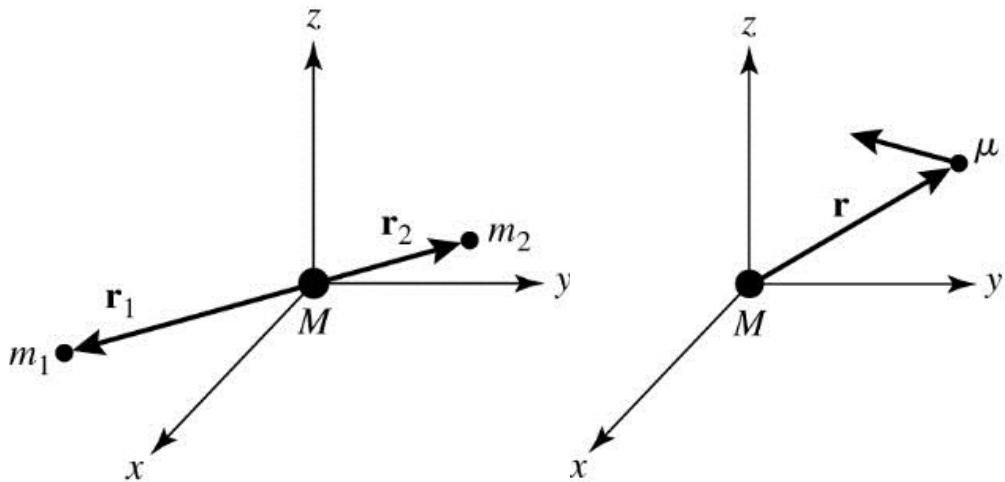


Astronomija i astrofizika II

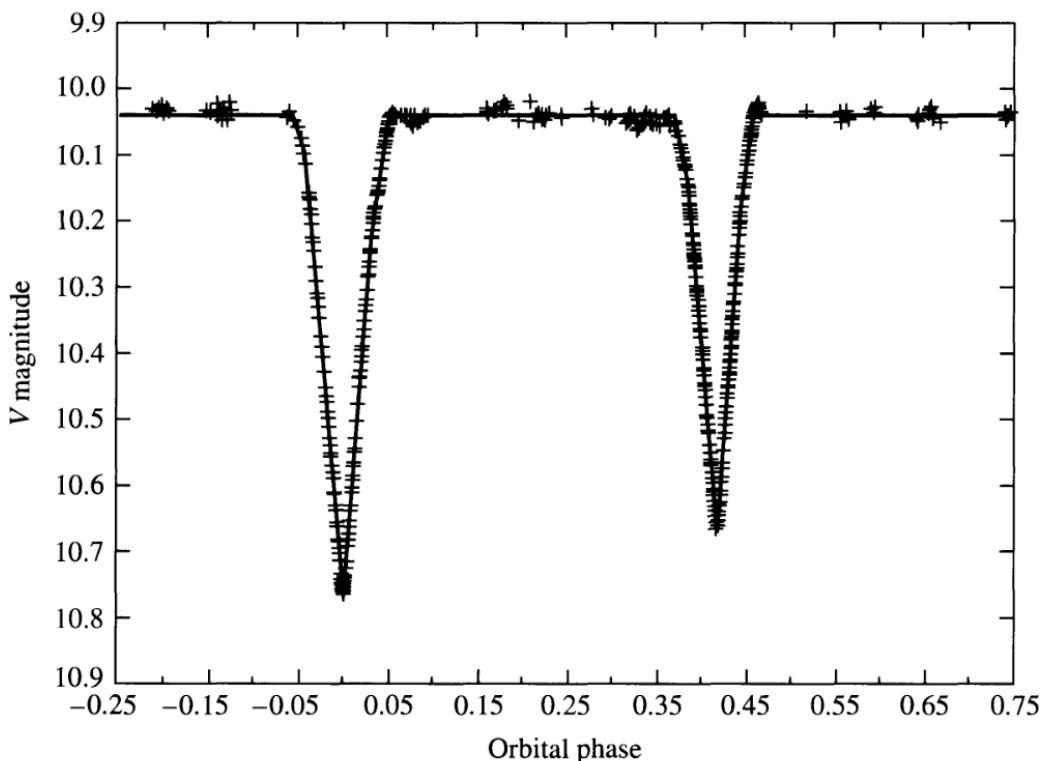
5. Dvojni sustavi

1. Opažan je pomrčinski spektroskopski dvojni sustav u čijem su spektru vidljive obje komponente. Analiza spektra pokazuje periodičnost s periodom $P = 8.6$ godina, najveći Dopplerov pomak vodikove Balmerove $H\alpha$ linije ($\lambda = 656.281$ nm) u iznosu od $\Delta\lambda_1 = 0.072$ nm za manju komponentu i samo od $\Delta\lambda_1 = 0.072$ nm za veću komponentu dvojnog sustava. Krivulja brzina je gotovo sinusoidalna što upućuje na gotovo kružne orbite, sinkronizaciju orbita i plimsko zaključavanje. Orbitalna ravnina se u odnosu na ravninu projekcije na nebu nalazi pod kutom od 90° .
 - a. Odredite najveće radikalne brzine i velike poluosi komponenata, te veliku poluos za reducirani masu.
 - b. Iz svjetlosne krivulje određena je razlika u vremenu između prvog i zadnjeg kontakta manje komponente prilikom pomrčine koje iznosi $t_b - t_a = 11.7$ sati, dok vrijeme za koje se manja komponenta nalazi iza veće iznosi $t_c - t_b = 164$ dana. Koliko iznose radijusi i mase komponenata?
