

MATEMATIČKE METODE FIZIKE I

Pregled formula

Velimir Labinac

Sveučilište u Rijeci, Fakultet za fiziku,

E-mail: vlabinac@phy.uniri.hr

WWW: <https://www.phy.uniri.hr/~vlabinac>

3. siječnja 2024.

Sadržaj

I FUNKCIJE VIŠE VARIJEABLI	5
1 Neprekinitost i limes. Parcijalne derivacije i diferencijali prvog reda	5
1.1 Otvoreni skupovi	5
1.1.1 Povezan skup. Područje u \mathbb{R}^n	5
1.2 Nivo-krivulje	5
1.3 Nivo-plohe	5
1.4 Limes funkcije	5
1.4.1 Iterirani limesi	6
1.5 Diferencijabilnost	6
1.6 Parcijalna derivacija	6
1.7 Totalni prirast	6
1.8 Totalni diferencijal	7
2 Diferenciranje složenih funkcija. Derivacija funkcije u zadanom smjeru	8
2.1 Egzaktna diferencijalna forma	8
2.2 Rotacija vektorske funkcije	8
2.3 Konzervativno polje. Gradijent skalarne funkcije	8
2.3.1 Određivanje skalarnog potencijala	9
2.4 Diferenciranje složenih funkcija	9
2.5 Geometrijsko značenje gradijenta	9
2.5.1 Normala na krivulju $g(x, y) = 0$	10
2.6 Derivacija funkcije u zadanom smjeru	10
3 Parcijalne derivacije i diferencijali viših redova. Taylorova formula	11
3.1 Parcijalne derivacije viših redova	11
3.1.1 Schwarzov teorem	11
3.2 Diferencijali viših redova	11
3.2.1 Hesseova matrica	11
3.2.2 Diferencijal n -tog reda	12
3.3 Diferenciranje implicitno zadanih funkcija	12
3.4 Taylorova formula	12
3.4.1 Maclaurinova formula	13
3.4.2 Razvoj u red za male priraste argumenta	13
3.4.3 Primjer	13
4 Ekstremi funkcija više varijabli	14
4.1 Minimum i maksimum funkcije	14
4.2 Stacionarne točke	14
4.3 Dovoljni uvjeti za ekstreme funkcije	14
4.3.1 Uvjeti za minimum	14
4.3.2 Uvjeti za maksimum	14
4.3.3 Ostali slučajevi	15
4.3.4 Funkcije n varijabli	15
4.4 Uvjetni ekstremi	15
4.4.1 Lagrangeov množitelj	15
4.4.2 Broj jednadžbi veze	16

4.5	Dovoljni uvjeti za vezane ekstreme	16
4.5.1	Primjer	16
II VIŠESTRUKI INTEGRALI		17
5 Dvostruki integral		17
5.1	Riemannov integral na \mathbb{R}^2	17
5.1.1	Dvostruki integral u Kartezijevim koordinatama	17
5.1.2	Promjenjive granice u integralima	17
5.2	Fubinijev teorem	18
5.3	Promjena varijabli u dvostrukom integralu	18
5.3.1	Primjer: polarne koordinate	18
5.4	Nekoliko primjena dvostrukog integrala	18
5.4.1	Površina područja u xy -ravnini	18
5.4.2	Volumen ispod plohe	19
5.4.3	Površina plohe	19
6 Trostruki integral		20
6.1	Riemannov integral na \mathbb{R}^3	20
6.1.1	Trostruki integral u Kartezijevim koordinatama	20
6.2	Promjena varijabli u trostrukom integralu	20
6.2.1	Primjer: cilindričke koordinate	21
6.2.2	Primjer: sferne koordinate	21
6.3	Nekoliko primjena trostrukog integrala	21
6.3.1	Volumen područja u \mathbb{R}^3	21
6.3.2	Centar mase tijela	21
7 Razne metode izračuna integrala		22
7.1	Leibnitzovo pravilo	22
7.1.1	Varijabilne granice	22
7.2	Nepravi integrali	22
III VEKTORSKA ANALIZA. TENZORI		23
8 Operator nabla. Krivocrtne koordinate		23
8.1	Skalarno i vektorsko polje	23
8.2	Definicija nable	23
8.3	Osnovne operacije s nablom	23
8.3.1	Gradijent	23
8.3.2	Divergencija	23
8.3.3	Rotacija	24
8.3.4	Laplaceov operator	24
8.4	Usmjerena derivacija	24
8.4.1	Usmjerena derivacija skalarnog polja	24
8.4.2	Usmjerena derivacija vektorskog polja	25
8.5	Važniji identiteti s nablom	25
8.5.1	Osnovni identiteti	25
8.5.2	Umnožak skalarnih, te skalarnih i vektorskih polja	25
8.5.3	Umnošci vektorskih polja	25
8.6	Cilindričke koordinate (ρ, ϕ, z)	25

8.6.1	Definicija	25
8.6.2	Veza između cilindričkih i Kartezijevih koordinata	26
8.6.3	Vektor položaja	26
8.6.4	Jedinični vektori	26
8.6.5	Vektor infinitezimalnog pomaka	26
8.6.6	Element volumena	27
8.6.7	Operator ∇ u cilindričkim koordinatama	27
8.7	Sferne koordinate (r, θ, ϕ)	27
8.7.1	Definicija	27
8.7.2	Veza između sfernih i Kartezijevih koordinata	28
8.7.3	Vektor položaja	28
8.7.4	Jedinični vektori	28
8.7.5	Vektor infinitezimalnog pomaka	28
8.7.6	Element volumena	28
8.7.7	Operator ∇ u sfernim koordinatama	29
8.8	Opće krivocrtne koordinate (u_1, u_2, u_3)	29
8.8.1	Jednadžbe transformacije koordinata	29
8.8.2	Jedinični vektori	29
8.8.3	Koordinatne plohe i krivulje	30
8.8.4	Vektor infinitezimalnog pomaka	30
8.8.5	Element volumena	30
8.8.6	Metrički tenzor	30
8.8.7	Osnovne operacije s nablom u krivocrtnim koordinatama	31
9	Frenetove formule. Diracova delta funkcija	32
9.1	Jordanov luk. Glatka parametrizacija krivulje	32
9.1.1	Po dijelovima glatka krivulja. Zatvorena krivulja	32
9.1.2	Duljina luka krivulje. Prirodna parametrizacija	32
9.2	Trobrid pratilec krivulje, $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$	32
9.2.1	Trobrid pratilec u bilo kojoj parametrizaciji	33
9.3	Frenetove formule	33
9.3.1	Izračun zakrivljenosti i torzije	34
9.4	Definicija Diracove delta funkcije	34
9.4.1	Važnija svojstva	34
9.5	Derivacija δ -funkcije: $\delta'(x)$	34
9.5.1	Važnija svojstva funkcije $\delta'(x)$ i viših derivacija	35
9.6	δ -funkcija u tri dimenzije	35
9.7	δ -funkcija u sfernim koordinatama (r, θ, ϕ)	35
9.8	Laplace funkcije $1/r$	35
10	Krivuljni integrali. Cirkulacija vektorskog polja. Stokesov teorem	36
10.1	Definicija krivuljnog integrala	36
10.1.1	Orientacija krivulje	36
10.1.2	Krivuljni integrali prve vrste	36
10.1.3	Krivuljni integrali druge vrste	36
10.1.4	Cirkulacija vektorskog polja	36
10.1.5	Orientacija plohe i rubne krivulje	37
10.2	Stokesov teorem	37
10.2.1	Stokesov teorem za skalarno polje	37
10.2.2	Greenov teorem	37

10.3 Teorem o konzervativnim poljima	37
11 Plošni integrali. Tok vektorskog polja	39
11.1 Ploha u prostoru	39
11.2 Plošni integrali prve vrste	39
11.2.1 Definicija	39
11.3 Plošni integrali druge vrste	39
11.3.1 Definicija	39
11.4 Element površine i vektor normale	40
11.4.1 Parametarske jednadžbe plohe	40
11.4.2 Ploha zadana implicitnom jednadžbom	41
11.4.3 Ploha zadana eksplisitnom jednadžbom	41
12 Teorem o divergenciji. Srodni teoremi	42
13 Tenzorski račun	43
IV PRILOZI	44
14 Vektori	44
14.1 Vektorski i skalarni produkt	44
14.2 Važniji vektorski identiteti	44
LITERATURA	45

I FUNKCIJE VIŠE VARIJABLI

1 Neprekinutost i limes. Parcijalne derivacije i diferencijali prvog reda

1.1 Otvoreni skupovi

Razmatranja pojmove neprekinutosti, limesa, diferencijabilnosti, ... uvijek se provode na otvorenom skupu. Skup $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otvoren ako za svaku točku P_0 iz Ω postoji kugla $B(P_0, \delta)$ polumjera δ oko točke P_0 takva da vrijedi $B(P_0, \delta) \subseteq \Omega$. Na taj način izbjegavamo točke na rubu za Ω koje potencijalno mogu biti problematične.

