v + \frac{2}{3} \right) \quad (4)$$

Kako odrediti temperaturnu strukturu ovog modela atmosfere?

Pretpostavka: promatrani sloj atmosfere je u **lokalnoj termodinamičkoj ravnoteži**

- Funkcija izvora je u LTE jednaka Planckovoj funkciji $\Rightarrow$

$$S_{\lambda} = B_{\lambda}$$

Integriranjem Planckove funkcije po svim valnim duljinama u LTE dobijemo:

$$S = B = \frac{\sigma T^4}{\pi}$$

Za planparalelnu atmosferu (konstantni tok zračenja) vrijedi $\langle I \rangle = S \Rightarrow$

$$\langle I \rangle = \frac{\sigma T^4}{\pi} \quad (5)$$

Iz relacija (4) i (5) konačno dobijemo ovisnost temperature o vertikalnoj optičkoj dubini za **planparalelnu sivu atmosferu u Eddingtonovoj aproksimaciji**:

$$T^4 = \frac{3}{4} T_e^4 \left(\tau_v + \frac{2}{3} \right)$$

Detaljniji izvod za sivu planparalelnu atmosferu daje općenitiji izraz:

$$T^4 = \frac{3}{4} T_e^4 (\tau_v + q(\tau_v))$$

gdje je u Eddingtonovoj aproksimaciji

$$q(\tau_v) = \frac{2}{3}$$

- Važna jednačba koja pokazuje neka važna svojstva zvjezdane atmosfere
- Efektivnu temperaturu određujemo mjerenjem luminoziteta zvijezde iz Štefan-Boltzmannovog zakona:

$$T^4 = \frac{3}{4} T_e^4 \left(\tau_v + \frac{2}{3} \right)$$

- Efektivnu temperaturu određujemo mjerenjem ukupnog luminoziteta zvijezde iz Štefan-Boltzmannovog zakona:

$$L = S \sigma T_e^4$$
- Na gornji način možemo definirati 'površinu' zvijezde kao mjesto otkuda dolaze fotoni koji daju luminozitet zvijezde i na kojem je temperatura jednaka efektivnoj temperaturi T_e
- Na ovako definiranoj 'površini' zvijezde, temperatura je jednaka efektivnoj temperaturi $T = T_e$ kada je **optička dubina** $\tau_v = \frac{2}{3}$ **a ne** $\tau_v = 0$
- 'Površina' zvijezde nije na vrhu atmosfere gdje je $\tau_v = 0$

Promatrajući zvijezdu, opažamo sloj atmosfere koji se nalazi na optičkoj dubini $\tau_v \approx \frac{2}{3}$

Tamnjenje ruba

- Usporedba opaženog i teorijskog tamnjenja ruba $\Rightarrow$ ovisnost funkcije izvora o dubini atmosfere
- Rješavamo općenitije jednadžbu prijenosa zračenja:

$$\frac{dI_\lambda}{d\tau_\lambda} = I_\lambda - S_\lambda$$

$$\frac{dI_\lambda}{d\tau_\lambda} e^{-\tau_\lambda} - I_\lambda e^{-\tau_\lambda} = -S_\lambda e^{-\tau_\lambda}$$

$$\frac{d}{d\tau_\lambda} (e^{-\tau_\lambda} I_\lambda) = -S_\lambda e^{-\tau_\lambda}$$

$$d(e^{-\tau_\lambda} I_\lambda) = -S_\lambda e^{-\tau_\lambda} d\tau_\lambda$$

Integriramo gornju jednadžbu od početnog položaja zrake s optičkom dubinom $\tau_{\lambda,0}$ gdje je $I_\lambda = I_{\lambda,0}$ do vrha atmosfere gdje je $\tau_\lambda = 0$ i $I_\lambda = I_\lambda(0)$

- Intenzitet $I_\lambda(0)$ na vrhu atmosfere je:

$$I_\lambda(0) = I_{\lambda,0}e^{-\tau_{\lambda,0}} - \int_{\tau_{\lambda,0}}^0 S_\lambda e^{-\tau_\lambda}$$

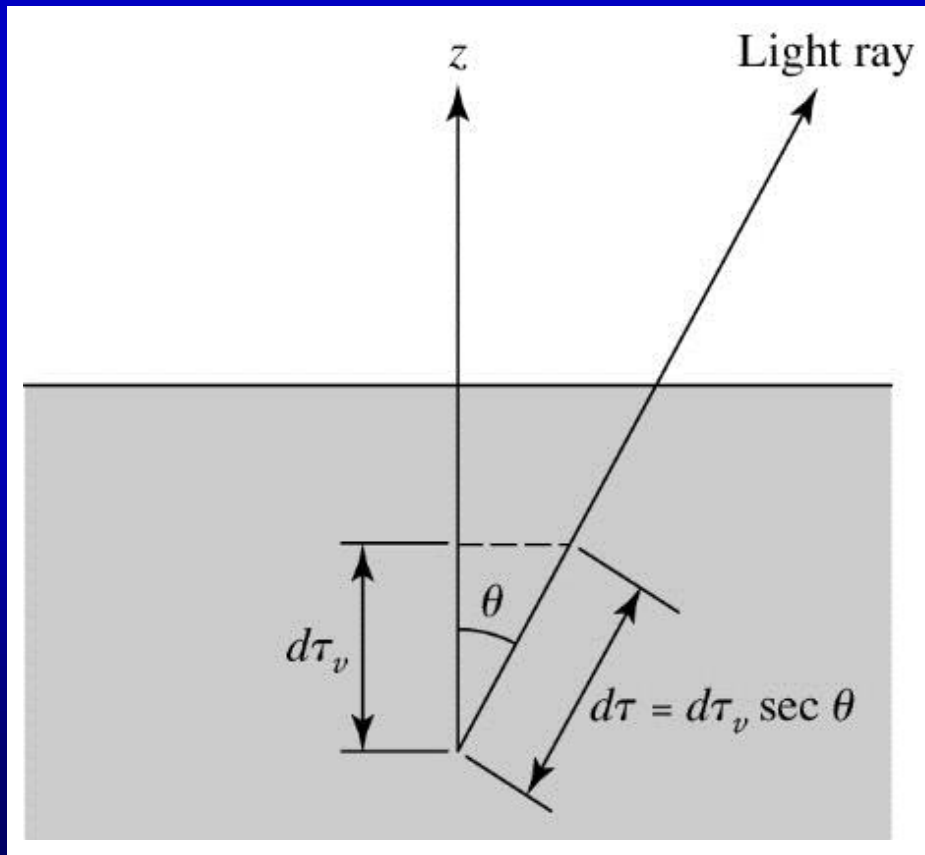
- Izlazni intenzitet s lijeve strane je suma dviju doprinosa:
 - prvi član s desne strane je početni intenzitet zrake umanjen (atenuiran) za apsorpciju na putu zrake do površine
 - drugi član s desne strane predstavlja emisiju u svakoj točki puta zrake umanjeno za apsorpciju između mjesta emisije i površine
 - drugi član je također pozitivan jer optička dubina opada u smjeru puta zrake $\Rightarrow d\tau_\lambda$ je negativan