 - c. Fotometrijskim opažanjima je iz svjetlosne krivulje moguće odrediti prividnu zvjezdalu veličinu dvojnog sustava u maksimumu sjaja te u minimumu sjaja tijekom dva pomrčinska perioda. U maksimumu sjaja bolometrijska prividna zvjezdana veličina iznosi $m_{bol,0} = 6.3$, dok su bolometrijske prividne zvjezdane veličine u primarnom minimumu $m_{bol,1} = 9.6$, a u sekundarnom minimumu $m_{bol,2} = 6.6$. Koliko iznosi omjer tokova zračenja i efektivnih temperatura primarne i sekundarne komponente?
2. Promatrajte dvije zvijezde u orbiti oko zajedničkog centra mase. Pokažite da velika poluos orbite reducirane mase iznosi $a = a_1 + a_2$ ako je a_1 velika poluos orbite zvijezde mase m_1 , a a_2 velika poluos orbite zvijezde m_2 .

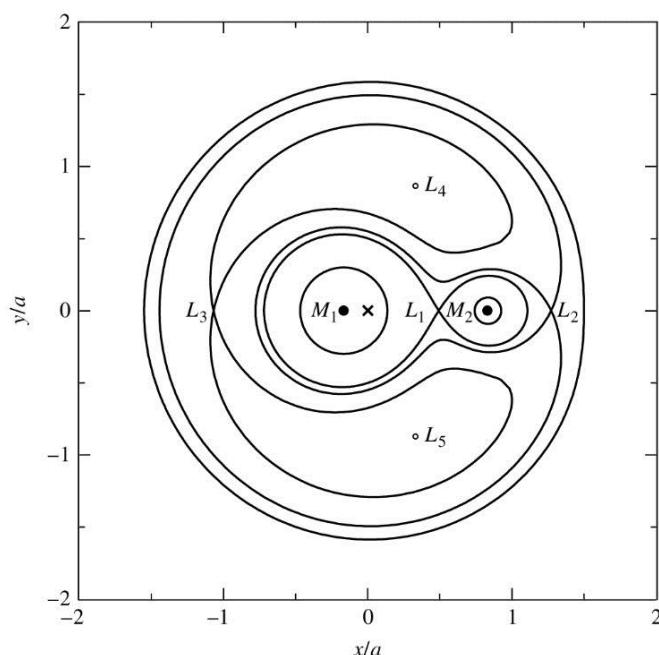


3. Promatrajte dvije zvijezde u kružnim orbitama oko zajedničkog centra mase koje se nalaze na udaljenosti a . Kut inklinacije orbite iznosi i , a zvjezdani polumjeri su a_1 i a_2 . Odredite:
 - a. Izraz za najmanji kut inklinacije za koji je još uvijek moguće vidjeti pomrčinu.
 - b. Najmanji kut inklinacije za koji je još uvijek moguće vidjeti pomrčinu u sustavu u kojem zvijezde imaju polumjere $10 R_{\text{Sun}}$ i $1 R_{\text{Sun}}$, a međusobno su udaljene 2 AU.