1.1.1 Povezan skup. Područje u \mathbb{R}^n

Otvoren skup $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je povezan ako za bilo koje dvije točke $A, B \in \Omega$ postoji konačno mnogo točaka $A = P_0, P_1, \dots, P_{k-1}, P_k = B$ takvih da spojnice $P_0P_1, P_1P_2, \dots, P_{k-1}P_k$ leže u Ω . Otvoren i povezan skup $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ naziva se područjem u \mathbb{R}^n .

1.2 Nivo-krivulje

Za danu funkciju $z = f(x, y)$ na \mathbb{R}^2 nivo-krivulje su definirane izrazom:

$$f(x, y) = C, \quad C \text{ je konstanta} \quad (1.1)$$

Za različite konstante C (realni brojevi) dobijemo različite nivo-krivulje. Ako funkcija $z = f(x, y)$ opisuje plohu ili dio plohe u $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, tada nivo-krivulje dobivamo presjecima ravnina $z = C$ s plohom $z = f(x, y)$.

1.3 Nivo-plohe

Za danu funkciju $u = g(x, y, z)$ na $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ nivo-plohe su definirane izrazom:

$$g(x, y, z) = K, \quad K \text{ je konstanta} \quad (1.2)$$

Za različite konstante K (realni brojevi) dobijemo različite nivo-plohe.

Ako je u skalarni potencijal, plohe $g(x, y, z) = K$ nazivaju se **ekvipotencijalnim plohama**, odnosno, ploham po kojima je potencijal konstantan.

1.4 Limes funkcije

Za realan broj L kažemo da je limes funkcije f u točki P_0 ako $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0)$ takav da $\forall P$ vrijedi

$$0 < d(P, P_0) < \delta \Rightarrow |f(P) - L| < \varepsilon \quad (1.3)$$

Iz ove definicije se vidi da je limes funkcije neovisan o putu po kojem stižemo u P_0 . Također, broj L ne mora biti povezan s definiranom vrijednosti funkcije $f(x_0)$. No, funkcija f **neprekinuta** je u točki P_0 ako je $L = f(P_0)$.

1.4.1 Iterirani limesi

Jedan od mogućih načina koji ukazuje na činjenicu da li funkcija dvije varijable $f(x, y)$ ima limes u nekoj točki P_0 , jest izračun iteriranih limesa: ako je rezultat uzimanja limesa funkcije najprije po x , onda po y , i obratno, po y pa onda po x , jednak istom broju L , smijemo posumnjati da funkcija f ima limes L u točki P_0 . Za konačan zaključak o tome je li L limes funkcije $f(x, y)$ moramo upotrijebiti definiciju (1.3).

1.5 Diferencijabilnost

Funkcija dvije varijable $f(x, y)$ je diferencijabilna (derivabilna) u točki (x_0, y_0) ako postoji polinom

$$P(h, k) = Ah + Bk \quad (1.4)$$

gdje su A i B realni brojevi, takav da vrijedi

$$\lim_{(h,k) \rightarrow 0} \frac{|f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - Ah - Bk|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0 \quad (1.5)$$

Veoma često se razmatra samo slučaj kad varijable h i k imaju konačno male vrijednosti, blizu nule. Uobičajene oznake u fizici su $h = \Delta x$ i $k = \Delta y$.

1.6 Parcijalna derivacija

Funkcija $f(x, y)$ ima parcijalnu derivaciju po varijabli x u točki (x_0, y_0) ako postoji limes

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \quad (1.6)$$

Slično, funkcija $f(x, y)$ ima parcijalnu derivaciju po varijabli y u točki (x_0, y_0) ako postoji limes

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} \quad (1.7)$$

Uobičajene oznake za parcijalnu derivaciju po x su

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{ili} \quad f_x \quad \text{ili} \quad f'_x \quad \text{ili} \quad \partial_x f \quad \text{ili} \quad D_1 f \quad (1.8)$$

Ako je funkcija diferencijabilna, onda je i neprekinuta. Također, onda ima i parcijalne derivacije. Obratne vrijedi: ako funkcija ima parcijalne derivacije, nije nužno neprekinuta i nije nužno diferencijabilna.

1.7 Totalni prirast

Totalni prirast funkcije $z = f(x, y)$ u točki (x_0, y_0) je razlika

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \quad (1.9)$$

gdje su Δx i Δy konačno mali prirasti varijabli x i y .

1.8 Totalni diferencijal

Totalni diferencijal funkcije $z = f(x, y)$ u točki (x_0, y_0) je izraz

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \quad (1.10)$$

gdje su dx i dy beskonačno mali prirasti varijabli x i y . Parcijalne derivcije u (1.10) računamo u točki (x_0, y_0) .

Ako su Δx i Δy dovoljno mali, smijemo aproksimirati

$$\Delta z_{app} \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y \quad (1.11)$$

Izraz (1.11) je u većini slučajeva lakše izračunati nego (1.9). Veoma se često koristi u fizici.

2 Diferenciranje složenih funkcija. Derivacija funkcije u zadanom smjeru

2.1 Egzaktna diferencijalna forma

Diferencijalna forma na $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy \quad (2.1)$$

naziva se egzaktnom diferencijalnom formom, ili kraće, egzaktnim diferencijalom ako vrijedi

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (2.2)$$

Uz uvjet (2.2), diferencijalna forma (2.1) jednaka je totalnom diferencijalu neke funkcije $f(x, y)$ i možemo pisati

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = -Pdx - Qdy \quad (2.3)$$

Integral funkcije f ovisi samo o početnoj točki T_1 i konačnoj točki T_2

$$\int_{T_1}^{T_2} df = f(T_2) - f(T_1) \quad (2.4)$$

2.2 Rotacija vektorske funkcije

Rotacija vektorske funkcije $\mathbf{A}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{e}_x + Q(x, y, z)\mathbf{e}_y + R(x, y, z)\mathbf{e}_z$ na $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ definira se izrazom

$$\begin{aligned} \text{curl } \mathbf{A} &\equiv \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{e}_x (\partial_y R - \partial_z Q) - \mathbf{e}_y (\partial_x R - \partial_z P) + \mathbf{e}_z (\partial_x Q - \partial_y P) \end{aligned} \quad (2.5)$$

2.3 Konzervativno polje. Gradijent skalarne funkcije

Neka je vektorsko polje \mathbf{A} dano funkcijom $\mathbf{A}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{e}_x + Q(x, y, z)\mathbf{e}_y + R(x, y, z)\mathbf{e}_z$ na $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Polje \mathbf{A} je konzervativno (potencijalno, bezvrtložno) ako vrijedi

$$\text{curl } \mathbf{A} = 0 \quad (2.6)$$

odnosno,

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad (2.7)$$

Tada postoji skalarna funkcija $F(x, y, z)$ takva da je

$$\mathbf{A} = -\text{grad } F \quad (2.8)$$

gdje je gradijent funkcije $F(x, y, z)$ definiran relacijom

$$\text{grad } F \equiv \frac{\partial F}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial F}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial F}{\partial z}\mathbf{e}_z \quad (2.9)$$

Uvjeti (2.7) nam također, osiguravaju da je diferencijalna forma

$$P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \quad (2.10)$$

egzaktna.

2.3.1 Određivanje skalarne funkcije

Prepostavimo da je vektorsko polje \mathbf{A} konzervativno te postoji skalarne funkcije F za koju vrijedi (2.8). Definiramo *vektor infinitezimalnog pomaka* $d\mathbf{r}$ izrazom

$$d\mathbf{r} = dx \mathbf{e}_x + dy \mathbf{e}_y + dz \mathbf{e}_z \quad (2.11)$$

Totalni diferencijal funkcije F glasi

$$\begin{aligned} dF &= \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = (\text{grad } F) \cdot d\mathbf{r} = -\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \\ &= -P(x, y, z) dx - Q(x, y, z) dy - R(x, y, z) dz \end{aligned} \quad (2.12)$$

što je ekvivalent izraza (2.3) na $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Ako je zadana diferencijalna forma (2.10), pomoću (2.12) integracijom možemo odrediti skalarni potencijal F .

2.4 Diferenciranje složenih funkcija

Zadana je funkcija $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$. Prepostavimo da svaka od m varijabli x_i , ovisi o n varijabli u_j tako da je

$$x_i = g_i(u_1, u_2, \dots, u_n) \quad (2.13)$$

Neka je zadana vektorska funkcija $\mathbf{G} = (g_1, g_2, \dots, g_m)$ gdje su $\{g_i\}$ komponente. Formiramo kompoziciju funkcija

$$\begin{aligned} h(u_1, u_2, \dots, u_n) &\equiv (f \circ \mathbf{G})(u_1, u_2, \dots, u_n) \\ &= f(g_1(u_1, u_2, \dots, u_n), g_2(u_1, u_2, \dots, u_n), \dots, g_m(u_1, u_2, \dots, u_n)) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Tada vrijedi

$$\frac{\partial h}{\partial u_k} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g_j}{\partial u_k} \quad (2.15)$$

Poseban slučaj je ako se varijabla u_k eksplicitno pojavljuje u funkciji f , odnosno, $f(u_k, x_1, x_2, \dots, x_m)$. Tada pišemo

$$\frac{\partial h}{\partial u_k} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g_j}{\partial u_k} + \frac{\partial f}{\partial u_k} \quad (2.16)$$

Napomena 1 Veoma često se umjesto $\partial h / \partial u_k$ u (2.15) i (2.16) piše $\partial f / \partial u_k$ no takav zapis u (2.16) dovodi do pogreške.