Pretpostavka: planparalelna atmosfera s definicijom vertikalne optičke dubine

- **Nema pretpostavke sive atmosfere, LTE i Eddingtonove aproksimacije**

- Problem tamnjenja ruba svodi se na određivanje ovisnosti izlaznog intenziteta na vrhu atmosfere $I_\lambda(0)$ o kutu θ
- Potrebno je zamijeniti optičku dubinu s vertikalnom optičkom dubinom:

$$\tau_\lambda = \frac{\tau_{\lambda,v}}{\cos \theta} = \tau_{\lambda,v} \sec \theta$$



Carroll, B.W., Ostlie, D.A., 2006,
'Introduction to Modern
Astrophysics', Pearson

Izlazni intenzitet $I_\lambda(0)$ na vrhu atmosfere je sada:

$$I(0) = I_0 e^{-\tau_{v,0} \sec \theta} - \int_{\tau_{v,0} \sec \theta}^0 S \sec \theta e^{-\tau_v \sec \theta} d\tau_v$$

- Ovisnost o valnoj duljini je izostavljena radi jednostavnosti iako I i τ_v ovise o valnoj duljini (nema aproksimacije sive atmosfere)
- Potrebno je uključiti doprinose svih slojeva atmosfere u izlaznom intenzitetu $\Rightarrow$ uzimamo da je početni položaj zrake u $\tau_{v,0} = \infty \Rightarrow$ prvi član na desnoj strani nestaje:

$$I(0) = \int_0^\infty S \sec \theta e^{-\tau_v \sec \theta} d\tau_v$$

- Gornju jednadžbu možemo integrirati kako bi odredili izlazni intenzitet kao funkciju smjera zrake $\Rightarrow$ moramo poznavati **ovisnost funkcije izvora o vertikalnoj optičkoj dubini** $S = S(\tau_v)$

- Možemo pretpostaviti kako funkcija izvora ovisi o vertikalnoj optičkoj dubini $\Rightarrow$ linearna ovisnost:

$$S = a + b\tau_v \quad (6)$$

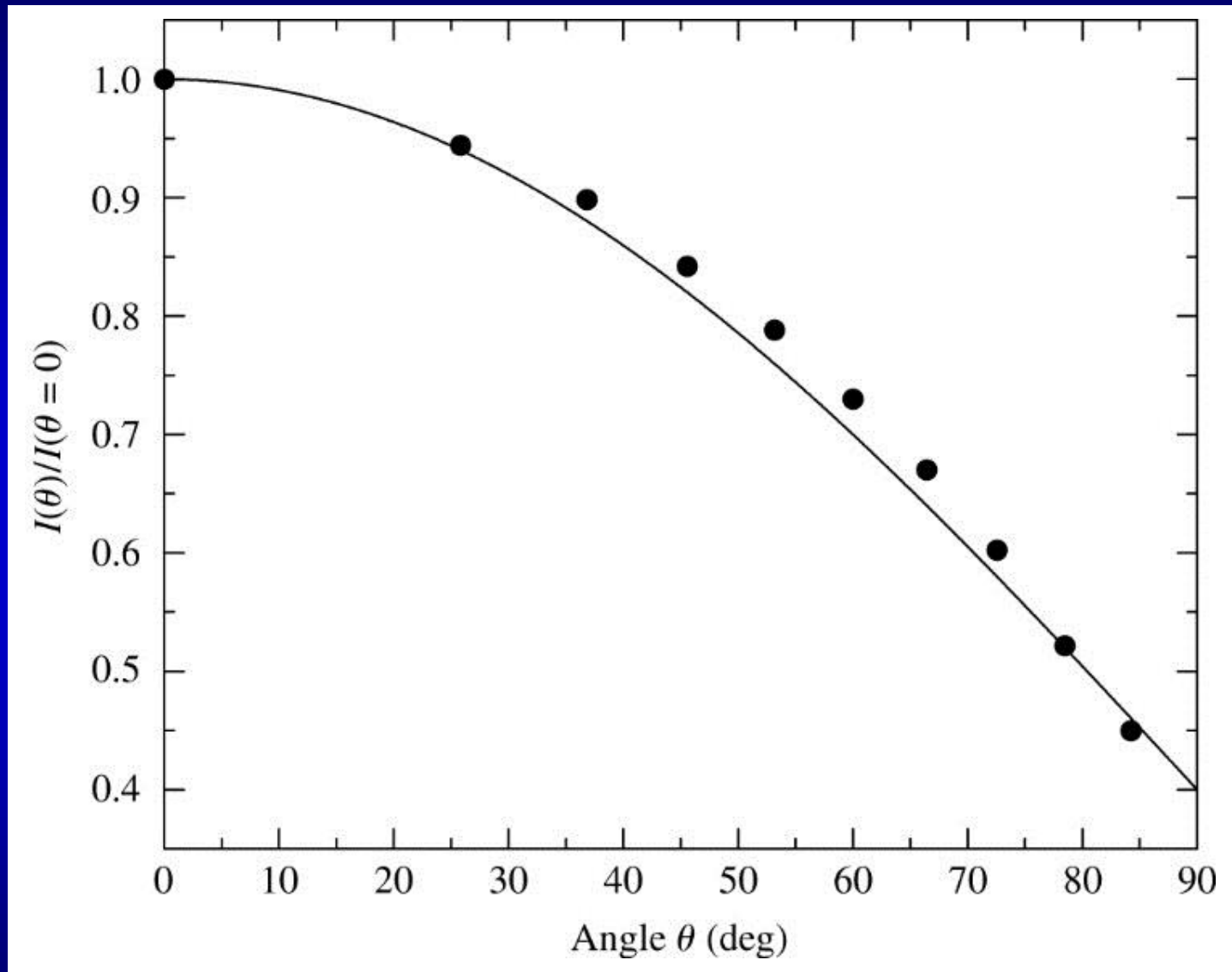
a i b su veličine ovisne o valnoj dubini koje treba odrediti.

Linearni oblik funkcije izvora stavimo u izraz za izlazni intenzitet i integriramo:

$$I_\lambda(0) = a_\lambda + b_\lambda \cos \theta$$

- Vraćen je indeks λ kako bi se naglasila ovisnost o valnoj duljini
- Iz mjerenja promjene specifičnog intenziteta od središta prema rubu Sunčevog diska $\Rightarrow$ odrede se koeficijenti a_λ i b_λ
- Ovakvim mjerenjima na Sunčevom disku pokazalo se da funkcija izvora doista slijedi **linearnu ovisnost o vertikalnoj optičkoj dubini** (6)

Primjer: Model planparalelne sive atmosfere u Eddingtonovoj aproksimaciji može se provjeriti kroz opažanje tamnjenja ruba na Suncu. Odredite koeficijente a i b za takav model i usporedite ih sa opažanjima



Carroll, B.W., Ostlie, D.A., 2006, 'Introduction to Modern Astrophysics', Pearson

PROFILI SPEKTRALNIH LINIJA

- Analiza oblika spektralnih linija $\Rightarrow$ određivanje svojstva okoline u kojoj su linije nastale