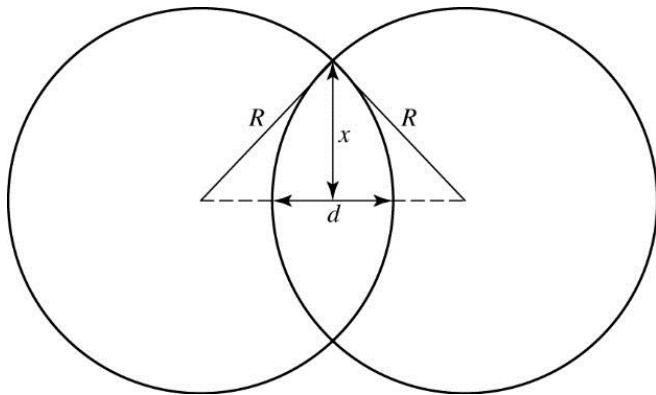
4. Sirius je vizualna dvojna zvijezda s periodom 49.94 godina i trigonometrijskom paralaksom $0.37921'' \pm 0.00158''$. Pod pretpostavkom da se orbitalna ravnina nalazi u istoj ravnini kao i nebeska projekcija orbite, pravi kutni promjer velike poluosu reducirane mase iznosi $7.61''$. Omjer udaljenosti Siriusa A i Siriusa B od centra mase iznosi $a_A/a_B = 0.466$. Masa Sunca iznosi $M_{\text{Sun}} = 1.99 \cdot 10^{30}$ kg, Sunčev luminozitet $L_{\text{Sun}} = 3.85 \cdot 10^{26}$ W, a absolutni bolometrijski sjaj +4.74 mag. 1 pc = $3.086 \cdot 10^{13}$ km.
- Odredite mase svake komponente sustava.
 - Absolutni bolometrijski sjaj Siriusa A iznosi 1.36, a Siriusa B 8.79. Odredite njihove luminozitete u jedinicama Sunčevih luminoziteta.
 - Efektivna temperatura Siriusa B iznosi oko 24790 ± 100 K. Odredite njegov radijus i usporedite ga sa radijusom Sunca i Zemlje ($R_{\text{Sun}} = 6.96 \cdot 10^5$ km, $R_{\text{Earth}} = 6370$ km).
5. Određeni su orbitalni period $P = 6.31$ godina i najveće radikalne brzine komponenata A i B u iznosu od 5.4 km/s i 22.4 km/s u pomrčinski spektroskopski dvojnom sustavu na osnovu svjetlosne krivulje i krivulje brzina. Vrijeme između prvog kontakta i najmanjeg sjaja ($t_b - t_a$) iznosi 0.58 dana, trajanje primarnog minimuma ($t_c - t_b$) iznosi 0.64 dana, dok su prividni bolometrijski sjajevi u maksimumu, primarnom i sekundarnom minimumu redom 5.40 mag, 9.20 mag, 5.44 mag. Pod pretpostavkom kružne sinkronizirane orbite i na osnovu ovih podataka, odredite:
- Omjer masa komponenata.
 - Ukupnu masu sustava pod pretpostavkom da je $i \approx 90^\circ$.
 - Mase pojedinih komponenata.
 - Polumjere pojedinih komponenata pod pretpostavkom kružnih orbita.
 - Omjer efektivnih temperatura komponenata.
6. Na slici je prikazana svjetlosna krivulja dvojne pomrčinske zvijezde YY Sgr u V pojasu. Odredite omjer temperature dviju komponenata u sustavu.



