

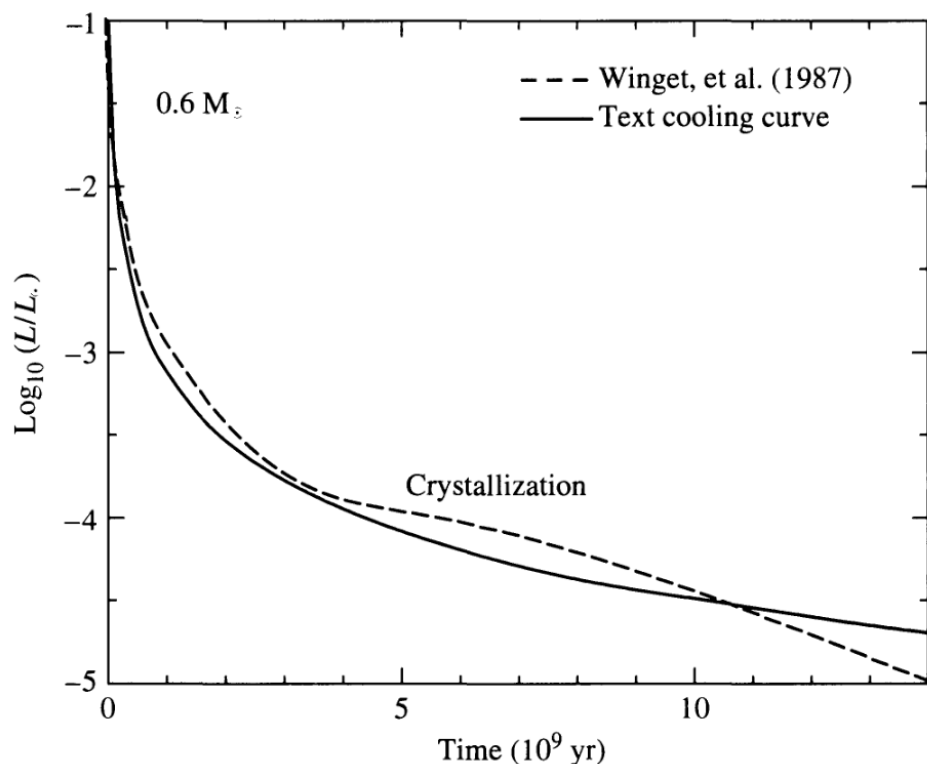
Astronomija i astrofizika II

3. Degenerirani ostaci zvijezda: bijeli patuljci, neutronske zvijezde i pulsari

1. Odredite značaj elektronske degeneracije u središtu Sunca i Siriusa B. Prema standardnom Sunčevom modelu, u središtu Sunca temperatura iznosi $1.57 \cdot 10^7$ K, a gustoća $1.527 \cdot 10^5$ kg/m³. Gustoća Siriusa B iznosi $3.0 \cdot 10^9$ kg/m³, a procijenjena temperatura u središtu zvijezde $7.6 \cdot 10^7$ K. Ukoliko koristite elektronsku vodljivost kao dominantni mehanizam prijenosa energije i izraz za luminozitet bijelog patuljka, odredite temperaturu u središtu Siriusa B. Koliko u tom slučaju iznosi gustoća na granici degenerirane unutrašnjosti i nedegenerirane ovojnice? Pretpostavite da je luminozitet bijelog patuljka $0.03 L_{\text{Sun}}$ a masa $1 M_{\text{Sun}}$, da u bijelom patuljku gotovo nema vodika, da helija ima 90% a ostalih metala 10%.
2. Bijeli patuljak kojeg je najjednostavnije promatrati nalazi se u sazviježđu Eridanus, i to u trostrukom zvjezdanom sustavu 40 Eridani. Sustav se sastoji od 40 Eri A, zvijezde prividnog sjaja 4 mag slične Suncu, 40 Eri B odnosno bijelog patuljka prividnog sjaja 10 mag, te 40 Eri C, crvene M5 zvijezde prividnog sjaja 11 mag. Prvu komponentu, 40 Eri A, možemo zanemariti jer je udaljena više od 400 AU od preostale dvije komponente.
 - a. Odredite mase komponenata 40 Eri B i C u odnosu na masu Sunca. Poznati su parametri njihove orbite: period od 247.9 godina, omjer udaljenosti komponenata B i C od centra mase $a_B/a_C = 0.37$, kutni promjer velike poluosi u sustavu reducirane mase $6.89''$, dok trigonometrijska paralaksa iznosi $0.201''$.
 - b. Iz HR dijagrama moguće je odrediti apsolutnu bolometrijsku magnitudu 40 Eri B koja iznosi 9.6. Koliko iznosi luminozitet ove zvijezde? Apsolutna bolometrijska magnituda Sunca iznosi +4.76.
 - c. Iz spektra je moguće dobiti efektivnu temperaturu 40 Eri B koja iznosi 16 900 K. Odredite polumjer ove zvijezde i usporedite ga s polumjerom Sunca, Zemlje i Siriusa B. Polumjer Sunca iznosi 696 000 km, Zemlje 6370 km a Siriusa B $0.008 R_{\text{Sun}}$.
 - d. Izračunajte srednju gustoću 40 Eri B i usporedite je sa srednjom gustoćom Siriusa B ($3.0 \cdot 10^9$ kg/m³). Koja je zvijezda gušća, i zašto? Masa Siriusa B iznosi $1.053 M_{\text{Sun}}$.