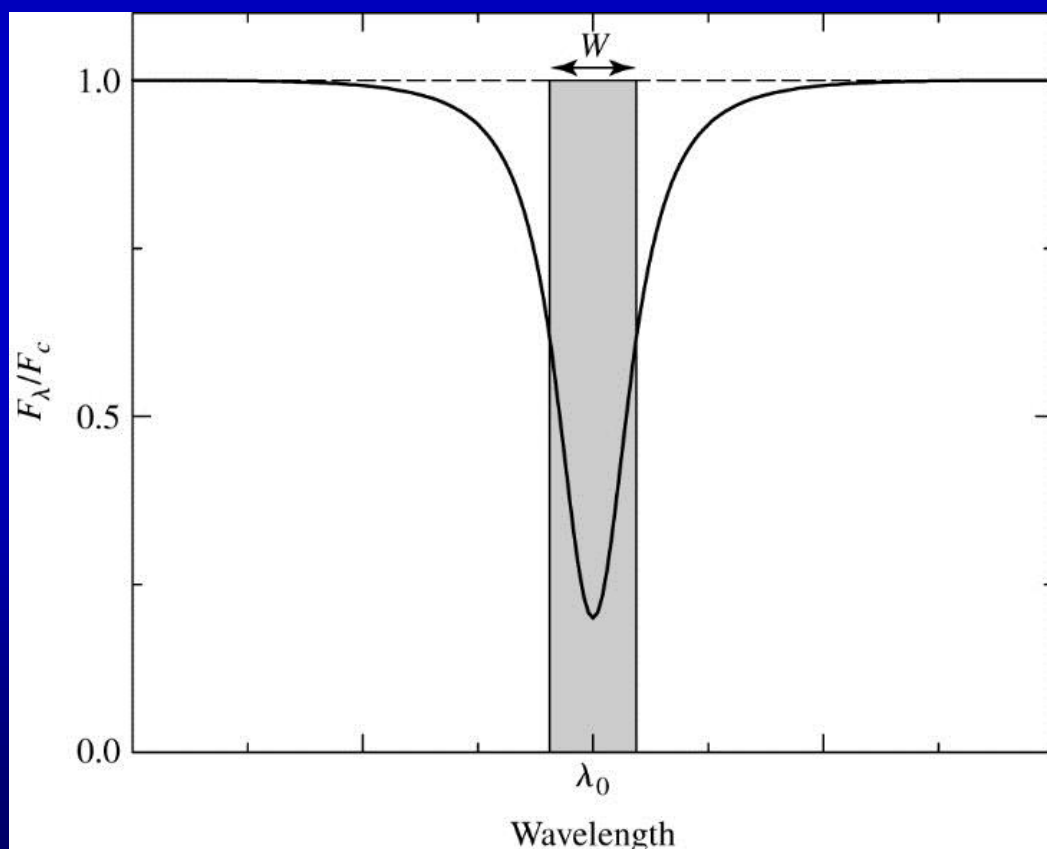
Ekvivalentna širina

- Promatrajmo tok zračenja F_λ kao funkciju valne duljine za tipičnu apsorpcijsku liniju
- Oko **središnje valne duljine** λ_0 koja određuje spektralnu liniju nalazi se **središte linije**, a sa svake strane se nalaze **krila linije** koja se uspinju do **kontinuumu**
- Spektralne linije mogu biti:
 - uske ili široke
 - plitke ili duboke

Dubina linije:

$$\frac{F_c - F_\lambda}{F_c}$$

gdje je F_λ tok zračenja u liniji na valnoj duljini λ , F_c je tok zračenja u kontinuumu – izvan linije



Jakost linije mjeri se **ekvivalentnom širinom linije**

Ekvivalentna širina
 W linije je širina koju bi imao kvadrat koji doseže kontinuum, a s površinom jednakom površini prave linije

Carroll, B.W., Ostlie, D.A., 2006, 'Introduction to Modern Astrophysics', Pearson

Ekvivalentna širina linije:

$$W = \int \frac{F_c - F_\lambda}{F_c} d\lambda$$

gdje se integrira od početka do kraja linije

- Ekvivalentne širine linija u optičkom dijelu spektra su oko 0.01 nm (0.1 Å)

Puna širina na sredini maksimuma (FWHM – Full Width at Half Maximum): još jedna mjera širine linije $\Rightarrow$ širina linije (razlika u valnoj duljini s jedne na drugu stranu linije) na kojoj je tok zračenja jednak polovici maksimuma/minimuma:

$$(\Delta\lambda)_{1/2} \Rightarrow \frac{F_c - F_\lambda}{F_c - F_{\lambda_0}} = \frac{1}{2}$$

Optički tanka linija $\Rightarrow$ tok zračenja u liniji ne pada na nulu $\rightarrow$ tok zračenja nije u potpunosti blokiran za niti jednu valnu duljinu

- Opacitet u optički tankoj liniji je najveći za valnu duljinu λ_0 i opada prema krilima linije $\Rightarrow$ **središte** linije se formira u **plićim i hladnijim** dijelovima atmosfere
- Dijelovi linije prema krilima formiraju se u sve **dubljim** slojevima atmosfere pri sve **višim temperaturama** $\Rightarrow$ kontinuum se formira u onim dijelovima atmosfere u kojima je optička dubina $2/3$

Mehanizmi širenja spektralnih linija

- Svaki fizički mehanizam širenja spektralnih linija stvara određenu vrstu profila linije

Prirodno širenje

Heisenbergov princip neodređenosti $\Rightarrow$ linije ne mogu biti beskonačno uske čak i za atom koji miruje na apsolutnoj nuli

- **Vrijeme života** pobuđenog stanja je **konačno** $\Rightarrow$ **neodređenost u energiji** pobuđenog stanja:

$$\Delta E \approx \frac{\hbar}{\Delta t}$$

- Samo osnovno stanje nema neodređenost u energiji jer se u tom stanju atom može nalaziti beskonačno dugo

- Elektroni mogu prelaziti iz jednog pobuđenog stanja u drugo tvoreći spektralne linije $\Rightarrow$ energije tih stanja su **neodređene** (ΔE), pa su i **valne duljine** fotona nastalih takvim prijelazima također **neodređene** ($\Delta \lambda$) $\Rightarrow$ linija se širi oko središnje valne duljine $\lambda_0 \Rightarrow$ **PRIRODNO ŠIRENJE LINIJE** $\Rightarrow$ **Lorentzov profil linije**

Energije fotona:

$$E_f = \frac{hc}{\lambda}$$

$$\Delta E = -\frac{hc}{\lambda^2} \Delta \lambda \approx \frac{\hbar}{\Delta t} = \frac{h}{2\pi \Delta t}$$

$$\Delta \lambda \approx \frac{\lambda^2}{2\pi c} \frac{1}{\Delta t}$$

$$\Delta \lambda \approx \frac{\lambda^2}{2\pi c} \left(\frac{1}{\Delta t_i} + \frac{1}{\Delta t_f} \right)$$

gdje je Δt_i vrijeme života elektrona u početnom stanju, a Δt_f vrijeme života elektrona u konačnom stanju

- Točniji račun daje širinu linije na polovici maksimuma (**FWHM**) za prirodno širenje:

$$(\Delta\lambda)_{1/2} = \frac{\lambda^2}{\pi c} \frac{1}{\Delta t_0}$$

gdje je Δt_0 srednje vrijeme potrebno da elektron pređe iz jednog staja u drugo

- Tipična vrijednost prirodnog širenja:

$$(\Delta\lambda)_{1/2} = 2.4 \times 10^{-5} \text{ nm}$$

Primjer: Odredite širenje $H\alpha$ linije vodika ($\lambda=656.3 \text{ nm}$) uzrokovano prirodnim širenjem ako je vrijeme života elektrona u prvom i drugom pobuđenom stanju oko $\Delta t=10^{-8} \text{ s}$

$$\Delta\lambda \approx \frac{\lambda^2}{2\pi c} \left(\frac{1}{\Delta t_i} + \frac{1}{\Delta t_f} \right) = \frac{\lambda^2}{\pi c} \frac{1}{\Delta t}$$
$$\Delta\lambda \approx 4.57 \times 10^{-14} \text{ m} = 4.57 \times 10^{-5} \text{ nm}$$