2.5 Geometrijsko značenje gradijenta

Neka je ploha S opisana funkcijom $z = f(x, y)$. Gradijent na $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ dan je formulom

$$\text{grad } z = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{e}_y \quad (2.17)$$

Geometrijsko značenje gradijenta je da pokazuje smjer najbrže promjene funkcije f u promatranoj točki.

2.5.1 Normala na krivulju $g(x, y) = 0$

Ako je krivulja C u $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ zadana jednadžbom

$$g(x, y) = 0 \quad (2.18)$$

tada je totalni diferencijal

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy = (\text{grad } g) \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (2.19)$$

Vektor $d\mathbf{r} = dx \mathbf{e}_x + dy \mathbf{e}_y$ ima smjer tangente na krivulju C . Iz (2.19) vidimo da je $\text{grad } g$ ortogonalan na $d\mathbf{r}$, odnosno, ima smjer normale na C .

2.6 Derivacija funkcije u zadanom smjeru

Derivacija u smjeru *jediničnog vektora* \mathbf{l} za funkciju $z = f(x, y)$ definira se izrazom

$$\frac{\partial z}{\partial l} = (\text{grad } z) \cdot \mathbf{l} \quad (2.20)$$

Prepostavimo da je zadani smjer

$$\mathbf{l} = \frac{\text{grad } z}{\|\text{grad } z\|} \quad (2.21)$$

Tada derivacija u smjeru \mathbf{l} ima vrijednost

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{(\text{grad } z) \cdot (\text{grad } z)}{\|\text{grad } z\|} = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \quad (2.22)$$

što predstavlja najveću vrijednost koju $\partial z / \partial l$ može imati.

3 Parcijalne derivacije i diferencijali viših redova. Taylorova formula

3.1 Parcijalne derivacije viših redova

Uobičajene oznake za parcijalne derivacije drugog reda po x su

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \text{ili} \quad f''_{xx} \quad \text{ili} \quad \partial_x^2 f \quad \text{ili} \quad \partial_{xx} f \quad \text{ili} \quad D_1^2 f \quad (3.1)$$

Mješovite derivacije drugog reda po x i y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{ili} \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad \text{ili} \quad f''_{xy} \quad \text{ili} \quad \partial_{yx} f \quad \text{ili} \quad \partial_y \partial_x f \quad \text{ili} \quad D_2 D_1 f \quad (3.2)$$

Za funkciju tri varijable oznake za mješovite parcijalne derivacije redova i, j i k su

$$\frac{\partial^{i+j+k} f}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k} \quad \text{ili} \quad f^{(i,j,k)} \quad \text{ili} \quad \partial_x^i \partial_y^j \partial_z^k f \quad (3.3)$$

3.1.1 Schwarzov teorem

Može se dokazati da je redoslijed diferenciranja za mješovite parcijalne derivacije nebitan pa je uvijek moguće odabrati redoslijed koji nam odgovara ili koji je najjednostavniji za račun. Pri tome funkcija koju diferenciramo mora biti klase C^p ako tražimo parcijalne derivacije p -toga reda. Na primjer, želimo li da vrijedi

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad (3.4)$$

funkcija f mora biti klase C^2 , odnosno, f mora biti neprekinuta i sve parcijalne derivacije za f do drugog reda moraju postojati i biti neprekinute funkcije.

3.2 Diferencijali viših redova

Za funkciju $z = f(x, y)$ diferencijal 1. reda dan je formulom (1.10)

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (3.5)$$

Diferencijal 2. reda za $z = f(x, y)$

$$d(dz) = d \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 \quad (3.6)$$

Pri izvodu formule (3.6) uzima se u obzir Schwartzov teorem i $d(dx) = 0$. Parcijalne derivacije drugog reda uvijek računamo u zadanoj točki.

3.2.1 Hesseova matrica

Diferencijal 2. reda možemo zapisati i u matričnom obliku

$$d^2 z = (d\mathbf{r})^T \cdot (H_f d\mathbf{r}) \quad (3.7)$$

gdje je H_f Hesseova matrica za funkciju dvije varijable f

$$H_f = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f & \partial_{xy} f \\ \partial_{xy} f & \partial_{yy} f \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

dok je vektor $d\mathbf{r}$

$$d\mathbf{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Vektor $(d\mathbf{r})^T$ je transponirani vektor $d\mathbf{r}$, odnosno, $(d\mathbf{r})^T = (dx, dy)$.

3.2.2 Diferencijal n -tog reda

Računamo ga po simboličkoj formuli

$$d^n z = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x, y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} dx^k dy^{n-k} \frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^k \partial y^{n-k}} \quad (3.10)$$

3.3 Diferenciranje implicitno zadanih funkcija

Jedan od uvjeta da jednadžba $F(x, y) = 0$ opisuje implicitno zadalu funkciju $y = f(x)$ na otvorenom intervalu oko točke (x, y) jest da je parcijalna derivacija $F'_y \neq 0$. Tada je

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} \quad (3.11)$$

Slično, da jednadžba $G(x, y, z) = 0$ opisuje implicitno zadalu funkciju $z = g(x, y)$ mora biti ispunjeno $G'_z \neq 0$. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= -\frac{G'_x}{G'_z} \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= -\frac{G'_y}{G'_z} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Jedan od uvjeta da sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} H_1(x, y, u, v) &= 0 \\ H_2(x, y, u, v) &= 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

opisuje implicitno zadane funkcije $u = h_1(x, y)$ i $v = h_2(x, y)$ jest uvjet

$$\frac{\partial(H_1, H_2)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} \partial H_1 / \partial u & \partial H_1 / \partial v \\ \partial H_2 / \partial u & \partial H_2 / \partial v \end{pmatrix} \neq 0 \quad (3.14)$$

3.4 Taylorova formula

Taylorovom formulom zadan je razvoj funkcije $f(x, y)$ u red po potencijama za varijable x, y oko točke $T(x_0, y_0)$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x, y)|_T + \frac{1}{1!} \left[(x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right] f(x, y) \Big|_T \\ &+ \frac{1}{2!} \left[(x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 f(x, y) \Big|_T + \dots + \frac{1}{n!} \left[(x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right]^n f(x, y) \Big|_T + \dots \end{aligned} \quad (3.15)$$

gdje se parcijalne derivacije za f računaju u točki T . Na primjer, članovi drugog reda u razvoju (3.15) su

$$\begin{aligned} \frac{1}{2!} \left[(x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 f(x, y) \Big|_T &= \frac{1}{2} (x - x_0)^2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \\ &+ (x - x_0)(y - y_0) \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} (y - y_0)^2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (3.16)$$

iz čega vidimo da s operatorom $\left[(x - x_0) \partial/\partial x + (y - y_0) \partial/\partial y \right]^2$ računamo slično kao i s kvadratom binoma.

3.4.1 Maclaurinova formula

Poseban slučaj Taylorove formule je Maclaurinova formula koja predstavlja razvoj za $f(x, y)$ po potencijama za x, y oko točke $T(0, 0)$

$$f(x, y) = f(x, y)|_T + \frac{1}{1!} \left[x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right] f(x, y) \Big|_T + \frac{1}{2!} \left[x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 f(x, y) \Big|_T \\ + \dots + \frac{1}{n!} \left[x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right]^n f(x, y) \Big|_T + \dots \quad (3.17)$$

3.4.2 Razvoj u red za male priraste argumenta

U fizici se često koristi razvoj u red za veličinu f kojoj se argumenti malo promijene. Uvedimo nove varijable

$$\begin{aligned} u &\equiv x + h \\ v &\equiv y + k \\ w &\equiv z + l \end{aligned} \quad (3.18)$$

te izvedimo Taylorovu formulu za funkciju $f(u, v, w)$ pod pretpostavkom da su prirasti (h, k, l) veoma mali. Imamo

$$f(u, v, w) = f(x + h, y + k, z + l) = f(x, y, z) + \frac{1}{1!} \left[h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + l \frac{\partial}{\partial z} \right] f(x, y, z) \\ + \frac{1}{2!} \left[h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + l \frac{\partial}{\partial z} \right]^2 f(x, y, z) + \dots + \frac{1}{n!} \left[h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + l \frac{\partial}{\partial z} \right]^n f(x, y, z) + \dots \quad (3.19)$$

Treba primijetiti:

- Taylorovu formulu računali smo oko točke $T(u_0, v_0, w_0) = (x, y, z)$ odnosno, postavljanjem $(h, k, l) = (0, 0, 0)$ u parcijalnim derivacijama.
- Parcijalne derivacije, na primjer prvog reda po u , koju računamo u točki $T(u_0, v_0, w_0)$ jednaka je

$$\frac{\partial f(u, v, w)}{\partial u} \Big|_T = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \quad (3.20)$$

- Zbog malih promjena (h, k, l) uobičajeno se računaju samo članovi prvog ili drugog reda.