 - e. Izračunajte produkt mase i volumena za 40 Eri B i Sirius B. Da li postoji odstupanje od relacije masa-volumen i zašto?
3. Odredite aproksimativno gornju granicu masenog udjela vodika, X , u unutrašnjosti bijelog patuljka. U jednadžbi brzine oslobađanja nuklearne energije upotrijebite masu i srednju gustoću Siriusa B iz zadatka 2, a neka je luminozitet $0.03 L_{\text{Sun}}$ i temperatura u središtu 10^7 K. Za pp lanac uzmite da su ψ_{pp} i f_{pp} jednaki 1, a $X_{\text{CNO}} = 1$ u CNO ciklusu. $\epsilon_{0,pp} = 1.08 \cdot 10^{-12}$ Wm³/kg²; $\epsilon_{0,CNO} = 8.24 \cdot 10^{-31}$ Wm³/kg².
4. Odredite uvjet elektronske degeneracije ukoliko izjednačite tlak idealnog elektronskog plina sa tlakom degeneriranog elektronskog plina. Koristite točan izraz za degenerirani elektronski plin.
5. Pri kojoj brzini elektrona relativistički efekti postaju važni na razini od 10% kada Lorentzov faktor postane jednak 1.1? Koliko u tom slučaju iznosi gustoća bijelog patuljka? Koliko iznosi masa takvog bijelog patuljka određena iz relacije masa-volumen? To će ujedno biti i masa pri kojoj dolazi do odstupanja u masa-volumen jednadžbi.
6. U bijelom patuljku dolazi do kristalizacije jezgara kada karakteristična termička energija kT postane puno manja od elektrostatičke potencijalne energije između jezgara $Z^2 e^2 / 4\pi\epsilon_0 r$ gdje je r srednja udaljenost između jezgara. Omjer ovih dviju vrijednosti definiran je kao Γ . Udaljenost

r između susjednih jezgara može se definirati kao polumjer sfere čiji je volumen jednak srednjem volumenu jezgre, Am_H/ρ .

- Odredite srednju udaljenost r između susjednih jezgara u bijelom patuljku građenom od ugljika, mase $0.6 M_{\text{Sun}}$ i polumjera $0.012 R_{\text{Sun}}$.
- Procijenite luminozitet takvog ugljičnog bijelog patuljka ukoliko mu je temperatura u središtu $1.76 \cdot 10^6 \text{ K}$, dovoljno niska za početak kristalizacije. Pretpostavite sastav bijelog patuljka $Y = 0.9, Z = 0.1$.
- Koliko dugo bijeli patuljak može svijetliti s gore određenim luminozitetom, koristeći latentnu toplinu od kT po jezgri oslobođenu pri kristalizaciji? Usporedite to vrijeme sa vremenom u kojem se bijeli patuljak sporije hladi uslijed kristalizacije (vidi sliku).