7. ζ Phe je spektroskopski dvojna zvijezda s periodom od 1.67 dana i gotovo kružnim orbitama. Najveći izmjereni Dopplerovi pomaci svjetlige i tamnije komponente iznose 121.4 km/s i 247 km/s.
- Odredite $m \sin^3 i$ za svaku komponentu.
 - Odredite pojedinačne mase komponenata uvezši u obzir statističku vrijednost $\sin^3 i$ koja uzima u obzir seleksijski efekt Dopplerovog pomaka.
8. Podaci iz opažanja dvojnih sustava koriste se za izradu odnosa masa-luminozitet. Također postoji i korelacija između mase i efektivne temperature zvijezda. Konstruirajte graf koji će prikazati tu ovisnost kao $\log T_e$ u ovisnosti o $\log(M/M_{\text{Sun}})$. Koristite podatke iz rada Popper, 1980, Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 18, 115, i to podatke iz tablica 2, 4, 7 (izuzmite sustav α Aur) i 8 (uzmите u obzir samo zvijezde spektralnog tipa u koloni 'Sp' koje završavaju s rimskim brojem V (zvijezde glavnog niza)). Zvijezde koje su isključene u tablicama 7 i 8 su razvijene zvijezde sa strukturom koja se bitno razlikuje od zvijezda glavnog niza. Članak se nalazi na poveznici: <http://tinyurl.com/pwv5965>.
9. Prepostavite da se u poluodvojenom dvojnom sustavu nalazi zvijezda poput Sunca s pratiocem iste mase, a koja ispunjava Rocheovu plohu do točke malo ispod fotosfere u kojoj je temperatura oko 6350 K (vidi tablicu 5.1.). Odredite gubitak mase u takvom sustavu te ga usporedite s opažanjima u različitim sustavima u kojima gubitak mase iznosi između 10^{-11} i $10^{-7} M_{\text{Sun}}/\text{god}$. Usporedite rezultat i s gubitkom mase Sunca putem Sunčevog vjetra koja iznosi $3 \cdot 10^{-14} M_{\text{Sun}}/\text{god}$. Koristite izračun strukture u modelu Sunca u tablici 5.1. Masa Sunca iznosi $M_{\text{Sun}} = 1.99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$.
10. Promatrajte masu $m = 1 \text{ kg}$ koja se nalazi u mirovanju beskonačno daleko od zvijezde mase M i polumjera R . Koliko iznosi energija koja se oslobodi pri padu ove mase na površinu bijelog patuljka mase $M = 0.85 M_{\text{Sun}}$ i polumjera $R = 6600 \text{ km} = 0.0095 R_{\text{Sun}}$? Usporedite ovu energiju s energijom koja se oslobodi u termonuklearnoj fuziji 1 kg vodika. Koliko iznosi ta energija ukoliko umjesto bijelog patuljka imamo neutronsku zvijezdu mase $M = 1.4 M_{\text{Sun}}$ i polumjera $R = 10 \text{ km}$? Koliki je to dio energije mase mirovanja 1 kg vodika? Izvori X-zračenja pokazuju luminozitet reda 10^{30} W . Koliki je prijenos mase potreban da se postigne ovaj luminozitet ukoliko je manja komponenta neutronska zvijezda? Polumjer Sunca iznosi $R_{\text{Sun}} = 6.96 \cdot 10^5 \text{ km}$, a masa Sunca $M_{\text{Sun}} = 1.99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$.
11. Svaka od Lagrangeovih točaka L_4 i L_5 tvori jednakostraničan trokut s masama M_1 i M_2 na donjoj slici. Koliko iznosi efektivni gravitacijski potencijal u tim točkama ako su mase komponenata dvojnog sustava $M_1 = 0.85 M_{\text{Sun}}$ i $M_2 = 0.17 M_{\text{Sun}}$?



12. Izvedite brzinu kojom masa plina prelazi površinu kontakta dviju komponenata ako se plin gustoće ρ giba brzinom v preko površine A okomite na smjer gibanja plina. Izvedite polumjer područja preklapanja dviju jednakih sfera kada je $d \ll R$. Vidi sliku.



