# FIZIKA III: VALOVI I OPTIKA

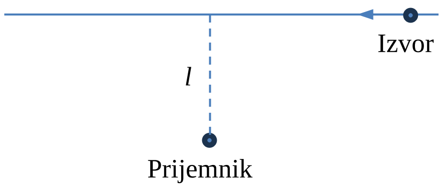
Prvi kolokvij 12. 12. 2023.

ZADATAK 1 Po žici duljine $L$ i mase $M$, duljinska gustoća mijenja se linearno $\mu = kx$, gdje je $x$ udaljenost od jednog kraja žice, a $k$ je konstanta.
(a) Pokažite da je $M = kL^2/2$.
(b) Pokažite da je vrijeme u kojem se val proširi s jednog na drugi kraj žice jednako

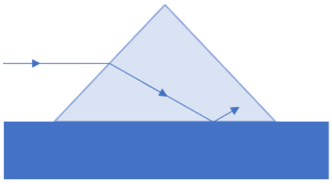
$$t_0 = \sqrt{\frac{8ML}{9F_N}}$$

gdje je $F_N$ napetost žice.

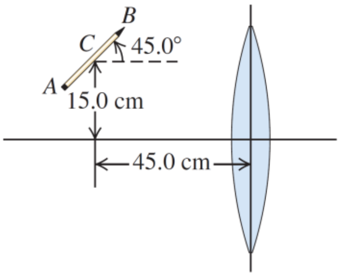
ZADATAK 2 Izvor zvuka frekvencije $\nu_0$ = 1,8 kHz giba se jednoliko po pravcu koji je udaljen od mirnog promatrača za $l$ = 250 m. Brzina izvora iznosi $\eta v_z$ , gdje je $v_z$ brzina zvuka, a $\eta$ = 0,8. Nađite:
(a) frekvenciju zvuka koju prima promatrač u trenutku kad je izvor najbliži prijemniku;
(b) udaljenost između izvora i promatrača u trenutku kad promtarač prima zvuk frekvencije $\nu = \nu_0$ .




ZADATAK 3 Koliki mora biti kut pri vrhu prizme, čiji je presjek jednakokračan trokut, da bi se zraka paralelna s horizontalnom plohom prizme i u ravnini njezina presjeka, totalno reflektirala od horizontalne plohe prizme? Horizontalna ploha dodiruje površinu vode. Indeks loma stakla od kojeg je načinjena prizma je $n_S$ = 3/2, a indeks loma vode je $n_V$ = 4/3.

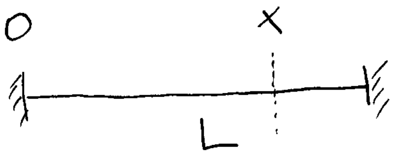


ZADATAK 4 Olovka duljine 16 cm postavljena je pod kutom 45° u odnosu na optičku os, pri čemu je središte olovke 15 cm iznad osi i 45 cm od leće. Žarišna daljina leće iznosi 20 cm. Pretpostavite da je promjer leće dovoljno velik da smijete upotrijebiti paraaksijalnu aproksimaciju.
(a) Gdje će nastati slika olovke? Nađite položaje slika točaka $A$, $B$ i $C$ na olovci koje su prikazane na slici. To su krajnje točke i središnja točka olovke.
(b) Kolika je duljina slike, odnosno, udaljenost između slika točaka $A$ i $B$?




ZADATAK 5 Neka dalekovidna osoba ne razabire jasno predmete koji su njenom oku bliži od 45 cm. Odredi jakost leća naočala koje joj omogućuju da vidi jasno predmete udaljene 25 cm od oka.

$\boxed{1.}$




(a) Duljinska gustoća mijenja se linearno, $\mu = kx$

pa je ukupna masa žice

$$M = \int_0^L kx\,dx = k\frac{x^2}{2}\Big|_0^L = k\frac{L^2}{2}$$

(b) Brzina vala koji se širi po žici je

$$\frac{dx}{dt} = v = \sqrt{\frac{F_N}{\mu}} = \sqrt{\frac{F_N}{kx}} = \sqrt{\frac{F_N}{k}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{x}\,dx = \sqrt{\frac{F_N}{k}}\,dt \quad \Big/ \int$$

$$\int_0^L \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^L = \frac{2}{3}L^{3/2}$$

$$\int_0^{t_0} dt = t_0$$

Imamo

$$\frac{2}{3}L^{3/2} = \sqrt{\frac{F_N}{k}}\cdot t_0$$

$$t_0 = \frac{2}{3}L^{3/2}\sqrt{\frac{k}{F_N}} = \frac{2}{3}L^{3/2}\sqrt{\frac{2M}{L^2F_N}} = \sqrt{\frac{8ML}{9F_N}}$$