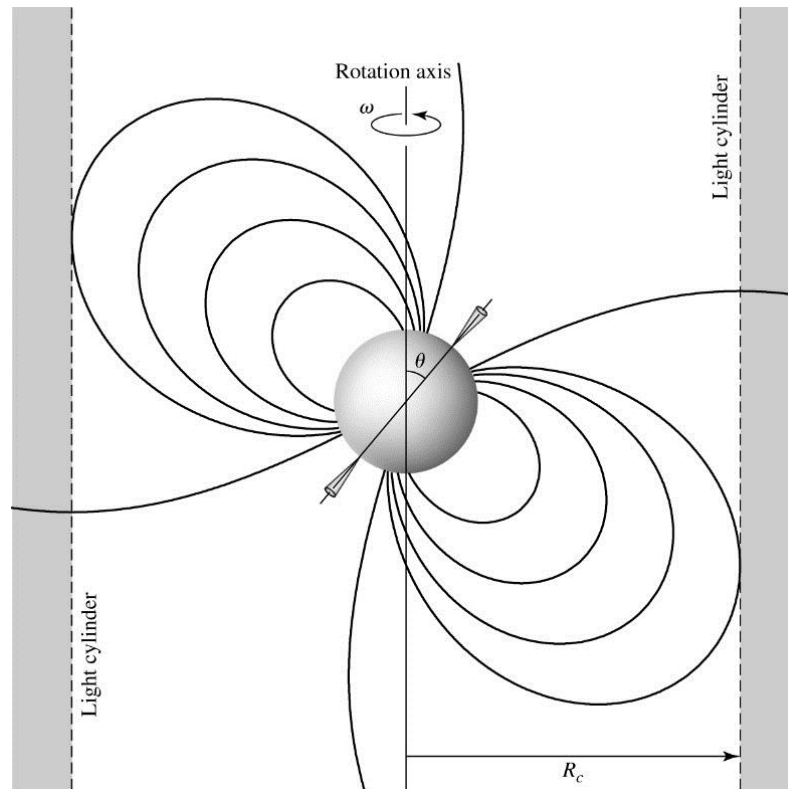


- Procijenite gustoću pri kojoj dolazi do elektronskog uhvata u jednostavnoj mješavini protona (jezgre vodika) i relativističkih degeneriranih elektrona. Usporedite dobivenu vrijednost s točnom gustoćom od $1.2 \cdot 10^{10} \text{ kg/m}^3$ pri kojoj dolazi do elektronskog uhvata.
- Odredite brzinu kojom rotirajuća neutronska zvijezda u Rakovoj maglici gubi energiju pod pretpostavkom da je neutronska zvijezda jednolika sfera polumjera 10 km i mase $1.4 M_{\text{Sun}}$. Pulsar u Rakovoj maglici ima period 33.3 ms koji se produžuje brzinom $\dot{P} = 4.21 \cdot 10^{-13}$. Usporedite taj iznos sa snagom potrebnom za ubrzano širenje maglice, relativističke elektrone i magnetsko polje određenom na osnovu opažanja, a koja iznosi $5 \cdot 10^{31} \text{ W}$ (više od $10^5 L_{\text{Sun}}$).
- Koliko iznosi gustoća jezgre masenog broja A i radijusa $r_0 A^{1/3}$ gdje je $r_0 = 1.2 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ u nuklearnom modelu kapljice?
- Odredite tlak neutronske degeneracije u središtu neutronske zvijezde mase $1.4 M_{\text{Sun}}$ ako je gustoća u središtu $1.5 \cdot 10^{18} \text{ kg/m}^3$, te usporedite dobiveni tlak s tlakom degeneriranog elektronskog plina od $1.9 \cdot 10^{22} \text{ Pa}$ u središtu Siriusa B.
- Pretpostavite da Sunce kolapsira u neutronska zvijezdu polumjera 10 km . Ukoliko u tom procesu Sunce ne izgubi značajan dio mase, odredite rotacijski period takve neutronske zvijezde. Koliko iznosi jakost magnetskog polja u takvoj neutronske zvijezdi? Period rotacije Sunca iznosi 26 dana, dok je tipična jakost magnetskog polja na Suncu u blizini površine 0.2 mT .