13. Pokažite da se najveća temperatura akrecijskog diska postiže na udaljenosti $r = (49/36) R$ i da iznosi $T_{\max} = 0.488 T_{\text{disk}}$.
14. Integrirajte jednadžbu za luminozitet prstena $dL_{\text{ring}} = 4\pi r\sigma T^4 dr$ uz upotrebu jednadžbe za temperaturu diska kako bi dobili ukupan luminozitet diska.
15. Odredite najveću temperaturu akrecijskog diska oko bijelog patuljka mase $M = 0.85 M_{\text{Sun}}$ i polumjera $R = 6\,600 \text{ km} = 0.0095 R_{\text{Sun}}$ s brzinom prijenosa mase 10^{13} kg/s ($1.6 \cdot 10^{-10} M_{\text{Sun}}/\text{god}$) te oko neutronske zvijezde mase $M = 1.4 M_{\text{Sun}}$ i polumjera $R = 10 \text{ km}$ s brzinom prijenosa mase 10^{14} kg/s ($1.6 \cdot 10^{-9} M_{\text{Sun}}/\text{god}$). U kojim spektralnim područjima se opažaju ovi diskovi i koliko iznose njihovi luminoziteti? Luminozitet Sunca iznosi $3.85 \cdot 10^{26} \text{ W}$, a masa $M_{\text{Sun}} = 1.99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$.
16. Z Cha je jedna od najpoznatijih patuljastih nova koja se sastoji od $M_1 = 0.85 M_{\text{Sun}}$ bijelog patuljka polumjera $R = 0.0095 R_{\text{Sun}}$ kao primarne komponente i zvijezde glavnog niza kasnog M-tipa mase $M_2 = 0.17 M_{\text{Sun}}$ kao sekundarne komponente. Orbitalni period sustava iznosi $P = 0.0745$ dana. Koliko iznosi razmak između komponenata, a koliko udaljenost pojedinih komponenata od unutarnje Lagrangeove točke? Koliko iznosi polumjer kružne orbite materijala koji pada na bijelog patuljka? Na osnovu toga procijenite vanjski polumjer akrecijskog diska. Ako je izmjerena brzina prijenosa mase od $1.3 \cdot 10^{-9} M_{\text{Sun}}/\text{god}$, koliko iznosi najveća temperatura diska i ukupni luminozitet diska? Ukoliko prosječna erupcija patuljaste nove traje oko 10 dana, odredite ukupnu oslobođenu energiju i apsolutni sjaj patuljaste nove za vrijeme erupcije. Zanemarite malu količinu svjetlosti kojom primarna i sekundarna komponenta pridonose luminozitetu. Polumjer Sunca iznosi $6.96 \cdot 10^5 \text{ km}$, apsolutni sjaj +4.74 mag, luminozitet $3.85 \cdot 10^{26} \text{ W}$, masa $M_{\text{Sun}} = 1.99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, a polumjer $R_{\text{Sun}} = 6.96 \cdot 10^5 \text{ km}$.
17. Koristeći podatke za Z Cha, odredite brzinu prijenosa mase kroz akrecijski disk u patuljastoj novoj čiji je apsolutni bolometrijski sjaj 7.5 mag izvan erupcije, a koji se poveća za 3 mag za vrijeme erupcije. Apsolutni sjaj Sunca iznosi +4.74 mag, luminozitet $3.85 \cdot 10^{26} \text{ W}$, masa $M_{\text{Sun}} = 1.99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, a polumjer $R_{\text{Sun}} = 6.96 \cdot 10^5 \text{ km}$.
18. Pokažite da je promjena orbitalnog perioda uzrokovana prijenosom mase u zatvorenom sustavu u kojem je kutna količina gibanja očuvana jednaka:

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = 3\dot{M}_1 \frac{M_1 - M_2}{M_1 M_2}$$

