Astronomija i astrofizika II

Politropski indeksi i Lane-Emdenova jednadžba

1. Opišite strukturu gustoće *n* = 0 politropa.
2. Izvedite izraz za ukupnu masu politropa s indeksom *n* = 5 i pokažite da je njegova masa konačna iako mu radijus teži beskonačno, $\xi_1 \to \infty$
3. Pogledajte (ili nacrtajte) profil gustoće politropskih modela *n* = 0, 1 i 5 (graf ovisnosti ρ_n/ρ_c o r/λ_n). Što možete zaključiti o koncentraciji gustoće s radijusom za rastući politropski indeks? Što možete zaključiti o koncentraciji gustoće za adijabatski konvektivni model zvijezde u usporedbi s modelom u radijativnoj ravnoteži?

DODATNI BODOVI (7 bodova):

Napišite program (ili ručno izračunajte) kojim ćete odrediti ovisnost $D_n(\xi)$ o ξ i ovisnost ρ/ρ_c o r/λ_n za politropske indekse 0, 1, 1.5, 3 i 5 te nacrtajte pripadajuće grafove (nemojte koristiti programski jezik Fortran 95)

Upute: Koristite Eulerovu metodu za integriranje.

Diferencijalna jednadžba drugog reda kakva je Lane-Emdenova jednadžba može se napisati kao dvije diferencijalne jednadžbe prvog reda od kojih je jedna diferencijalna jednadžba derivacija druge koju želite riješiti.
Lane-Emdenova jednadžba:

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left[\xi^2\frac{dD_n}{d\xi}\right] = -D_n^n$$
$$\frac{d^2D_n}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi}\frac{dD_n}{d\xi} + D_n^n = 0$$

Definiramo novu funkciju:

$$f_n(\xi) = \frac{dD_n}{d\xi} \qquad (1)$$

Dobijemo:

$$\frac{df_n}{d\xi} = -D_n^n - \frac{2}{\xi}\,f_n \qquad (2)$$

Jednadžbe (1) i (2) mogu se numerički integrirati koristeći Eulerovu metodu kako bi dobili $D_n(\xi)$. Npr. jednadžbu (1) možemo riješiti kao:

$$dD_n = f_n(\xi)d\xi \quad \Longrightarrow \quad \Delta D_n = f_n(\xi)\Delta\xi$$
$$D_n(\xi_{i+1}) - D_n(\xi_i) = (\xi_{i+1} - \xi_i)f_n(\xi)$$

Razliku po ξ možemo definirati kao korak u računu:

$$h = \xi_{i+1} - \xi_i = \Delta\xi$$

odnosno:

$$\xi_{i+1} = h + \xi_i$$

Konačno rješavamo numerički (u petlji) pomoću računala:

$$D_n(\xi_{i+1}) = D_n(\xi_i) + hf_n(\xi)$$

za zadani proizvoljni korak h (poželjno je da bude što manji, i to $h \ll 1$)

Funkciju $f_n(\xi)$ dobijemo na sličan način iz relacije (2):

$$df_n = \left(-D_n^n - \frac{2}{\xi} f_n\right) d\xi \quad \Rightarrow \quad \Delta f_n = \left(-D_n^n - \frac{2}{\xi} f_n\right) \Delta\xi$$

Dalje nastavite sami. Funkciju ρ/ρ_c dobijete iz $\frac{\rho}{\rho_c} = D_n^n$