3.4.3 Primjer

Zadana je funkcija $f(x, y) = e^y \sin x$, gdje su x i y mali. Do članova drugog reda po x i y imamo $f(x, y) \approx x(1 + y) \approx x + xy$. Želimo li koristiti formulu (3.19), identificiramo varijable i izraze na sljedeći način:

$$\begin{aligned} (h, k) &\rightarrow (x, y) \\ (u, v) &\rightarrow (x, y) \\ f(x, y) &\rightarrow f(0, 0) \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &\rightarrow \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Big|_{(0,0)} \end{aligned} \quad (3.21)$$

4 Ekstremi funkcija više varijabli

4.1 Minimum i maksimum funkcije

Funkcija f ima **minimum** $f(P_0)$ u točki P_0 ako za svaku točku $P \neq P_0$ iz okoline za P_0 vrijedi $f(P) \geq f(P_0)$. Funkcija f ima **maksimum** $f(P_0)$ u točki P_0 ako za svaku točku $P \neq P_0$ iz okoline za P_0 vrijedi $f(P) \leq f(P_0)$. Minimume i maksimume funkcije nazivamo **ekstremima** funkcije f .

4.2 Stacionarne točke

Prepostavimo da je zadana funkcija dvije varijable $f(x, y)$. Točka $P_0(x_0, y_0)$ u kojoj je

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{P_0} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{P_0} = 0 \quad (4.1)$$

naziva se stacionarnom ili kritičnom točkom. Ako su ispunjeni uvjeti (4.1) tada vrijedi

$$df(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{P_0} dx + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{P_0} dy = 0 \quad (4.2)$$

Analogno vrijedi i za funkciju n -varijabli: stacionarnom nazivamo onu točku u kojoj su prve parcialne derivacije po svim varijablama jednake nuli. Izrazi (4.1) ili (4.2) su **nužni uvjeti** za ekstreme funkcije.

4.3 Dovoljni uvjeti za ekstreme funkcije

Neka je $P_0(x_0, y_0)$ stacionarna točka funkcije $f(x, y)$, odnosno, $df(P_0) = 0$. **Hesseova matrica** (3.8) za f u točki P_0 jednaka je

$$H_f(P_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}_{P_0} \quad (4.3)$$

Determinantu Hesseove matrice $\det H_f(P_0)$ nazivamo **Hessian** za f u točki P_0 . Pomoću Hessiana izračunatog u stacionarnoj točki P_0 , odredit ćemo da li se radi o minimumu ili maksimumu za f .

4.3.1 Uvjeti za minimum

Ako je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) > 0$, onda je $f(P_0)$ minimum za f . Ovaj uvjet je za funkciju dvije varijable zadovoljen ako vrijedi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{P_0} > 0, \quad \det H_f(P_0) > 0 \quad (4.4)$$

Napomena 2 Ako je $\det H_f(P_0) > 0$, tada je i $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0$ u točki P_0 zbog $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$. Svojstvene vrijednosti za $H_f(P_0)$ postaju strogo pozitivne pa je i diferencijal (3.7) uvijek pozitivan jer je napisan u obliku **pozitivno definitne kvadratne diferencijalne forme**.

4.3.2 Uvjeti za maksimum

Ako je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) < 0$, onda je $f(P_0)$ maksimum za f . Ovaj uvjet je za funkciju dvije varijable zadovoljen ako je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{P_0} < 0, \quad \det H_f(P_0) > 0 \quad (4.5)$$

Napomena 3 Ako je $\det H_f(P_0) > 0$, tada je i $\partial^2 f / \partial y^2 < 0$ u točki P_0 zbog $\partial^2 f / \partial x^2 < 0$. Svojstvene vrijednosti za $H_f(P_0)$ postaju strogo negativne pa je i diferencijal (3.7) uvijek negativan jer je napisan u obliku **negativno definitne kvadratne diferencijalne forme**.

4.3.3 Ostali slučajevi

- Ako je $\det H_f(P_0) < 0$, onda f u P_0 nema ekstrema.
- Ako je $\det H_f(P_0) = 0$, potrebno je dodatno ispitivanje, odnosno, utvrđivanje predznaka diferencijalima viših redova.

4.3.4 Funkcije n varijabli

Neka je P_0 stacionarna točka funkcije n varijabli $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Hesseova matrica za f u P_0 glasi

$$H_f(P_0) = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix}_{P_0} \quad (4.6)$$

gdje je, na primjer, $f_{12} = \partial^2 f / \partial x_1 \partial x_2$. U točki P_0 je minimum ako je svaka svojstvena vrijednost za $H_f(P_0)$ strogo pozitivna i tada je $d^2 f(P_0) > 0$. Za $n = 3$ ovaj uvjet možemo lakše provjeriti utvrđivanjem predznaka subdeterminanti

$$f_{11} > 0, \quad \det \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} > 0, \quad \det \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix} > 0 \quad (4.7)$$

ako je u točki P_0 minimum. Za maksimum u P_0 mora biti $f_{11} < 0$, a ostale determinante moraju sukcesivno mijenjati predznake, dakle,

$$f_{11} < 0, \quad \det \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} > 0, \quad \det \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix} < 0 \quad (4.8)$$

4.4 Uvjetni ekstremi

Zadana je funkcija dvije varijable $f(x, y)$. Uvjetni, relativni ili vezani ekstrem funkcije f je minimum ili maksimum za f pod uvjetom da su varijable x, y povezane jednadžbom $\phi(x, y) = 0$. Ova se jednadžba naziva **jednadžbom veze**.

4.4.1 Lagrangeov množitelj

Za funkciju dvije varijable formiramo funkciju

$$g(x, y) = f(x, y) + \lambda\phi(x, y) \quad (4.9)$$

gdje je λ Lagrangeov množitelj ili multiplikator. Točke ekstrema za $f(x, y)$ potražit ćemo među rješenjima jednadžbi

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial \lambda} = \phi(x, y) = 0 \quad (4.10)$$

4.4.2 Broj jednadžbi veze

Broj jednadžbi veze m uvijek je manji od broja varijabli n . Na primjer, za funkciju 3 varijable možemo zadati najviše dvije jednadžbe veze. Na početku postupka određivanja uvjetnih ekstrema za funkciju n varijabli $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ i m jednadžbi veze pri čemu je $n > m$, formiramo funkciju

$$g = f + \lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2 + \dots + \lambda_m\phi_m \quad (4.11)$$

Zatim računamo parcijalne derivacije

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x_1} &= 0, & \frac{\partial g}{\partial x_2} &= 0, & \dots, & \frac{\partial g}{\partial x_n} &= 0, \\ \frac{\partial g}{\partial \lambda_1} &= \phi_1 = 0, & \frac{\partial g}{\partial \lambda_2} &= \phi_2 = 0, & \dots, & \frac{\partial g}{\partial \lambda_m} &= \phi_m = 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Ekstreme tražimo među rješenjima jednadžbi (4.12).

4.5 Dovoljni uvjeti za vezane ekstreme

U fizici se najčešće jednostavnim razmatranjem zaključuje radi li se o minimumu ili maksimumu u točki P_0 koja je rješenje sustava jednadžbi (4.12). Ako to nije moguće, treba razmotriti **proširenu Hesseovu matricu** $(n+m) \times (n+m)$ za funkciju g

$$\tilde{H}_g(P_0) = \begin{pmatrix} O & \Phi \\ \Phi^T & H_g \end{pmatrix}_{P_0} \quad (4.13)$$

gdje je H_g Hesseova matrica (4.6) za funkciju g u (4.11), matrica O je nul-matrica tipa $m \times m$, matrica Φ je tipa $m \times n$ i sastoji se od prvih parcijalnih derivacija jednadžbi veze po varijablama sustava

$$\Phi(P_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_m}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \phi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{P_0} \quad (4.14)$$

Nakon toga treba izračunati determinante svih gornjih lijevih podmatrica (glavnih minora) za $\tilde{H}_g(P_0)$, počevši od one tipa $(2m+1) \times (2m+1)$ do cijele proširene Hesseove matrice tipa $(n+m) \times (n+m)$. Matrica i njihovih determinanti ukupno ima $(n-m)$. Dovoljni uvjeti za ekstreme su sljedeći:

- U P_0 je lokalni minimum ako sve subdeterminante imaju jednak predznak $(-1)^m$.
- U P_0 je lokalni maksimum ukoliko subdeterminante sukcesivno mijenjaju predznak s tim da determinanta s najmanjim brojem redaka i stupaca ima predznak $(-1)^{m+1}$.

4.5.1 Primjer

Promotrimo funkciju 3 varijable $f(x, y, z)$ kojoj tražimo ekstreme uz jedan uvjet $\phi = 0$. Tada je $n = 3$ i $m = 1$, proširena Hesseova matrica je tipa 4×4 . Promotrit ćemo determinante dvije podmatrice $(n-m=2)$ izračunate u točki stacionarnoj P_0 :

$$\det \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \end{pmatrix}, \quad \det \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Ukoliko je predznak ovih determinanti jednak $(-1)^m = -1$, u točki P_0 je minimum. Ukoliko je predznak 3×3 determinante u (4.15) jednak $(-1)^{m+1} = 1$, a determinante 4×4 u (4.15) jednak -1 , radi se o maksimumu.