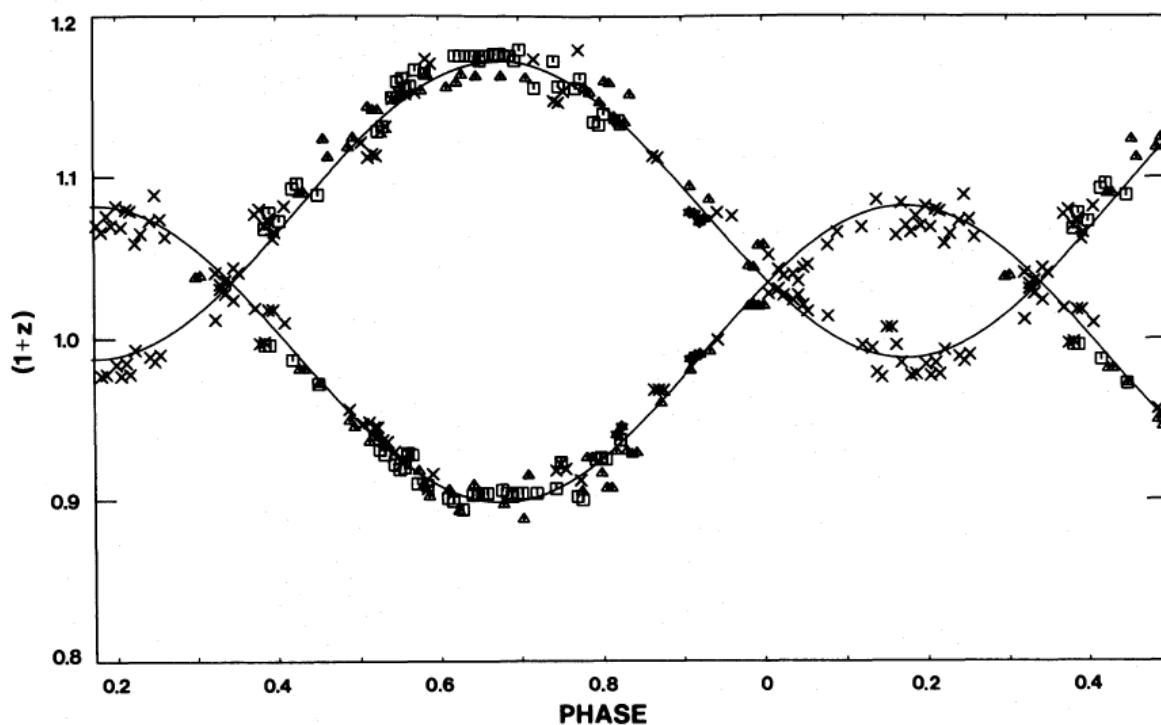
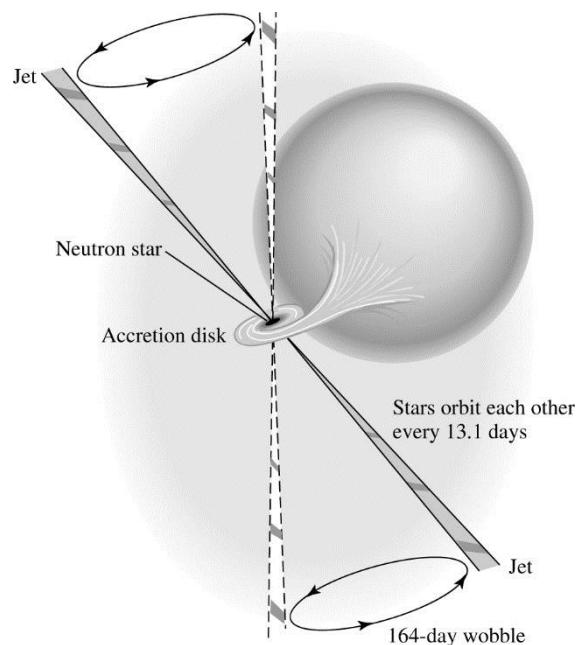
U Cep je sustav tipa Algola s orbitalnim periodom 2.49 dana koji se u posljednjih 100 godina povećao za oko 20 s. Mase komponenata iznose $M_1 = 2.9 M_{\text{Sun}}$ i $M_2 = 1.4 M_{\text{Sun}}$. Odredite brzinu

prijenosa mase ukoliko je produživanje orbitalnog perioda uzrokovano ovim mehanizmom. Koja od komponenata gubi, a koja dobiva masu?