$\boxed{2.}$

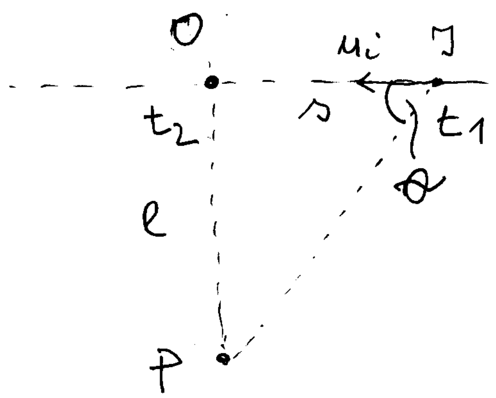
$\nu_0 = 1{,}8\ \mathrm{kHz}$

$\ell = 250\ \mathrm{m}$

$u_i = \eta v_z \, ; \ \eta = 0{,}8$

---

(a) Tražimo frekvenciju zvuka koju prima promatrač u trenutku $t_2$ kad je izvor najbliži promatraču. Zvuk te frekvencije je izvor emitirao u trenutku $t_1 < t_2$, dakle, prije nego je izvor najbliži promatraču jer je potrebno neko vrijeme za širenje vala.




Frekvencija zvuka kojeg prima promatrač je

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 - u_i \cos\theta / v_z} \ ; \ u_i > 0$$

$$= \frac{\nu_0}{1 - \eta \cos\theta}$$

U svakom trenutku vrijedi

$$\cos\theta = \frac{s}{\sqrt{\ell^2 + s^2}}$$

gdje je $s$ ~~udaljenost~~ udaljenost izvora do točke gdje je izvor najbliže promatraču, točka O. U trenutku $t_1$, izvor emitira zvuk tako da se u trenutku $t_2$ izvor nađe u točki O, a zvučna fronta proširi se do promatrača. Prema tome

$$s_1 = s(t_1) = u_i \cdot (t_2 - t_1) = u_1 \cdot \Delta t$$

$$\sqrt{s^2(t_1) + \ell^2} = v_z \cdot (t_2 - t_1) = v_z \cdot \Delta t$$

Za $\theta_1 = \theta(t_1)$ imamo

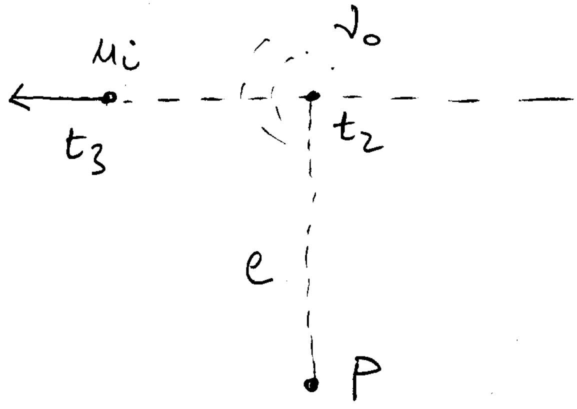
$$\cos\theta_1 = \frac{s_1}{\sqrt{s_1^2 + \ell^2}} = \frac{u_i \cdot \Delta t}{v_z \cdot \Delta t} = \frac{u_i}{v_z} = \eta$$