II VIŠESTRUKI INTEGRALI

5 Dvostruki integral

5.1 Riemannov integral na \mathbb{R}^2

Zadana je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Zatvoreno područje $R \subset \mathbb{R}^2$ nalazi se u xy -ravnini. Razdijelimo R na N potpodručja ΔR_p čija je površina ΔA_p , $p = 1, 2, \dots, N$. Neka je točka $T_p(x_p, y_p)$ sadržana u ΔR_p . Promotrimo sumu

$$S = \sum_{p=1}^N f(x_p, y_p) \Delta A_p \quad (5.1)$$

Uzmimo graničnu vrijednost $N \rightarrow \infty$ pri čemu $\Delta A_p \rightarrow 0$. Drugim riječima, uzimamo sukcesivno "finije" subdivizije za R , zatim računamo $f(x_p, y_p)$ i površine ΔA_p koje postaju sve manje te na kraju računamo vrijednost za S . Ako takav limes postoji i jedinstven je, tada se naziva dvostrukim Riemannovim integralom po R i pišemo ga kao

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S = I = \int_R f(x, y) dA \quad (5.2)$$

Napomena 4 Vrijednost za I ne ovisi o tome kako smo napravili raspodjelu područja R na potpodručja ΔR_p , odnosno, jesu li ΔR_p istog oblika i imaju li jednake površine ΔA_p .

Napomena 5 Dvostruki integral može se definirati i pomoću Darbouxovih suma koje teže k Darbouxovom integralu. Pokaže se da su oba pristupa ekvivalentna pod uvjetom da je f ograničena funkcija na R .

5.1.1 Dvostruki integral u Kartezijevim koordinatama

Ako su potpodručja ΔR_p pravokutnog oblika čije su stranice paralelne koordinatnim osima x i y , tada je $\Delta A = \Delta x \Delta y$, a oznaka integrala postaje

$$I = \int_R f(x, y) dx dy \quad (5.3)$$

ili

$$I = \int \int_R f(x, y) dx dy \quad (5.4)$$

5.1.2 Promjenjive granice u integralima

Općenito, granice za integraciju po jednoj od varijabli mogu biti promjenjive ili varijabilne. Fizičari veoma često zapisuju dvostruki integral u obliku

$$I = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} dy f(x, y) \quad (5.5)$$

U (5.5) granice za integraciju po y su varijabilne, to su funkcije $\alpha(x)$ i $\beta(x)$.

5.2 Fubinijev teorem

Dvostruki integral funkcije $f(x, y)$ na pravokutniku $R = [a, b] \times [c, d]$ možemo izračunati postupno, u dva koraka: (i) integrirajući najprije, po jednoj varijabli, na primjer x dok varijablu y držimo fiksnom; (ii) integrirajući, zatim, po drugoj varijabli y . Redoslijed integriranja po varijablama x i y smijemo zamjeniti

$$\int_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy \quad (5.6)$$

Ovakav se postupak računanja smije primjeniti ako je bar jedan od dvostrukih integrala absolutno konvergentan, odnosno, ako vrijedi

$$\int_a^b \left(\int_c^d |f(x, y)| dy \right) dx < \infty \quad (5.7)$$

5.3 Promjena varijabli u dvostrukom integralu

Zadana je transformacija iz novih koordinata (u, v) u Kartezijeve (x, y)

$$\begin{aligned} x &= g(u, v) \\ y &= h(u, v) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Prepostavljamo, također, da postoji inverzna transformacija $u = g^{-1}(x, y)$ i $v = h^{-1}(x, y)$. Varijable integracije u dvostrukom integralu mijenjamo po pravilu

$$\int_R f(x, y) dx dy = \int_{R'} f(u, v) \left| J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) \right| du dv \quad (5.9)$$

gdje su uobičajeno, funkcija $f(g(u, v), h(u, v)) \equiv f(u, v)$ i područje R' jednostavnijeg oblika, odnosno, integral u novim koordinatama (u, v) lakše je izračunati. **Jacobian** za transformaciju (5.8) je determinanta oblika

$$J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) = \det \begin{pmatrix} \partial g / \partial u & \partial g / \partial v \\ \partial h / \partial u & \partial h / \partial v \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

Primijetimo da se u (5.9) javlja absolutna vrijednost Jacobiana.

Napomena 6 Veoma često se u fizici transformacija (5.8) zapisuje u obliku $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$.

5.3.1 Primjer: polarne koordinate

Uzmimo za nove koordinate $u \equiv \rho$, $v \equiv \phi$. Transformacija (5.8) glasi

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi \\ y &= \rho \sin \phi \end{aligned} \quad (5.11)$$

Jacobian transformacije (5.11) jednak je

$$J\left(\frac{x, y}{\rho, \phi}\right) = \rho \quad (5.12)$$

5.4 Nekoliko primjena dvostrukog integrala

5.4.1 Površina područja u xy-ravnini

Neka je R područje u xy -ravnini. Površina područja R glasi

$$A(R) = \int_R dx dy \quad (5.13)$$

5.4.2 Volumen ispod plohe

Zadana je funkcija $z = f(x, y) \geq 0$ za sve $(x, y) \in R$. Neka $z = f(x, y)$ određuje plohu π u \mathbb{R}^3 . Volumen ili obujam područja u \mathbb{R}^3 "ispod" dijela plohe π čija je projekcija područje R , ima oblik

$$V_R = \int_R f(x, y) dx dy \quad (5.14)$$

Ukoliko je $z = f(x, y) \leq 0$, integral (5.14) dat će negativnu vrijednost. Tada je volumen područja u \mathbb{R}^3 "između" plohe i područja R jednak $-V$.

5.4.3 Površina plohe

Površina dijela glatke plohe σ koja je određena jednadžbom $z = f(x, y)$ i čija je projekcija na ravninu xy područje R , glasi

$$A_\sigma = \int_R \sqrt{1 + (\partial f / \partial x)^2 + (\partial f / \partial y)^2} dx dy \quad (5.15)$$

6 Trostruki integral

6.1 Riemannov integral na \mathbb{R}^3

Zadana je funkcija $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Razdijelimo zatvoreno područje $P \subset \mathbb{R}^3$ na N potpodručja ΔP_p čiji je volumen ΔV_p , $p = 1, 2, \dots, N$. Neka je točka $T_p(x_p, y_p, z_p)$ sadržana u ΔP_p . Promotrimo sumu

$$S = \sum_{p=1}^N f(x_p, y_p, z_p) \Delta V_p \quad (6.1)$$

Uzmimo graničnu vrijednost $N \rightarrow \infty$ pri čemu $\Delta V_p \rightarrow 0$. Ako takav limes postoji, onda je jedinstven i naziva se trostrukim Riemannovim integralom po P i pišemo ga kao

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S = I = \int_P f(x, y, z) dV \quad (6.2)$$

Napomena 7 U fizici se često element volumena dV označava kao d^3r .

6.1.1 Trostruki integral u Kartezijevim koordinatama

Ako su potpodručja ΔP_p oblika kvadra čiji su bridovi paralelni koordinatnim osima x, y i z tada je $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$, a oznaka integrala postaje

$$I = \int_P f(x, y, z) dx dy dz \quad (6.3)$$

ili

$$I = \int \int \int_P f(x, y, z) dx dy dz \quad (6.4)$$

Granice za integraciju za dvije varijable mogu biti promjenjive ili varijabilne što zapisujemo u obliku

$$I = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz f(x, y, z) \quad (6.5)$$

U (6.5) plohe $z_1(x, y)$ i $z_2(x, y)$ omeđuju područje P "odozdo" i "odozgo", a krivulje $y_1(x)$ i $y_2(x)$ omeđuju projekciju područja P na xy -ravninu.

6.2 Promjena varijabli u trostrukom integralu

Zadana je transformacija koordinata (u, v, w) u Kartezijeve (x, y, z)

$$\begin{aligned} x &= g(u, v, w) \\ y &= h(u, v, w) \\ z &= k(u, v, w) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Prepostavljamo, također, da postoji inverzna transformacija $u = g^{-1}(x, y, z)$, $v = h^{-1}(x, y, z)$ i $w = k^{-1}(x, y, z)$. Varijable integracije u trostrukom integralu mijenjam po pravilu

$$\int_P f(x, y, z) dx dy dz = \int_{P'} f(u, v, w) \left| J \left(\frac{x, y, z}{u, v, w} \right) \right| du dv dw \quad (6.7)$$

gdje su uobičajeno, funkcija $f(g(u, v, w), h(u, v, w), k(u, v, w)) \equiv f(u, v, w)$ i područje P' jednostavnijeg oblika, odnosno, integral u novim koordinatama (u, v, w) lakše je izračunati.