Dopplerovo širenje

- Čestice plina, svaka mase m , gibaju se nasumično u termičkoj ravnoteži, s raspodjelom brzina opisanom Maxwell-Boltzmannovom raspodjelom
- Najvjerojatnija brzina čestica plina ovisi o temperaturi:

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

- Valne duljine svjetlosti apsorbirane ili emitirane od strane čestica plina su zbog njihovog gibanja Dopplerovski pomaknute prema nerelativističkoj relaciji:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \pm \frac{|v_r|}{c}$$

gdje je v_r relativna brzina gibanja čestica plina prema promatraču

Širina spektralne linije uslijed Dopplerovog širenja (gibanja čestica u plinu):

$$\Delta\lambda \approx \frac{2\lambda}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

Primjer: Odredite širenje linije uslijed Dopplerovog efekta za $H\alpha$ liniju vodika u fotosferi Sunca ($T=5777$ K)

$$\Delta\lambda \approx 0.0427 \text{ nm}$$

- Detaljnija analiza $\rightarrow$ potrebno je uzeti u obzir različite smjerove gibanja čestica plina jedne nasuprot druge i u odnosu na doglednicu $\Rightarrow$ **puna širina linije na polovici maksimuma uslijed Dopplerovog širenja:**

$$(\Delta\lambda)_{1/2} = \frac{2\lambda}{c} \sqrt{\frac{2kT \ln 2}{m}}$$

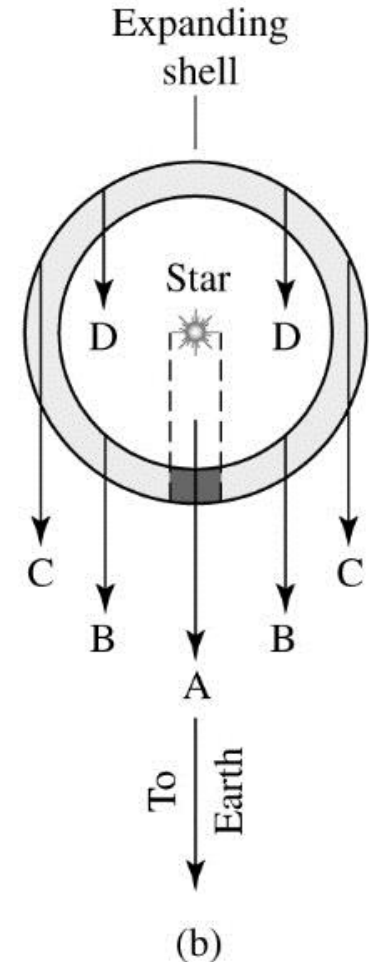
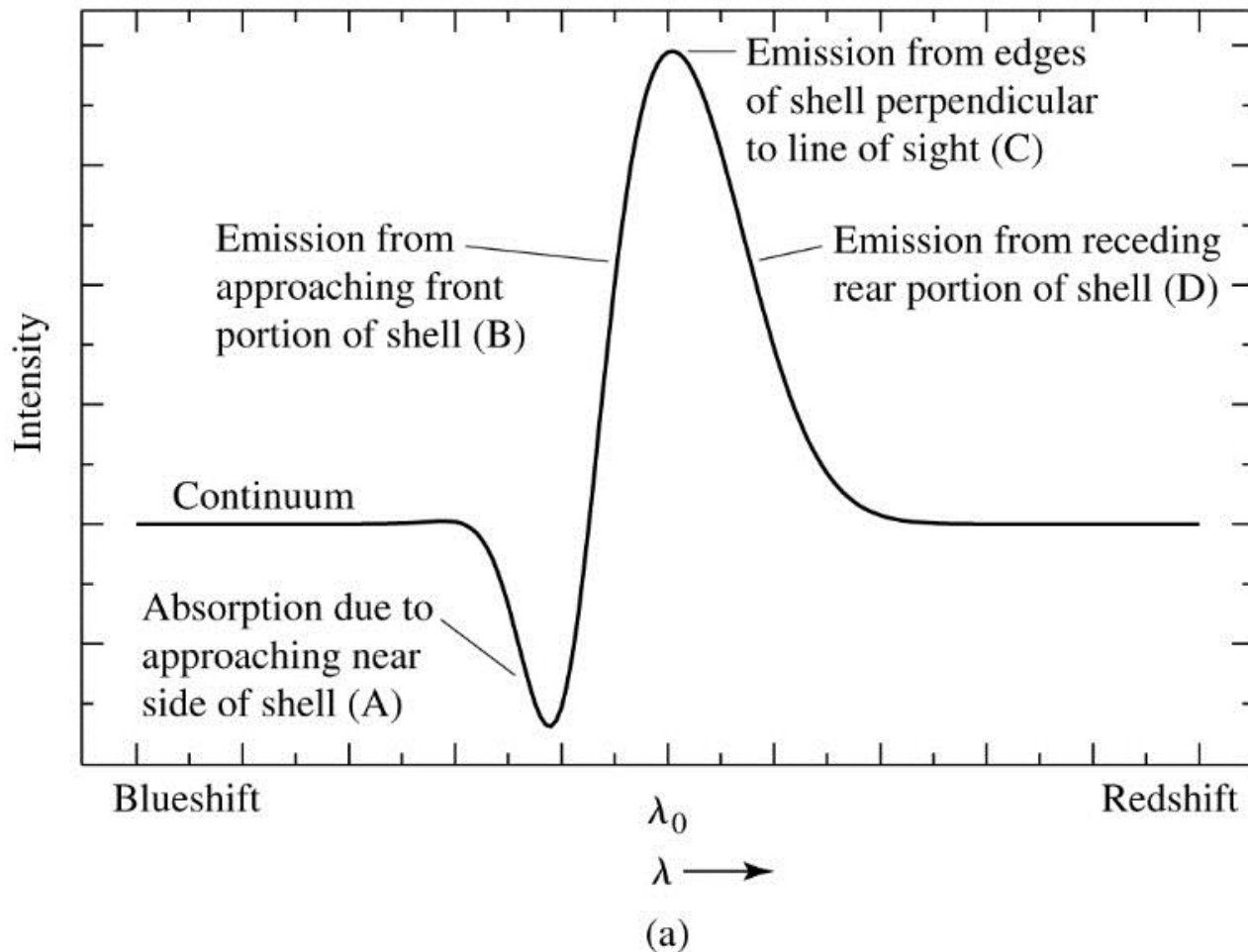
- Širenje linija uslijed Dopplerovog efekta **puno je veće** nego prirodno širenje
- Dubina linije kod Dopplerovog širenja eksponencijalno opada oko središnje valne duljine λ_0 zbog eksponencijalnog repa Maxwell-Boltzmannove raspodjele pri velikim brzinama $\Rightarrow$ puno brže opadanje nego kod prirodnog širenja i Lorentzovog profila $\Rightarrow$ **Dopplerov profil linije**
- U zvijezdi su često prisutna **turbulentna gibanja** velikih masa zvjezdanog plina na velikim skalama $\Rightarrow$ takva se gibanja mogu opisati **srednjom turbulentnom brzinom** ako slijede Maxwell-Boltzmannovu raspodjelu:

$$(\Delta\lambda)_{1/2} = \frac{2\lambda}{c} \sqrt{\left(\frac{2kT}{m} + v_{\text{turb}}^2\right) \ln 2}$$

gdje je v_{turb} najvjerojatnija brzina turbulentnog gibanja

- Turbulencije su posebno prisutne u atmosferama divovskih i superdivovskih zvijezda $\Rightarrow$ turbulencije su otkrivene pomoću Dopplerovski vrlo proširenih linija u ovim zvijezdama
- Drugi izvori Dopplerovog širenja uslijed kolektivnog gibanja čestica plina:
 - Rotacija zvijezda
 - Pulsacija zvjezdane atmosfere
 - Gubitak mase s površine zvijezde
- Ovi izvori mogu bitno utjecati na oblik i širinu spektralnih linija, ali ne mogu se kombinirati s Dopplerovim širenjem uslijed nasumičnog gibanja čestica $\Rightarrow$ primjer: P Cygni profil uslijed značajnog gubitka mase i zvjezdanog vjetra

P Cygni profil spektralne linije



Carroll, B.W., Ostlie, D.A., 2006, 'Introduction to Modern Astrophysics', Pearson

Širenje tlakom (sudarno širenje linija)

- Atomske orbitale i energetske nivoe u atomu mogu se perturbirati sudarom s neutralnim atomom ili bliskim prolaskom iona uslijed djelovanja snažnog električnog polja
- **Sudarno širenje linija** je uzrokovano individualnim sudarima, a **širenje tlakom** utjecajem električnog polja prilikom bliskog prolaska velikog broja iona $\Rightarrow$ u astrofizici se ova dva mehanizma širenja razmatraju zajednički pod imenom **širenje linija tlakom**
- Obje vrste širenja ovise o srednjem vremenu između dva sudara/susreta
- Teorijsko određivanje profila i širine linije je vrlo komplicirano zbog kvantnih efekata $\Rightarrow$ **Lorentzov profil**
 $\rightarrow$ isti profil kao i kod prirodnog širenja $\Rightarrow$ često se naziva *prigušni profil*

- Prigušni profil (damping profile) $\Rightarrow$ profil koji nastaje u spektru zračenja nabijene čestice koja izvodi jednostavno prigušeno harmonijsko titranje
- Pone širine na polovici maksimuma kod prirodnog širenje i širenja tlakom su slične i znatno manje nego Dopplerovo širenje, osim u nekim slučajevima
- Promatramo sudar dviju atoma istog elementa $\Rightarrow$ srednje vrijeme između dva sudara neka iznosi $\Delta t_0 \Rightarrow$ ovo je vrijeme otprilike jednako srednjem slobodnom putu čestice podijeljeno s njezinom srednjom brzinom
- Srednji slobodni put čestice plina:

$$\ell = \frac{1}{n\sigma}$$

- Najvjerojatnija brzina čestica plina:

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

- Srednje vrijeme između dva uzastopna sudara čestice:

$$\Delta t_0 \approx \frac{\ell}{v} = \frac{1}{n\sigma\sqrt{2kT/m}}$$

gdje je m masa čestice, σ je udarni presjek, n je brojčana gustoća čestica

Širina spektralne linije uslijed širenja tlakom:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{c} \frac{1}{\pi\Delta t_0} \approx \frac{\lambda^2}{c} \frac{n\sigma}{\pi} \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

- Širenje linije je **proporcionalno brojčanoj gustoći čestica** $\Rightarrow$ objašnjenje **Morgan-Keenanove spektralne klasifikacije i klase luminoziteta**
- Sjajni divovi i superdivovi pokazuju **uže linije** $\Rightarrow$ njihove velike proširene **atmosfera moraju biti rijetke i** pokazivati nisku brojčanu gustoću čestica

- Zvijezde glavnog niza pokazuju **šire linije** $\Rightarrow$ njihove **atmosfera sfere su gušće** i učestalost sudara je veća
- Kompaktne zvijezde **velikih gustoća** pokazuju **najšire linije** uslijed snažnog širenja tlakom

Primjer: Odredi širinu vodikove $H\alpha$ linije uzrokovane širenjem tlakom u fotosferi Sunca ($T = 5777 \text{ K}$) gdje je brojčana gustoća vodikovih atoma $1.5 \times 10^{23} \text{ m}^{-3}$

$$\Delta\lambda \approx \frac{\lambda^2}{c} \frac{n\sigma}{\pi} \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

$$\Delta\lambda \approx 2.36 \times 10^{-5} \text{ nm}$$

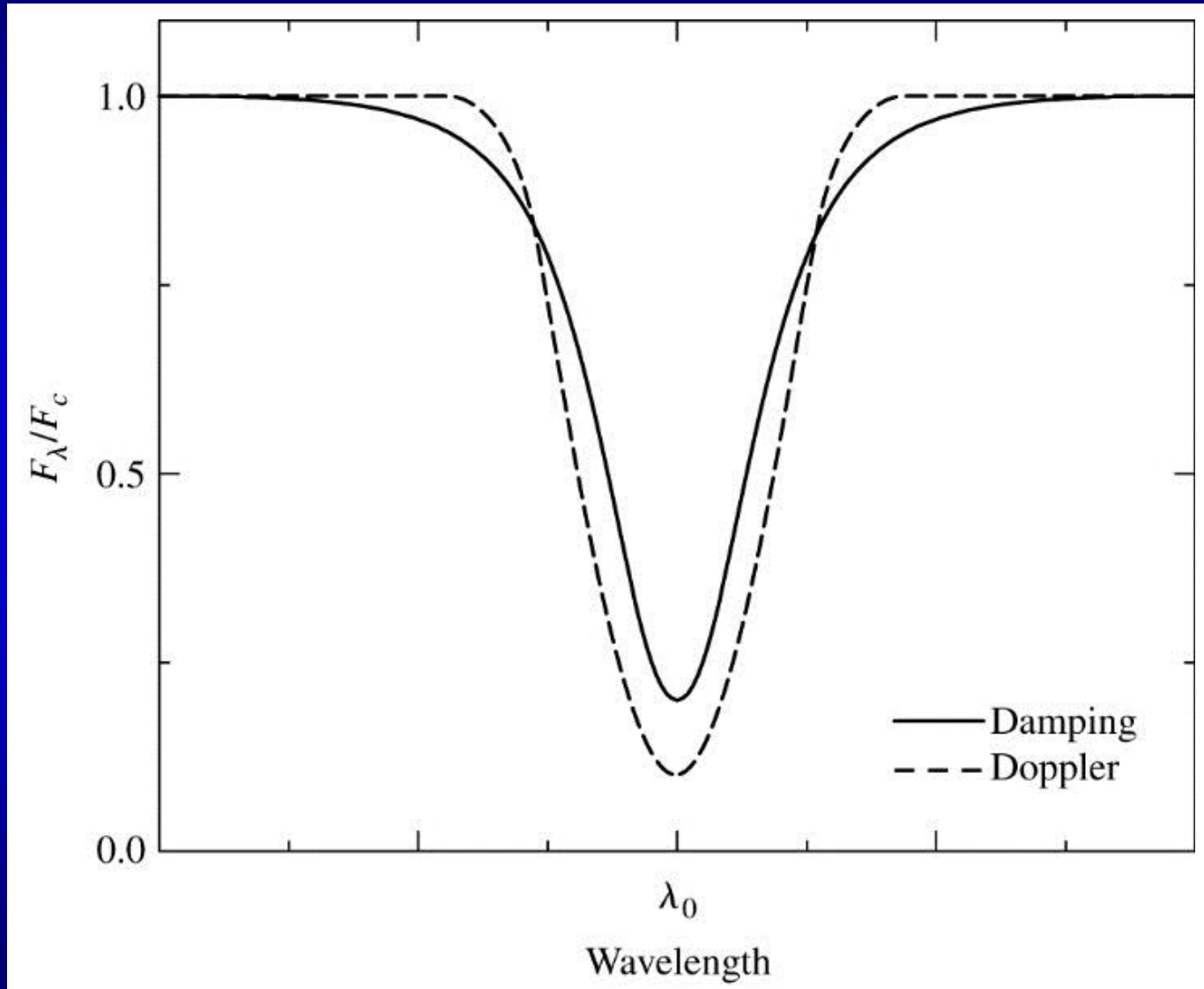
- Širenje tlakom u fotosferi Sunca slične je vrijednosti kao prirodno širenje