19. Promatrajte površinski sloj vodika mase $10^{-4} M_{\text{Sun}}$ na površini bijelog patuljka mase $0.85 M_{\text{Sun}}$ i polumjera $0.0095 R_{\text{Sun}}$. Ukoliko se taj sloj fuzijom u potpunosti pretvori u helij, odredite koliko će dugo trajati erupcija nove ukoliko je luminozitet bijelog patuljka vrlo blizu Eddingtonovog luminoziteta. Što to govori o količini vodika koji sudjeluje u fuziji ako znamo da erupcija nove prosječno traje oko 100 dana? Usporedite gravitacijsku potencijalnu energiju ovog sloja vodika prije erupcije nove s kinetičkom energijom izbačenog sloja kada se nalazi daleko od bijelog patuljka s brzinom 1000 km/s . $M_{\text{Sun}} = 1.99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, $R_{\text{Sun}} = 6.96 \cdot 10^5 \text{ km}$.
20. Odredite fotosfersku temperaturu vatrene kugle za vrijeme erupcije nove uz pretpostavku da vatrena kugla ima Eddingtonov luminozitet. Masa bijelog patuljka iznosi $0.85 M_{\text{Sun}}$, a pretpostavite da se površinski sloj u potpunosti sastoji od vodika. Brzina izbačaja mase je oko 10^{19} kg/s , a brzina čestica oko 1000 km/s .
21. Ukoliko faza konstantnog hidrostatičkog gorenja vodika na bijelom patuljku tijekom erupcije nove traje oko 100 dana, odredite konstantnu brzinu izbačaja mase za površinski sloj mase $10^{-4} M_{\text{Sun}}$.
22. Poznato je da se za svaki kilogram ugljika-kisika ($30\% {}^{12}\text{C}$) koji se fuzijom pretvori u željezo, oslobođi $7.3 \cdot 10^{13} \text{ J}$ energije. Odredite masu željeza kojeg se treba stvoriti fuzijom da bi bijeli patuljak mase $1.38 M_{\text{Sun}}$ i polumjera 1600 km postao gravitacijski nevezan. Koliko bi još željeza trebalo nastati da bi dobili supernovu tipa Ia s prosječnom brzinom izbačenih čestica od 5000 km/s ? U realističnom modelu bijelog patuljka gravitacijska potencijalna energija iznosi $-5.1 \cdot 10^{43} \text{ J}$.
23. Izvedite uvjet za uništenje dvojnog sustava pri erupciji supernove.
24. Odredite Alfvenov polumjer i akrecijski luminozitet pri prijenosu mase brzinom 10^{13} kg/s ($1.6 \cdot 10^{10} M_{\text{Sun}}/\text{god}$) na tipičnog bijelog patuljka mase $0.85 M_{\text{Sun}}$ i polumjera 6600 km na čijoj se površini javlja magnetsko polje od 1000 T . Usporedite dobiveni rezultat s razmakom između komponenata u kataklizmičkim promjenjivim zvijezdama. Da li je moguć nastanak akrecijskog diska pri ovako jakom magnetskom polju? Odredite Alfvenov polumjer i akrecijski luminozitet za neutronsku zvijezdu mase $1.4 M_{\text{Sun}}$ i polumjera 10 km , sa površinskim magnetskim poljem od 10^8 T koja se nalazi u dvojnom sustavu pri čemu je brzina prijenosa mase s druge komponente na neutronsku zvijezdu jednaka 10^{14} kg/s ($1.6 \cdot 10^{-9} M_{\text{Sun}}/\text{god}$). Koliko iznosi polumjer kružne orbite materije koja se kruži oko neutronske zvijezde? Da li je moguć nastanak akrecijskog diska? Usporedite akrecijski luminozitet s vrijednošću Eddingtonovog luminoziteta.
25. Odredite vrijednost magnetskog polja za koje je Alfvenov polumjer jednak polumjeru bijelog patuljka mase $0.85 M_{\text{Sun}}$, polumjera $0.0095 R_{\text{Sun}}$ i prijenosa mase 10^{13} kg/s . Izračunajte isto i za neutronsku zvijezdu mase $1.4 M_{\text{Sun}}$, polumjera 10 km i prijenosa mase 10^{14} kg/s .
26. Odredite vrijeme života dvojnog rendgenskog sustava ukoliko je ono određeno vremenom potrebnim za prijenos mase jednake Sunčevoj masi. Brzina prijenosa mase u takvom sustavu iznosi oko 10^{14} kg/s .
27. X-ray pulsar 4U0115+63 ima period 3.61 s i luminozitet u rendgenskom području od $L_x = 3.8 \cdot 10^{29} \text{ W}$. Pod pretpostavkom da se radi o neutronskoj zvijezdi mase $1.4 M_{\text{Sun}}$ i polumjera 10 km , s površinskim magnetskim poljem od 10^8 T , odredite brzinu prijenosa mase i vrijednost \dot{P}/P . Izračunajte isto za bijelog patuljka mase $0.85 M_{\text{Sun}}$ i polumjera 6600 km sa površinskim magnetskim poljem od 1000 T . Za koji od ova dva modela se postiže bolje slaganje s opaženom vrijednosti $\dot{P}/P = -3.2 \cdot 10^{-5} \text{ god}^{-1}$? Pretpostavite $\alpha = 0.5$.
28. Nacrtajte dvojni sustav pulsara SMC X-1, uključujući i sekundarnu komponentu. Odredite položaj centra mase sustava i unutarnje Lagrangeove točke ukoliko je primarna komponenta neutronska