Jacobian za transformaciju (6.6) je determinanta oblika

$$J \left(\frac{x, y, z}{u, v, w} \right) = \det \begin{pmatrix} \partial g / \partial u & \partial g / \partial v & \partial g / \partial w \\ \partial h / \partial u & \partial h / \partial v & \partial h / \partial w \\ \partial k / \partial u & \partial k / \partial v & \partial k / \partial w \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

Primjetimo da se u (6.7) javlja apsolutna vrijednost Jacobiana.

Napomena 8 Veoma često se u fizici transformacija (6.6) zapisuje u obliku $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$ i $z = z(u, v, w)$.

6.2.1 Primjer: cilindričke koordinate

Uzmimo za nove koordinate $u \equiv \rho$, $v \equiv \phi$ i $w = z$. Transformacija (6.6) glasi

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi \\ y &= \rho \sin \phi \\ z &= z \end{aligned} \quad (6.9)$$

Jacobian transformacije (6.9) jednak je

$$J \left(\frac{x, y, z}{\rho, \phi, z} \right) = \rho \quad (6.10)$$

6.2.2 Primjer: sferne koordinate

Neka su nove koordinate $u \equiv r$, $v \equiv \theta$ i $w = \phi$. Transformacija iz sfernih u Kartezijevu koordinate glasi

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi \sin \theta \\ y &= r \sin \phi \sin \theta \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (6.11)$$

Jacobian transformacije (6.11) jednak je

$$J \left(\frac{x, y, z}{r, \theta, \phi} \right) = r^2 \sin \theta \quad (6.12)$$

6.3 Nekoliko primjena trostrukog integrala

6.3.1 Volumen područja u \mathbb{R}^3

Volumen područja $P \subset \mathbb{R}^3$ glasi

$$V(P) = \int_P dx dy dz \quad (6.13)$$

6.3.2 Centar mase tijela

Koordinate centra mase tijela, odnosno, težišta (x_T, y_T, z_T) određuju se pomoću formula

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{1}{m} \int_R x \rho(x, y, z) d^3 r \\ y_T &= \frac{1}{m} \int_R y \rho(x, y, z) d^3 r \\ z_T &= \frac{1}{m} \int_R z \rho(x, y, z) d^3 r \end{aligned} \quad (6.14)$$

U (6.14) m je masa tijela, a $\rho(x, y, z)$ je masena gustoća.

7 Razne metode izračuna integrala

Uz uobičajene metode za proračun integrala, fizičari često koriste i neke dodatne metode kao što su,

- diferenciranje pod znakom integrala, odnosno, Leibnitzovo pravilo,
- integriranje pod znakom integrala,
- korištenje simetrija, na primjer, parnost podintegralne funkcije,
- postavljanje koordinatnog sustava na pogodan način, na primjer, postavljanje osi z u smjeru valnog vektora,
- matematička indukcija.

Dobar izvor primjera rješavanja integrala upotrebom posebnih metoda je knjiga od Nahina navedena u Literaturi.

7.1 Leibnitzovo pravilo

Neka je funkcija f zadana na pravokutniku $R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$. Funkciju $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definiramo formulom

$$\phi(x) = \int_c^d f(x, t) dt \quad (7.1)$$

Ako su f i $\partial_x f$ neprekinute na R , tada je

$$\phi'(x) = \frac{d}{dx} \int_c^d f(x, t) dt = \int_c^d \partial_x f(x, t) dt \quad (7.2)$$

za $a < x < b$.

7.1.1 Varijabilne granice

Prepostavimo da su granice u integralu (7.1) varijabilne

$$\phi(x) = \int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} f(x, t) dt \quad (7.3)$$

Tada vrijedi

$$\phi'(x) = f[x, \delta(x)] \delta'(x) - f[x, \gamma(x)] \gamma'(x) + \int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} \partial_x f(x, t) dt \quad (7.4)$$

pri čemu funkcije $\gamma(x)$ i $\delta(x)$ moraju imati neprekinute prve derivacije.

7.2 Nepravi integrali

Javljuju se ako je bar jedna od granica integracije beskonačna ili ako je funkcija singularna u jednoj ili konačno mnogo točaka područja integracije. Na primjer, kažemo da integral

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x) dx \quad (7.5)$$

konvergira ukoliko limes u (7.5) postoji. Ako ne postoji, kažemo da integral *divergira*.

III VEKTORSKA ANALIZA. TENZORI

8 Operator nabla. Krivocrtne koordinate

8.1 Skalarno i vektorsko polje

Pridružimo li svakoj točki $P \in \Omega$, gdje je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ točno jednu brojčanu vrijednost, definirali smo skalarno polje $\Phi(P)$. Na primjer, izmjerili smo temperaturu u nekoj sobi ili električni potencijal duž žice. Uvedemo li Kartezijev koordinatni sustav na skupu Ω , tada skalarnom polju pripada točno jedna skalarna funkcija $f(\mathbf{r})$

$$\Phi(P) \rightarrow f(\mathbf{r}) = f(x, y, z) \quad (8.1)$$

Na sličan način, pridružimo li svakoj točki $P \in \Omega$, gdje je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ točno jedan vektor, definirali smo vektorsko polje $\mathbf{A}(P)$. Pomoću Kartezijeva koordinatnog sustava, tako definiranom vektorskog polju, možemo pridružiti vektorsku funkciju $\mathbf{a}(\mathbf{r})$

$$\mathbf{A}(P) \rightarrow \mathbf{a}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}(x, y, z) \quad (8.2)$$

Primjeri vektorskih polja su električno polje ili brzina fluida.

8.2 Definicija nable

Operator nabla ili del operator definira se pomoću Kartezijevih koordinata

$$\nabla \equiv \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (8.3)$$

Često je pogodnije koristiti zapis koordinata (x, y, z) i vektora baze $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ u obliku (x_1, x_2, x_3) i $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Tada se (8.3) može zapisati pomoću simbola za sumu

$$\nabla \equiv \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (8.4)$$

8.3 Osnovne operacije s nablom

8.3.1 Gradijent

Gradijent skalarnog polja $\Phi(\mathbf{r})$ definiramo relacijom

$$\text{grad } \Phi = \nabla \Phi \equiv \mathbf{e}_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (8.5)$$

Gradijent skalarnog polja je vektorsko polje. Gradijent u promatranoj točki pokazuje smjer u kojem se skalarno polje najbrže mijenja. Za danu ekvipotencijalnu plohu $\Phi(\mathbf{r}) = \text{konst.}$, vektor $\nabla \Phi$ je normalni vektor u točki plohe.

8.3.2 Divergencija

Neka je zadano vektorsko polje $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_x(\mathbf{r}) \mathbf{e}_x + A_y(\mathbf{r}) \mathbf{e}_y + A_z(\mathbf{r}) \mathbf{e}_z$. Divergencija polja $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ definira se relacijom

$$\text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} \equiv \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (8.6)$$

Divergencija vektorskog polja je skalarno polje, a interpretiramo je, u grubo, kao kvantitativnu mjeru koliko polje konvergira ili divergira u danoj točki u prostoru.

Solenoidalno polje Polje $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ je solenoidalno ako vrijedi

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (8.7)$$

Za solenoidalno polje uvijek možemo pronaći polje $\mathbf{c}(\mathbf{r})$ takvo da je $\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{c}$.

8.3.3 Rotacija

Rotaciju vektorskog polja $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_x(\mathbf{r})\mathbf{e}_x + A_y(\mathbf{r})\mathbf{e}_y + A_z(\mathbf{r})\mathbf{e}_z$ definiramo izrazom

$$\begin{aligned} \text{curl } \mathbf{A} &= \nabla \times \mathbf{A} \equiv \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A_x & A_y & A_z \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{e}_x (\partial_y A_z - \partial_z A_y) - \mathbf{e}_y (\partial_x A_z - \partial_z A_x) + \mathbf{e}_z (\partial_x A_y - \partial_y A_x) \end{aligned} \quad (8.8)$$

Rotacija vektorskog polja je vektorsko polje, a interpretiramo je, u grubo, kao kvantitativnu mjeru vrtnje polje u danoj točki u prostoru.

Ponekad je pogodno računati s jednom, po volji odabranom komponentom rotacije

$$(\nabla \times \mathbf{A})_i = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j} \quad (8.9)$$

gdje je ϵ_{ijk} Levi-Civita ili permutacijski simbol.

Konzervativno polje Polje $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ je konzervativno (potencijalno, bezvrtložno) ako vrijedi

$$\nabla \times \mathbf{A} = 0 \quad (8.10)$$

Ako je ispunjen uvjet (8.10), tada je moguće naći skalarno polje $\psi(\mathbf{r})$ sa svojstvom $\mathbf{A} = -\nabla\psi$.