Voigtov profil spektralnih linija

Voigtov profil $\Rightarrow$ ukupan profil linije nastao doprinosom svih mehanizama širenja linije $\rightarrow$ uključuje doprinos i Dopplerovog i Lorentzovog profila

- Oko središta linije (λ_0) dominira širi profil linije uslijed Dopplerovog širenja
- Prema rubovima linije, eksponencijalno opadanje Dopplerovog profila vodi do tranzicije prema dominantnom Lorentzovom profilu koji pokazuje istaknuta krila linije
- Profili linija imaju **Dopplerovo središte linije** i **Lorentzova krila**

Voigtov profil



Carroll, B.W., Ostlie, D.A., 2006, 'Introduction to Modern Astrophysics', Pearson

Schuster-Schwarzschildov model spektralnih linija $\Rightarrow$ zvjezdana atmosfera kao izvor kontinuiranog zračenja crnog tijela, atomi iznad fotosfere uklanjaju fotone iz kontinuiranog zračenja i tvore apsorpcijske linije

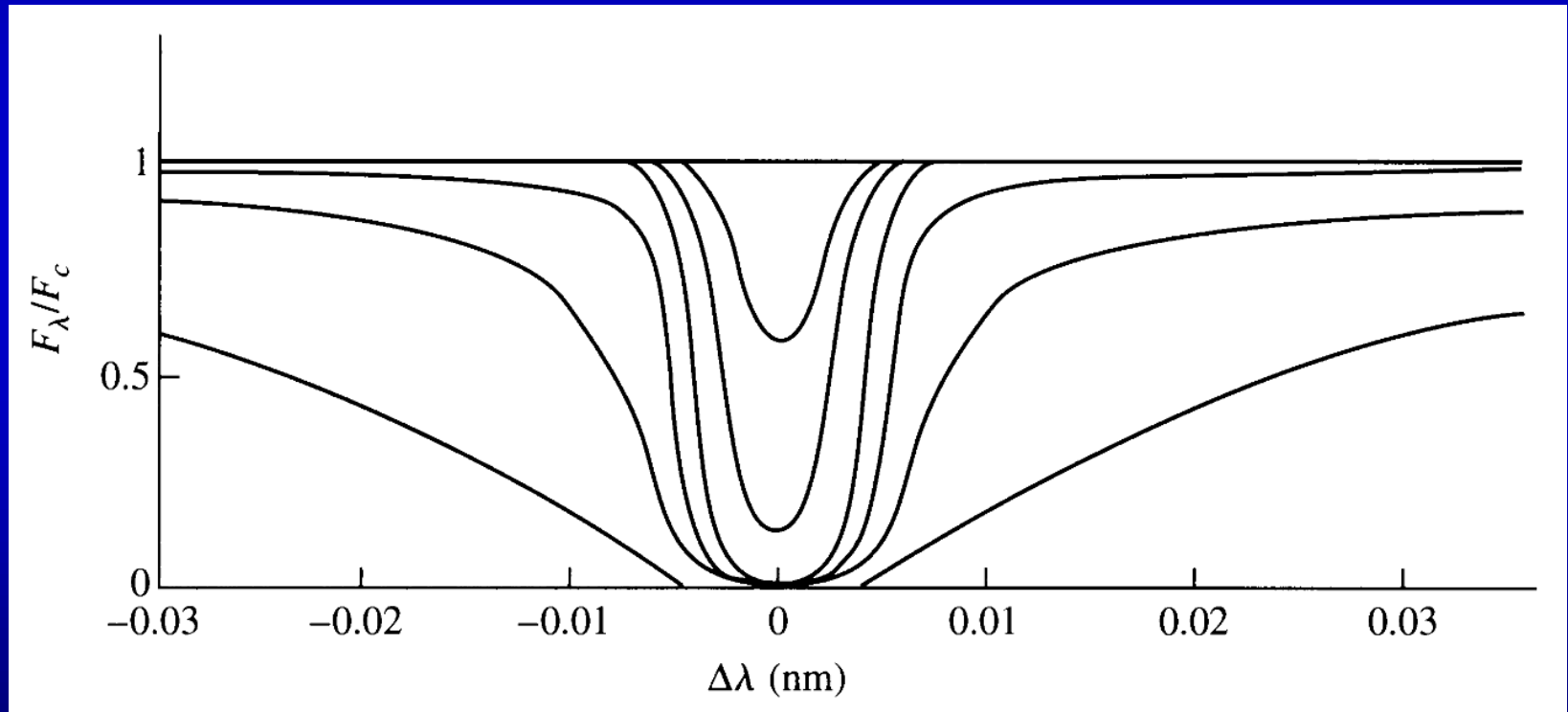
- Potrebno je poznavati temperaturu, gustoću i sastav plina u području iznad fotosfere gdje se tvore linije $\Rightarrow$ temperatura i gustoća su važne u Dopplerovom širenju i širenju tlakom, te u Sahinoj i Boltzmannovoj jednadžbi
- Nastanak linije ovisi i o kvantno-mehaničkim detaljima međudjelovanja atoma i fotona
- **Gustoća kolone (column density)** $\Rightarrow$ broj atoma nekog elementa iznad jedinične površine fotosfere
- **Broj apsorbirajućih fotona N_a** po jedinici površine s elektronima u odgovarajućoj orbitali povoljnoj za apsorpciju i nastanak linije $\Rightarrow$ potrebno je riješiti Boltzmannovu i Sahinu jednadžbu za zadanu temperaturu i gustoću kako bi se odredila pobuđena stanja i ionizacije

- N_a se određuje usporedbom izračunatog i opaženog profila linije
- Na isti se način mogu odrediti temperatura, gustoća, turbulentna brzina $\Rightarrow$ **metoda prilagodbe linije (line fitting)**
- Problemi $\Rightarrow$ nisu svi prijelazi jednako vjerojatni!!
- **f-vrijednost ili jakost oscilatora** $\Rightarrow$ relativna vjerojatnost prijelaza elektrona iz iste početne orbitale u neku višu orbitalu
- Primjer: $f = 0.637$ za $H\alpha$ vodikovu liniju i $f = 0.119$ za $H\beta$ liniju $\Rightarrow$ četiri puta je veća vjerojatnost da će elektron u $n=2$ stanju apsorbirati $H\alpha$ foton i preći u $n=3$ stanje nego $H\beta$ foton i preći u $n=4$ stanje
- Jakost oscilatora se može teorijski izračunati ili izmjeriti u laboratoriju
- Zbroj svih f-vrijednosti prijelaza iz istog početnog stanja jednako je broju elektrona u atomu/ionu