12. Izvedite relaciju za minimalni rotacijski period i odredite ovu vrijednost za Sirius B srednje gustoće $3.0 \cdot 10^9 \text{ kg/m}^3$ i neutronske zvijezde mase $1.4 M_{\text{Sun}}$ ($R = 10 \text{ km}$). Prilikom brze rotacije, zvijezda gubi sferni oblik i biva spljoštena na polovima. Koliko iznose ekvatorijalni i polarni polumjeri neutronske zvijezde iste mase i radijusa koja rotira s dvostruko dužim minimalnim rotacijskim periodom? Newton je pokazao da je razlika između ekvatorijalnog polumjera (E) i polarnog polumjera (P) u odnosu na srednji radijus (R) u rotirajućem homogenom fluidu mase M i kutne brzine Ω :

$$\frac{E - P}{R} = \frac{5\Omega^2 R^3}{4GM}$$

13. Neka pulsar ima period P_0 i promjenu perioda $\dot{P}_0$ u trenutku $t = 0$. Pretpostavite da produkt $P\dot{P}$ ostaje sačuvan.
- Odredite period P pulsara nakon vremena t .
 - Pretpostavite da postoji pulsarski sat koji može mjeriti vrijeme na osnovu brojanja radio pulseva primljenih s pulsara. Pretpostavite i da postoji savršen sat ($\dot{P}_0 = 0$) koji je u početnom trenutku sinkroniziran sa pulsarskim satom. Pokažite da u trenutku u kojem savršen sat pokazuje karakteristično vrijeme $P_0/\dot{P}_0$, pulsarski sat pokazuje vrijeme $(\sqrt{3} - 1)P_0/\dot{P}_0$.
14. U Rakovoj maglici izmjereno je iznenadno smanjenje perioda pulsara $|\Delta P| \approx 10^{-8}P$. Odredite promjenu polumjera zvijezda ukoliko je ova promjena brzine rotacije uzrokovana kontrakcijom pulsara. Pretpostavite da je pulsar rotirajuća sfera jednolike gustoće polumjera 10 km .
15. Odredite polumjer svjetlosnog cilindra (vidi sliku) pulsara u Rakovoj maglici periode 33.3 ms i jednog od najsporijih pulsara, PSR 1841-0456, periode 11.8 s . Usporedite ove vrijednosti s radijusom neutronske zvijezde $R_{ns} = 10 \text{ km}$ mase $1.4 M_{\text{Sun}}$. Ako jakost magnetskog polja opada s $1/r^3$, odredite omjer jakosti magnetskog polja na svjetlosnom cilindru za pulsar u Rakovoj maglici i u PSR 1841-0456.



16. Integrirajte relaciju koja povezuje magnetsko polje pulsara s umnoškom $P\dot{P}$ kako bi dobili izraz za period P pulsara nakon vremena t ako je u trenutku $t = 0$ početni period iznosio P_0 . Odredite starost pulsara t ukoliko je prošlo dovoljno vremena da se pulsar mogao značajno usporiti tako da je $P_0 \ll P$. Procijenite starost pulsara u Rakovoj maglici ako je njegov period $P = 33.3$ ms i $P\dot{P} = 4.21 \cdot 10^{-13}$ i usporedite sa stvarnom vrijednošću ako znate da je supernova eksplodirala 1054. godine, a opažanja su napravljena 2006.
17. Odredite najmanju energiju fotona potrebnog za nastanak elektron-pozitron para u procesu proizvodnje parova $\gamma \rightarrow e^- + e^+$. Koliko iznosi valna duljina ovog fotona i u kojem se dijelu elektromagnetskog spektra ona nalazi?
18. Odredite jakost magnetskog polja na polovima pulsara u Rakovoj maglici ($P = 33.3$ ms; $\dot{P} = 4.21 \cdot 10^{-13}$) i brzo rotirajućeg pulsara PSR 1937+214 ($P = 1.56$ ms; $\dot{P} = 1.05 \cdot 10^{-19}$). Pretpostavite da su rotacijska i magnetska os međusobno okomiti.