8.3.4 Laplaceov operator

Laplace skalarne polja $\Phi(\mathbf{r})$ je izraz

$$\nabla \cdot (\nabla\Phi) \equiv \nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \quad (8.11)$$

8.4 Usmjerena derivacija

8.4.1 Usmjerena derivacija skalarne polja

Derivacija skalarne polja $\Phi(\mathbf{r})$ u smjeru jediničnog vektora \mathbf{l} definirana je relacijom

$$\frac{\partial\Phi}{\partial l} \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\Phi(\mathbf{r} + \epsilon\mathbf{l}) - \Phi(\mathbf{r})}{\epsilon} \quad (8.12)$$

i pokazuje kako se brzo mijenja $\Phi(\mathbf{r})$ u smjeru vektora \mathbf{l} . Može se pokazati da izraz (8.12) dobiva oblik

$$\frac{\partial\Phi}{\partial l} = (\nabla\Phi) \cdot \mathbf{l} \quad (8.13)$$

Za fiziku je od posebne važnosti derivacija u smjeru normale \mathbf{n} , jediničnog vektora koji je okomit na zadatu plohu

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = (\nabla\Phi) \cdot \mathbf{n} \quad (8.14)$$

8.4.2 Usmjerena derivacija vektorskog polja

Derivacija vektorskog polja $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_1(\mathbf{r})\mathbf{e}_1 + A_2(\mathbf{r})\mathbf{e}_2 + A_3(\mathbf{r})\mathbf{e}_3$ u smjeru jediničnog vektora \mathbf{l} definirana je relacijom

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial l} \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(\mathbf{r} + \epsilon \mathbf{l}) - \mathbf{A}(\mathbf{r})}{\epsilon} \quad (8.15)$$

i pokazuje kako se brzo mijenja $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ u smjeru vektora \mathbf{l} . Pomoću izraza (8.15) može se izvesti da je

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial l} = (\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 l_i \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i} \quad (8.16)$$

gdje je $\mathbf{l} = l_1 \mathbf{e}_1 + l_2 \mathbf{e}_2 + l_3 \mathbf{e}_3$.

8.5 Važniji identiteti s nablom

Zadana su skalarna polja $\Phi(\mathbf{r}), \Psi(\mathbf{r})$ i vektorska polja $\mathbf{A}(\mathbf{r}), \mathbf{B}(\mathbf{r})$. Identitete s nablom upotrebljavamo zbog pojednostavljenja različitih izraza, na primjer, iz elektrodinamike ili dinamike fluida.

8.5.1 Osnovni identiteti

Osnovne identitete dobijemo u slučaju da operator nabla djeluje na jednu skalarnu ili vektorskiju funkciju.

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \Phi &= 0 \\ \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) &= 0 \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \end{aligned} \quad (8.17)$$

8.5.2 Umnožak skalarnih, te skalarnih i vektorskih polja

Navodimo nekoliko identiteta u kojima nabla djeluje na produkte skalarnih i vektorskih polja.

$$\begin{aligned} \nabla(\Phi\Psi) &= \Psi \nabla \Phi + \Phi \nabla \Psi \\ \nabla \cdot (\Phi \mathbf{A}) &= \mathbf{A} \cdot \nabla \Phi + \Phi \nabla \cdot \mathbf{A} \\ \nabla \times (\Phi \mathbf{A}) &= \nabla \Phi \times \mathbf{A} + \Phi \nabla \times \mathbf{A} \end{aligned} \quad (8.18)$$

8.5.3 Umnošci vektorskih polja

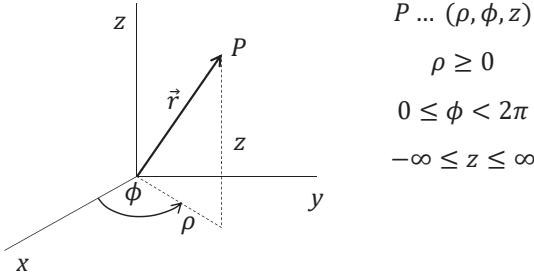
Složenije identitete dobijemo u slučajevima djelovanja nable na produkte vektorskih polja.

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \\ \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \\ \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} \end{aligned} \quad (8.19)$$

8.6 Cilindričke koordinate (ρ, ϕ, z)

8.6.1 Definicija

Definicija cilindričkih koordinata nalazi se na slici 8.1.



Slika 8.1

8.6.2 Veza između cilindričkih i Kartezijevih koordinata

Jednadžbe transformacije iz cilindričkih u Kartezijeve koordinate glase:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi \\ y &= \rho \sin \phi \\ z &= z \end{aligned} \quad (8.20)$$

8.6.3 Vektor položaja

Odaberemo li jedinične vektore Kartezijevog sustava koordinata $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ kao vektore baze, vektor položaja u cilindričkim koordinatama glasi

$$\mathbf{r} = \rho \cos \phi \mathbf{e}_x + \rho \sin \phi \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z \quad (8.21)$$

Ako su vektori baze jedinični vektori sustava cilindričkih koordinata $\{\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z\}$, tada vektor položaja ima oblik

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z \quad (8.22)$$

8.6.4 Jedinični vektori

Upotrijebimo li (8.22), jedinični vektori usmjereni prema porastu koordinata (ρ, ϕ, z) glase

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\rho &= \frac{1}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \right\|} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \phi \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_\phi &= \frac{1}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right\|} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = -\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z &= \frac{1}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \right\|} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (8.23)$$

Vektori $\{\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z\}$ u svakoj točki tvore ortonormiranu bazu. Primijetimo da vektori \mathbf{e}_ρ i \mathbf{e}_ϕ mijenjaju smjer ovisno o točki u kojoj ih računamo zbog ovisnosti o kutu ϕ pa zato $\{\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z\}$ tvore **lokalnu bazu**.

8.6.5 Vektor infinitezimalnog pomaka

Vektor infinitezimalnog pomaka u cilindričkom sustavu koordinata ima oblik

$$d\mathbf{r} = d\rho \mathbf{e}_\rho + \rho d\phi \mathbf{e}_\phi + dz \mathbf{e}_z \quad (8.24)$$

Kvadrat iznosa vektora (8.24) u promatranoj točki glasi

$$(ds)^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = (d\rho)^2 + \rho^2(d\phi)^2 + (dz)^2 \quad (8.25)$$

8.6.6 Element volumena

U cilindričkom sustavu koordinata element volumena dV jednak je:

$$dV = \rho d\rho d\phi dz \quad (8.26)$$

8.6.7 Operator ∇ u cilindričkim koordinatama

Zadano je skalarno polje $\Phi(\mathbf{r}) = \Phi(\rho, \phi, z)$ i vektorsko polje $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_\rho(\rho, \phi, z)\mathbf{e}_\rho + A_\phi(\rho, \phi, z)\mathbf{e}_\phi + A_z(\rho, \phi, z)\mathbf{e}_z$. Vrijede relacije:

$$\begin{aligned} \nabla\Phi &= \frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\mathbf{e}_\phi + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\mathbf{e}_z \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho} \right) \mathbf{e}_\phi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial\phi} \right) \mathbf{e}_z \\ \nabla^2\Phi &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} \left(\rho \frac{\partial\Phi}{\partial\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (8.27)$$

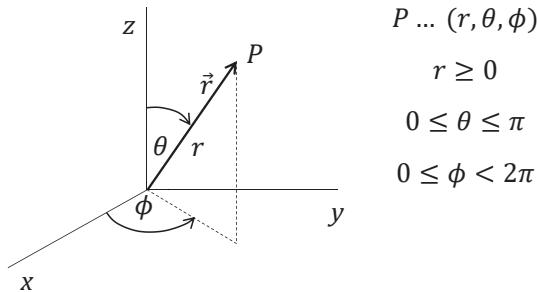
Primijetimo da laplace vektorskog polja u cilindričkom sustavu koordinata nema istu strukturu kao u Kartezijevom sustavu!

$$\nabla^2\mathbf{A} = \left(\nabla^2 A_\rho - \frac{A_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} \right) \mathbf{e}_\rho + \left(\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\rho}{\partial\phi} \right) \mathbf{e}_\phi + \nabla^2 A_z \mathbf{e}_z \quad (8.28)$$

8.7 Sferne koordinate (r, θ, ϕ)

8.7.1 Definicija

Definicija sfernih koordinata nalazi se na slici 8.2.



Slika 8.2

8.7.2 Veza između sfernih i Kartezijevih koordinata

Jednadžbe transformacije iz sfernih u Kartezijeve koordinate glase:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \phi \sin \theta \\y &= r \sin \phi \sin \theta \\z &= r \cos \theta\end{aligned}\quad (8.29)$$

8.7.3 Vektor položaja

U sfernim koordinatama vektor položaja glasi

$$\mathbf{r} = r \cos \phi \sin \theta \mathbf{e}_x + r \sin \phi \sin \theta \mathbf{e}_y + r \cos \theta \mathbf{e}_z \quad (8.30)$$

gdje smo kao vektore baze koristili jedinične vektore Kartezijevog sustava koordinata $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$. Uputrijebimo li kao vektore baze jedinične vektore sustava sfernih koordinata $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi\}$, tada vektor položaja ima jednostavan oblik

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r \quad (8.31)$$

8.7.4 Jedinični vektori

Jedinični vektori usmjereni prema porastu koordinata (r, θ, ϕ) glase:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r &= \frac{1}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \right\|} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \cos \phi \sin \theta \mathbf{e}_x + \sin \phi \sin \theta \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z \\\mathbf{e}_\theta &= \frac{1}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right\|} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \cos \phi \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \phi \cos \theta \mathbf{e}_y - \sin \theta \mathbf{e}_z \\\mathbf{e}_\phi &= \frac{1}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right\|} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = -\sin \phi \mathbf{e}_x + r \cos \phi \mathbf{e}_y\end{aligned}\quad (8.32)$$

Vektori $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi\}$ tvore lokalnu, ortonormiranu bazu.