- Jakost oscilatora $\Rightarrow$ **efektivni broj elektrona po atomu** koji sudjeluju u promatranom prijelazu $\Rightarrow$ **umnožak f-vrijednosti i broja atoma po jedinici površine** daje broj atoma po jedinici površine fotosfere koji sudjeluju u tvorbi promatrane linije, fN_a

Voigtov profil za K liniju Ca II:

- najplića linije nastaje pri $N_a = 3.4 \times 10^{15}$ iona/m²
- svaka slijedeća šira linija nastaje pri deset puta većem broju iona u odnosu na prethodnu



Novotny, 1973, *Introduction to Stellar Atmospheres and Interiors*, Oxford University Press, New York

Krivulja rasta (Curve of Growth)

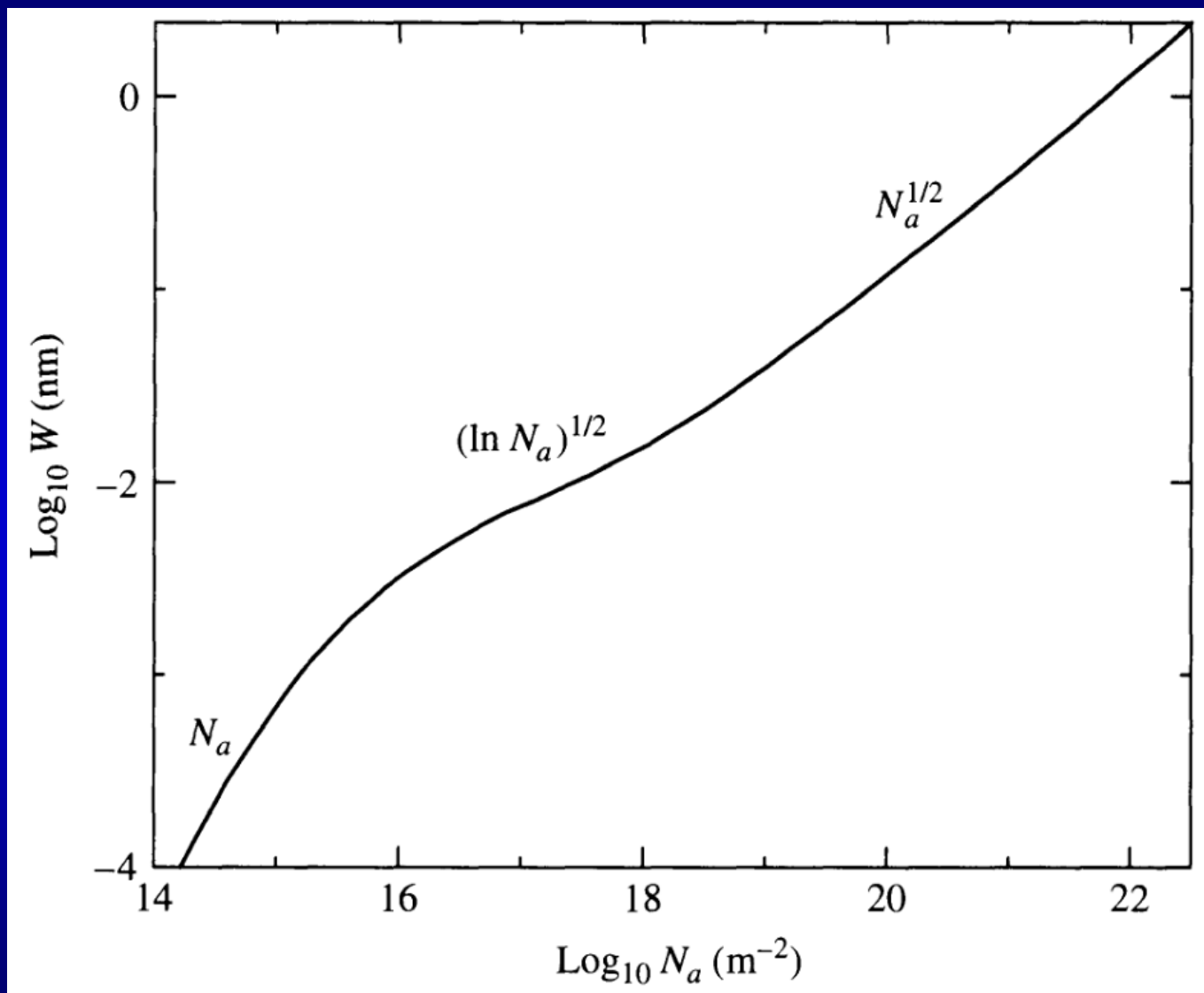
Krivulja rasta $\Rightarrow$ važna metoda (iako danas zastarjela) za određivanje N_a i zastupljenosti elemenata u atmosferi zvijezda

- Ekvivalentna širina W linije povećava se sa brojem apsorbirajućih atoma po jedinici površine N_a
- **Krivulja rasta** $\Rightarrow$ logaritamski graf ovisnosti ekvivalentne širine o broju apsorbirajućih atoma
- Za vrlo male zastupljenosti nekog elementa u atmosferi zvijezde $\Rightarrow$ pojavljuje se slaba linija koja je **optički tanka**
- Poveća li se dvostruko broj apsorbirajućih atoma $\Rightarrow$ dvostruko se poveća i količina apsorbirane svjetlosti $\Rightarrow$ ekvivalentna širina se također dvostruko poveća $\Rightarrow$ $W \propto N_a \Rightarrow$ krivulja rasta je linearna s povećanjem $\ln N_a$

- Daljnje povećanje broj apsorbirajućih atoma $\Rightarrow$ središte linije postaje **optički debelo** $\Rightarrow$ maksimalno moguća količina zračenja je apsorbirana u središtu linije
- Poveća li se još broj atoma $\Rightarrow$ dno linije se zaravnjuje i linija postaje **saturirana** $\Rightarrow$ krila linije su i dalje optički tanka i postaju sve dublja $\Rightarrow$ povećanje broja apsorbirajućih atoma sada više ne povećava značajno ekvivalentnu širinu linije $\Rightarrow$ linija rasta se zaravnjuje:

$$W \propto \sqrt{\ln N_a}$$
- Daljnje povećanje broja apsorbirajućih atoma $\Rightarrow$ povećava se širina profila nastalog **širenjem tlakom**, posebno u krilima $\Rightarrow$ ekvivalentna širina brže raste: $W \propto \sqrt{N_a}$
- Upotrebom kalibrirane krivulje rasta i izmjerene ekvivalentne širine linije $\Rightarrow$ određuje se broj apsorbirajućih atoma $\Rightarrow$ pomoću Boltzmannove i Sahine jednadžbe odredi se ukupan broj atoma u fotosferi