Tada je frekvencija

$$\nu(t_1) = \frac{\nu_0}{1 - \frac{u_i}{v_z}\cos\theta_1} = \frac{\nu_0}{1-\eta^2} = \frac{1800}{1-0{,}8^2}$$

$$= 5000\ \text{Hz} = 5\ \text{kHz}$$

(b) Ako izvor J emitira zvuk frekvencije $\nu_0$ u trenutku $t_2$ kad je najbliži promatraču, valu treba neko vrijeme da stigne do promatrača; neka je to trenutak $t_3$, a vrijeme širenja $\Delta t_1 = t_3 - t_2$




$$\ell = v_z \cdot \Delta t_1$$

$$\Delta t_1 = \frac{\ell}{v_z}$$

Za isto vrijeme se izvor pomakne ulijevo za $s(t_3) = s_3$

$$s_3 = u_i \cdot \Delta t_1 = \frac{u_i}{v_z} \cdot l = \eta \cdot l$$

Udaljenost izvora i promatrača u trenutku $t_3$ je

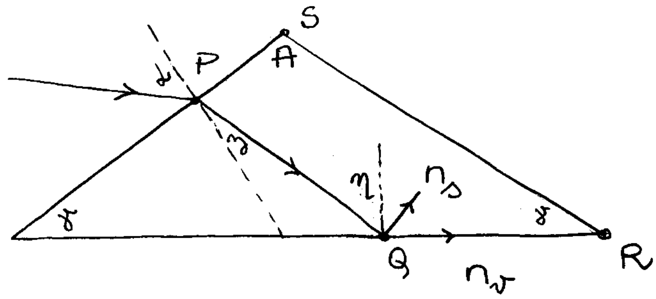
$$d = \sqrt{s_3^2 + l^2} = \sqrt{\eta^2 l^2 + l^2} = l\sqrt{1+\eta^2} = 250 \cdot \sqrt{1+0{,}64}$$

$$= 320{,}15 \text{ m}$$

**4.6**

$n_s = 3/2$

$n_v = 4/3$




$$\sin \eta_g = \frac{n_v}{n_s}$$

Uvjet za totalnu refleksiju

$$\eta \geq \eta_g$$

$$\sin \eta \geq \frac{n_v}{n_s}$$

Očito treba naći $\eta = \eta(A)$, a to nije trivijalno.

$$\alpha + \gamma = \frac{\pi}{2}$$

$$\gamma = \frac{1}{2}(\pi - A) \quad \text{(jednakokračan trokut)}$$

Odavdje je $\alpha = \frac{A}{2}$

Iz četverokuta PQRS

$$\frac{\pi}{2} - z + \frac{\pi}{2} + \eta + \gamma + A = 2\pi$$

$$-z + \eta + \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} + A = \pi$$

$$\eta = \frac{\pi}{2} + z - \alpha$$

Uvrstimo u uvjet za totalnu refleksiju

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha - z)\right) \geq \frac{n_v}{n_s}$$

$$\cos(\alpha - z) \geq \frac{n_v}{n_s}$$

$$\cos(\alpha - z) = \cos\alpha \cos z + \sin\alpha \sin z$$

$$= \sqrt{1 - \sin^2\alpha} \cdot \sqrt{1 - \sin^2 z} + \sin\alpha \sin z$$

Snellov zakon

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n_s \Rightarrow \sin\gamma = \frac{\sin\alpha}{n_s}$$

$$\sqrt{1-\sin^2\alpha}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{\sin\alpha}{n_s}\right)^2} + \sin^2\alpha\cdot\frac{1}{n_s} \geq \frac{n_v}{n_s} \quad /^2$$

$$(1-\sin^2\alpha)(n_s^2-\sin^2\alpha) \geq (n_v - \sin^2\alpha)^2$$

$$n_s^2 - \sin^2\alpha - n_s^2\sin^2\alpha + \sin^4\alpha \geq n_v^2 - 2n_v\sin^2\alpha + \sin^4\alpha$$

$$n_s^2 - n_v^2 \geq \sin^2\alpha(1+n_s^2-2n_v)$$

$$\left(\frac{n_s^2-n_v^2}{1+n_s^2-2n_v}\right)^{1/2} \geq \sin\alpha$$

$$\alpha \leq \arcsin\left(\frac{(3/2)^2-(4/3)^2}{1+\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\cdot\frac{4}{3}}\right)^{1/2} = 64{,}12^\circ$$

Kut prizme

$$A = 2\alpha \leq 128{,}24^\circ$$

**4.**

Nađimo najprije koordinate točaka A, B i C.