zvijezda mase $1.4 M_{\text{Sun}}$. Sekundarna komponenta je div mase $17 M_{\text{Sun}}$ i polumjera $16.5 R_{\text{Sun}}$. Komponente su međusobno razmaknute 0.107 AU.

29. Relativistički mlazovi ($v/c = 0.26$) koji nastaju u akrecijskom disku u SS 433 prebrisuju stošce u prostoru kako disk precesira (vidi sliku). Kut između središnje osi ovih stožaca i doglednice iznosi 79° , dok vrh stošca tvori kut od 40° . Ovakva konfiguracija pokazuje da se u nekom trenutku precesijskog ciklusa, mlazovi gibaju točno okomito na smjer doglednice. No sa druge strane, krivulje radikalnih brzina dobivene iz Dopplerovog pomaka spektralnih linija nigdje ne pokazuju vrijednost nula, već $10\,000 \text{ km/s}$ ($z \approx 0.04$, vidi sliku). Objasnite ovu nepodudarnost u okviru transverzalnog Dopplerovog pomaka. Brzinu samog dvojnog sustava možete zanemariti jer iznosi samo oko 70 km/s .



30. Udaljenost do SS 433 je procijenjena na oko 5.5 kpc, dok se kutna udaljenost između SS 433 i područja emisije X-zraka gdje mlazovi međudjeluju s plinovima u W50 maglici proteže sve do 44'. Procijenite najkraće vrijeme za koje su mlazovi aktivni. Brzina mlazova iznosi $v/c = 0.26$.
31. PSR 1953+29 je milisekundni pulsar s periodom 6.133 ms. Izmjerena promjena perioda tog pulsara iznosi $\dot{P} = 3 \cdot 10^{-20}$. Procijenite starost ovog milisekundnog pulsara pod pretpostavkom da nije došlo do akrecije koja bi promijenila pulsarov spin. Procijenite vrijednost magnetskog polja pulsara. Pretpostavite da pulsar ima tipičnu masu neutronske zvijezde $1.4 M_{\text{Sun}}$ i polumjer 10 km, te da se rotacijska i magnetska os nalaze pod pravim kutom.
32. Integrirajte jednadžbu za promjenu perioda X-ray pulsara kako bi procijenili vrijeme potrebno da milisekundni pulsar ubrza s početnog perioda od 100 s (duže od najduže opaženog perioda pulsara od 11.7 s i unutar vrijednosti mogućih perioda X-ray pulsara) na konačni period od 1 ms. Pretpostavite da neutronska zvijezda ima masu $1.4 M_{\text{Sun}}$ i polumjer 10 km, uz magnetsko polje od 10^4 T na površini pulsara i brzinu prijenosa mase od 10^{14} kg/s, dok je $\alpha = 0.5$. Koliko se mase prenese u tom vremenu, izraženo u kilogramima i Sunčevim masama? Masa Sunca iznosi $1.99 \cdot 10^{30}$ kg.