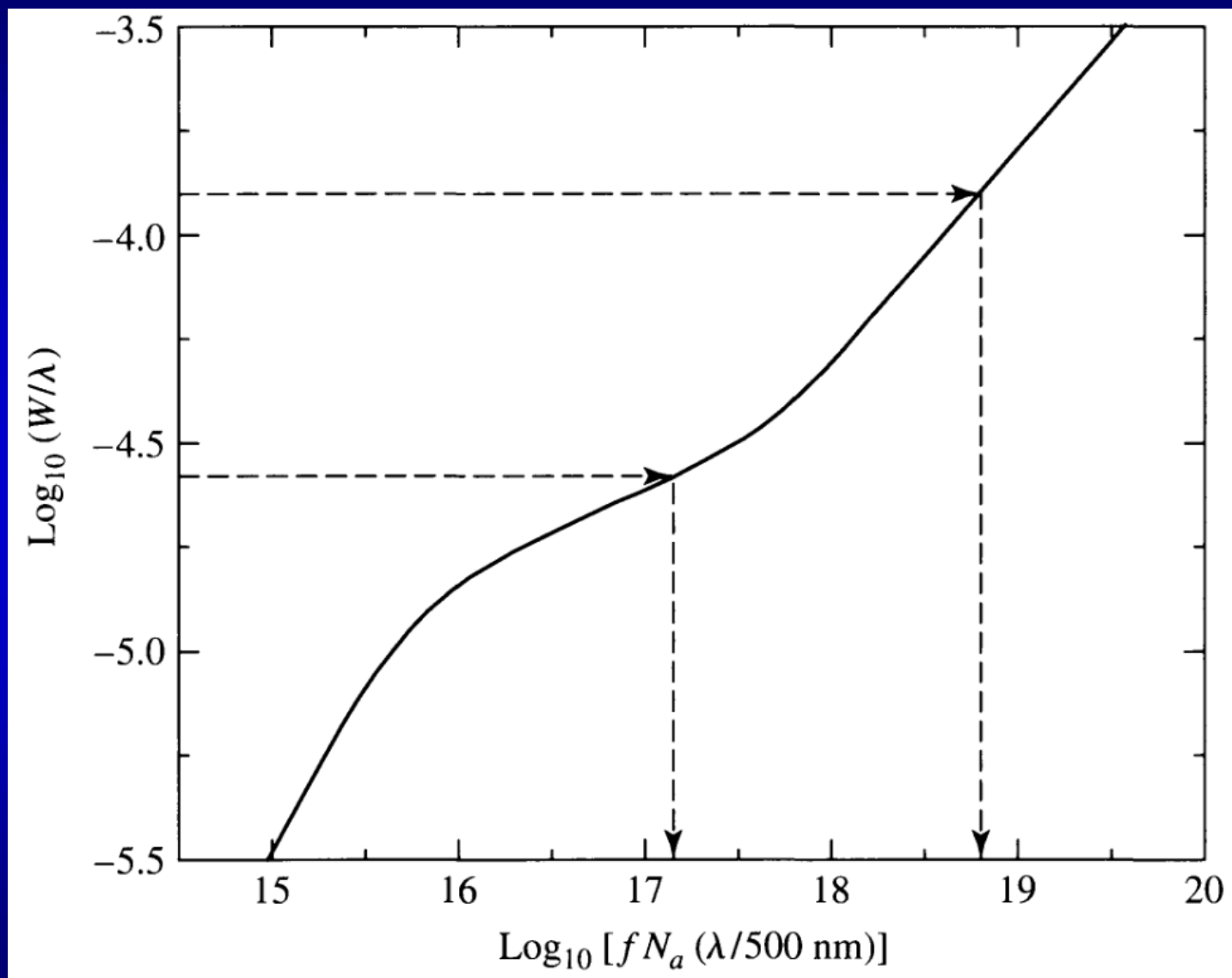
Krivulja rasta za K liniju Ca II



Aller, 1963, *The Atmospheres of the Sun and Stars*, Ronald Press, New York

- Smanjenje pogreške $\Rightarrow$ korištenje ekvivalentnih širina više spektralnih linija s prijelazom iz istog početnog stanja $\Rightarrow$ **skaliranje krivulje rasta**: promatra se ovisnost $\log(W/\lambda)$ o $\log \left[f N_a \left(\frac{\lambda}{500} \text{ nm} \right) \right] \Rightarrow$ ista se krivulja koristi za različite linije
- Određivanje **broja apsorbirajućih atoma** $\Rightarrow$ usporedba ekvivalentne širine različitih apsorpcijskih linija atoma ili iona u **istom početnom stanju** s teorijskom linijom rasta
- Krivulja rasta može se koristiti i sa linijama atoma i iona u različitim početnim stanjima $\Rightarrow$ određuje se **ekscitacijska temperatura** pomoću Boltzmannove jednadžbe iz omjera atoma/ionu u različitim početnim stanjima
- Određivanje **elektronskog tlaka** ili **ionizacijske temperature** iz relativnog broja atoma u različitim stupnjevima ionizacije pomoću Sahine jednadžbe

Opća krivulja rasta za Sunce



Aller, 1971, *Atoms, Stars and Nebulae*, Harvard University Press, Cambridge, MA

Računalno modeliranje zvjezdane atmosfere

- Konačni cilj analize zvjezdane atmosfere: računalno određen **model zvjezdane atmosfere**
- Atmosfera se podijeli na slojeve u kojima postoji LTE (konstantna temperatura) $\Rightarrow$ svaki sloj doprinosi nastanku profila linije i spektra zvijezde
- Rješavaju se istovremeno jednačbe hidrostatske ravnoteže, termodinamike, statističke i kvantne mehanike i prijenosa energije zračenjem i konvekcijom u kombinaciji sa optičkim svojstvima plina (opaciteti) $\Rightarrow$ **radijalna ovisnost temperature, tlaka i gustoće**
- Određuju se fundamentalna svojstva atmosfere $\Rightarrow$ **efektivna temperatura i površinsko ubrzanje sile teže**

- Modeliranje zvjezdane atmosfere vodi do određivanja **sastava (abundanci) zvijezda i Sunca**
- **Najzastupljeniji elementi** u zvjezdama: **vodik i helij**
- Najzastupljeniji metali u zvjezdama: kisik, ugljik i dušik

Relativna abundanca elementa:

$$\log_{10}(N_{el}/N_H) + 12$$

- Usporedba zastupljenosti elemenata u zvjezdama i Suncu sa opaženim zastupljenostima u Sunčevom sustavu $\Rightarrow$ meteoriti
- Ključna eksperimentalna provjera **fundamentalnih astronomskih teorija: nukleosinteza lakih elemenata u zvjezdama** tijekom evolucije, **teških elemenata** u eksplozijama **supernova** i **primordijalnog vodika i helija u Velikom prasku**

Zastupljenost (abundanca) elemenata u fotosferi Sunca

Element	Atomic Number	Log Relative Abundance
Hydrogen	1	12.00
Helium	2	10.93 ± 0.004
Oxygen	8	8.83 ± 0.06
Carbon	6	8.52 ± 0.06
Neon	10	8.08 ± 0.06
Nitrogen	7	7.92 ± 0.06
Magnesium	12	7.58 ± 0.05
Silicon	14	7.55 ± 0.05
Iron	26	7.50 ± 0.05
Sulfur	16	7.33 ± 0.11
Aluminum	13	6.47 ± 0.07
Argon	18	6.40 ± 0.06
Calcium	20	6.36 ± 0.02
Sodium	11	6.33 ± 0.03
Nickel	28	6.25 ± 0.04

Grevesse & Sauval, 1998,
Space Science Reviews,
85, 161