Duljina AC je $d(A,C) = 8$ cm. Koordinate točke A su

$$A = (x_A, y_A) = (45 + 8 \cdot \cos 45^\circ ; 15 - 8 \cdot \sin 45^\circ)$$
$$= (50{,}66 ; 9{,}43) \text{ cm}$$

Koordinate točke C su

$$C = (x_C, y_C) = (45 ; 15) \text{ cm}$$

Koordinate točke B su

$$B = (x_B, y_B) = (45 - 8 \cdot \cos 45^\circ ; 15 + 8 \cdot \sin 45^\circ)$$
$$= (39{,}34 ; 20{,}66) \text{ cm}$$

(a) Slika točke A

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{20} - \frac{1}{50{,}66} = 0{,}03 \text{ cm}^{-1}$$

$$s' = 33{,}05 \text{ cm} ; \quad s' = x_A'$$

Povećanje slike: $h = y_A$

$$m = -\frac{s'}{s} = \frac{h'}{h} \Rightarrow h' = -\frac{s'}{s} \cdot h = -\frac{33{,}05}{50{,}66} \cdot 9{,}43$$
$$= -6{,}15 \text{ cm}$$

Prema tome, slika točke A nalazi se na položaju

$$(x_A', y_A') = (33{,}05 ; -6{,}15) \text{ cm}$$

Slika točke B

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{20} - \frac{1}{39{,}34} = 0{,}025\ \text{cm}^{-1}$$

$$s' = 40{,}68\ \text{cm} \ ; \quad s' = x_B'$$

$$m = -\frac{s'}{s} = \frac{h'}{h} \Rightarrow h' = -\frac{s'}{s} \cdot h$$

$$h = y_B \ ; \quad h' = -\frac{40{,}68}{39{,}34} \cdot 20{,}66 = -21{,}36\ \text{cm}$$

Koordinate točke B su:

$$(x_B', y_B') = (40{,}68 ; -21{,}36)\ \text{cm}$$

Slika točke C

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{20} - \frac{1}{45} = 0{,}028\ \text{cm}^{-1}$$

$$s' = 36\ \text{cm} \ ; \quad x_C' = 36\ \text{cm}$$

$$h' = -\frac{s'}{s} \cdot h$$

$$h = y_C' = 15\ \text{cm}$$

$$h' = -\frac{36}{45} \cdot 15 = -12\ \text{cm}$$

Koordinate točke C su:

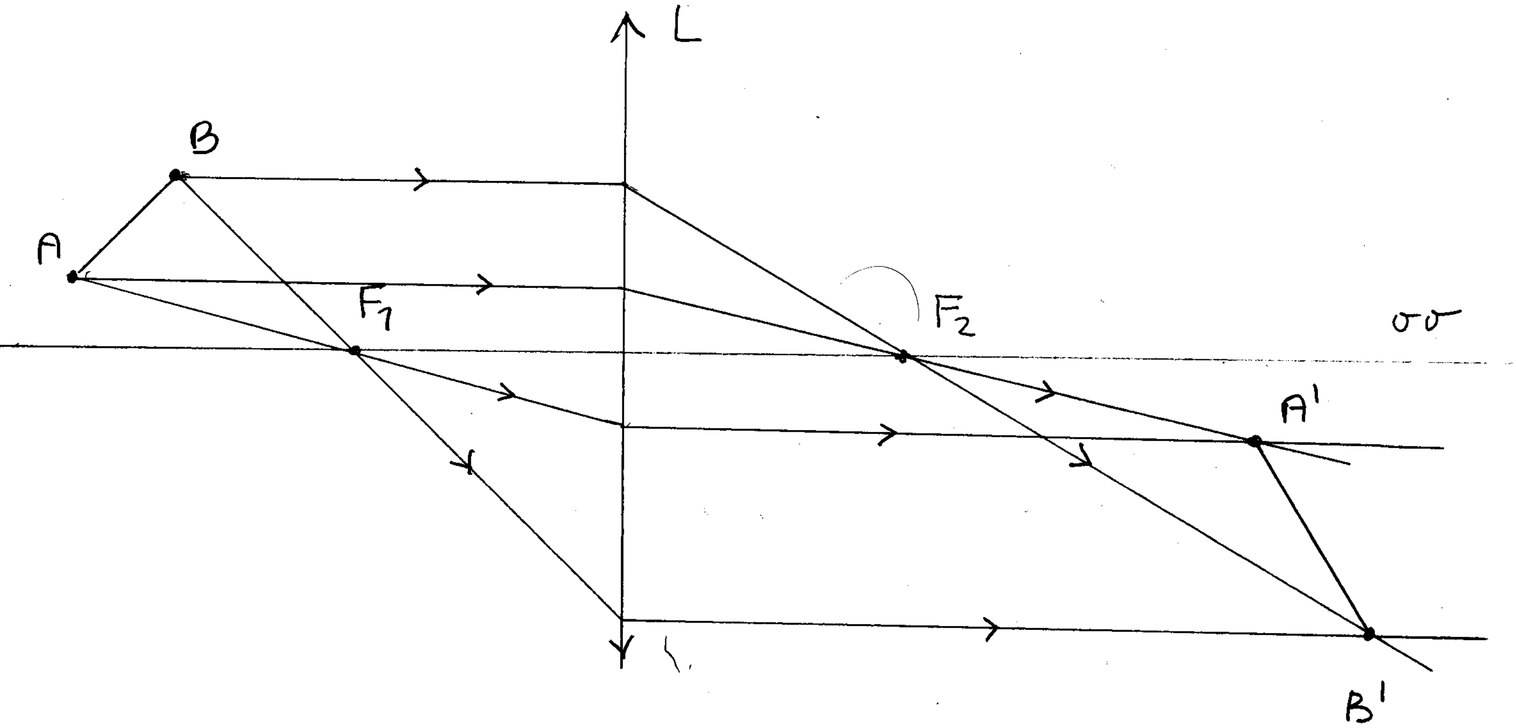
$$(x_C', y_C') = (36, -12)\ \text{cm}$$

(b) Duljina slike je

$$d' = \sqrt{(x_{A}' - x_{B}')^2 + (y_{A}' - y_{B}')^2} = \sqrt{(33{,}05 - 40{,}68)^2 + (-6{,}15 + 21{,}36)^2}$$

$$= 17{,}02 \text{ cm}$$

Slika je nešto dulja! Konstrukcija slike (približna!)

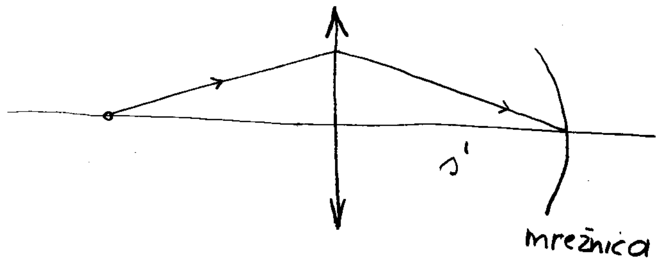


$\boxed{8.1}$

$s_1 = 45\text{ cm}$

$s_2 = 25\text{ cm}$

Na udaljenosti od 45 cm osoba još uvijek vidi, tj. slika se projicira na mrežnicu

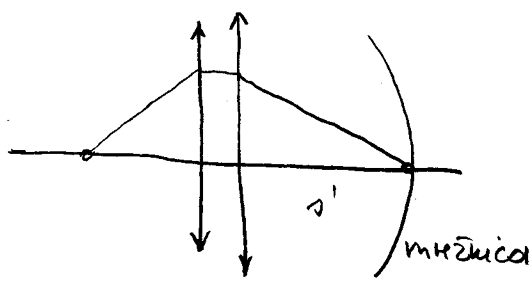



Vrijedi

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} = j$$

gdje j jakost leće oka.

Ako stavimo naočale, za dalekovidne osobe to su naočale sa konvergentnom lećom, tada će osoba vidjeti i na 25 cm




Vrijedi

$$\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} = j_s$$

gdje je f fokalna duljina dubleta leća $(d \approx 0)$: leće oka i leće od naočala. Vrijedi

$$\frac{1}{f} + \frac{1}{f_N} = \frac{1}{f} \quad \text{ili}$$

$$j + j_N = j_s$$

$j_N$ jakost leća naočala, $j_s$ jakost sistema leća.

Imamo,

$$\frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_1} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{f}$$

$$= j_s - j$$

$$= j_N$$

$$\frac{1}{25\cdot10^{-2}} - \frac{1}{45\cdot10^{-2}} = 1{,}78 \ m^{-1}$$ [stara jedinica je dioptrija]