8.7.5 Vektor infinitezimalnog pomaka

$$d\mathbf{r} = dr \mathbf{e}_r + r d\theta \mathbf{e}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{e}_\phi \quad (8.33)$$

Kvadrat iznosa vektora (8.33) u promatranoj točki iznosi

$$(ds)^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2 \quad (8.34)$$

8.7.6 Element volumena

U sfernem sustavu koordinata element volumena dV glasi

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (8.35)$$

8.7.7 Operator ∇ u sfernim koordinatama

Zadano je skalarno polje $\Phi(\mathbf{r}) = \Phi(r, \theta, \phi)$ i vektorsko polje $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_r(r, \theta, \phi)\mathbf{e}_r + A_\theta(r, \theta, \phi)\mathbf{e}_\theta + A_\phi(r, \theta, \phi)\mathbf{e}_\phi$. Vrijede relacije:

$$\begin{aligned}\nabla\Phi &= \frac{\partial\Phi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\mathbf{e}_\phi \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right]\mathbf{e}_r + \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\right]\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\mathbf{e}_\phi \\ \nabla^2\Phi &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}\end{aligned}\quad (8.36)$$

Primijetimo da laplace vektorskog polja u sfernem sustavu koordinata (8.37) nema istu strukturu kao u Kartezijevom sustavu!

$$\begin{aligned}\nabla^2\mathbf{A} &= \left\{ \nabla^2A_r - \frac{2}{r^2}\left[A_r + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}\right] \right\}\mathbf{e}_r \\ &\quad + \left\{ \nabla^2A_\theta + \frac{2}{r^2}\left[\frac{\partial A_r}{\partial\theta} - \frac{A_\theta}{2\sin^2\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}\right] \right\}\mathbf{e}_\theta \\ &\quad + \left\{ \nabla^2A_\phi + \frac{2}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{A_\phi}{2\sin\theta} + \cot\theta\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right] \right\}\mathbf{e}_\phi\end{aligned}\quad (8.37)$$

8.8 Opće krivocrtne koordinate (u_1, u_2, u_3)

8.8.1 Jednadžbe transformacije koordinata

Neka su (u_1, u_2, u_3) zadane krivocrtne ili krivuljne koordinate koje mogu, ali ne moraju imati geometrijsku interpretaciju. Prepostaviti ćemo da postoji veza između krivocrtnih i Kartezijevih koordinata

$$\begin{aligned}x &= x(u_1, u_2, u_3) \\ y &= y(u_1, u_2, u_3) \\ z &= z(u_1, u_2, u_3)\end{aligned}\quad (8.38)$$

odnosno, Kartezijeve koordinate su funkcije krivuljnih. Također, krivuljne su koordinate funkcije Kartezijevih, osim možda, u nekim posebnim točkama ili područjima.

8.8.2 Jedinični vektori

Ako je vektor položaja u krivuljnim koordinatama $\mathbf{r}(u_1, u_2, u_3) = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$, gdje su (x, y, z) funkcije krivuljnih koordinata (8.38), definiramo jedinične vektore $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ **u smjeru porasta** krivuljnih koordinata na sljedeći način:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= \frac{1}{h_1}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_1}, \quad h_1 \equiv \left\| \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_1} \right\| \\ \mathbf{e}_2 &= \frac{1}{h_2}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_2}, \quad h_2 \equiv \left\| \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_2} \right\| \\ \mathbf{e}_3 &= \frac{1}{h_3}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_3}, \quad h_3 \equiv \left\| \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_3} \right\|\end{aligned}\quad (8.39)$$

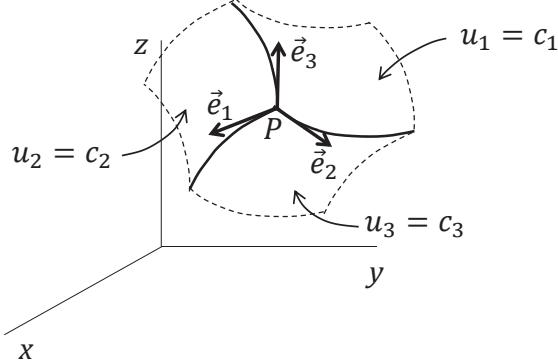
Veličine h_1, h_2 i h_3 funkcije su krivuljnih koordinata i nazivaju se **faktorima skale**. U fizici su najčešće, vektori $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ortogonalni i tvore lokalnu, ortonormiranu bazu.

8.8.3 Koordinatne plohe i krivulje

U točki P područja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ za zadane konstante c_1, c_2 i c_3 definiramo koordinatne plohe jednakostima:

$$u_1 = c_1, \quad u_2 = c_2, \quad u_3 = c_3 \quad (8.40)$$

Presjeci koordinatnih ploha definiraju koordinatne krivulje u promatranoj točki. To su koordinatne osi lokalnog koordinatnog sustava. Ako se koordinatne krivulje sijeku u točki P pod pravim kutom, tada je sustav krivocrtnih koordinata lokalno ortogonalan, ili preciznije, vektori $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ međusobno su ortogonalni u točki P (Slika 8.3).



Slika 8.3

8.8.4 Vektor infinitezimalnog pomaka

Vektor infinitezimalnog pomaka je

$$d\mathbf{r} = h_1 du_1 \mathbf{e}_1 + h_2 du_2 \mathbf{e}_2 + h_3 du_3 \mathbf{e}_3 \quad (8.41)$$

Kvadrat iznosa vektora (8.40) u promatranoj točki iznosi

$$(ds)^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = (h_1 du_1)^2 + (h_2 du_2)^2 + (h_3 du_3)^2 \quad (8.42)$$

gdje smo pretpostavili da $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ tvore ortonormiranu bazu.

8.8.5 Element volumena

Element volumena dV u krivocrtnim koordinatama glasi:

$$dV = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3 \quad (8.43)$$

8.8.6 Metrički tenzor

Ako vektori baze nisu nužno ortogonalni, kvadrat iznosa vektora (8.40) iznosi

$$(ds)^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_j} du_i du_j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g_{ij} du_i du_j \quad (8.44)$$

gdje je metrički tenzor

$$g_{ij} \equiv \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_j} du_i du_j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 h_i h_j (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) du_i du_j \quad (8.45)$$

8.8.7 Osnovne operacije s nablom u krivocrtnim koordinatama

Neka je skalarno polje $\Phi(\mathbf{r}) = \Phi(u_1, u_2, u_3)$ i vektorsko polje $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_1(u_1, u_2, u_3) \mathbf{e}_1 + A_2(u_1, u_2, u_3) \mathbf{e}_2 + A_3(u_1, u_2, u_3) \mathbf{e}_3$. Vrijede relacije:

$$\begin{aligned}\nabla\Phi &= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{h_i} \frac{\partial\Phi}{\partial u_i} \mathbf{e}_i \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (A_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2} (A_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial u_3} (A_3 h_1 h_2) \right] \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \det \begin{pmatrix} h_1 \mathbf{e}_3 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{pmatrix} \\ \nabla^2 \Phi &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} \right) \right]\end{aligned}\quad (8.45)$$

9 Frenetove formule. Diracova delta funkcija

9.1 Jordanov luk. Glatka parametrizacija krivulje

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ interval i $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbf{X}_O$ neprekidna vektorska funkcija, gdje je \mathbf{X}_O vektorski prostor svih radijus-vektora euklidskog prostora E uz zadano ishodište O i pravokutni koordinatni sustav. Skup

$$\Gamma = \{M(t) \in E : t \in I\}, \quad \mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OM(t)} \quad (9.1)$$

naziva se **krivuljom** u prostoru E . Parametrizacija skupa Γ je uređeni par $(I, M(t))$. Varijabla $t \in I$ je parametar. Ukratko se može reći da je krivulja neprekinuta slika intervala I . Primijetimo da se krivulju može parametrizirati na različite načine.

Skup $\Gamma \subset E$ u definiciji (9.1) naziva se Jordanovim lukom ili jednostavnom glatkom krivuljom ako je I zatvoreni interval, funkcija $M(t)$ je bijekcija, a $\mathbf{r}(t)$ je klase C^1 pri čemu mora vrijediti

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \neq \mathbf{0} \quad (9.2)$$

Budući je $M(t)$ bijekcija, Jordanov luk ne presijeca samog sebe. Uvjet (9.2) znači da u svakoj točki Jordanovog luka mora biti definiran vektor tangente. Tada se $(I, M(t))$ naziva glatkom parametrizacijom krivulje Γ .

9.1.1 Po dijelovima glatka krivulja. Zatvorena krivulja

Za skup $\Gamma \subset E$ kažemo da je po dijelovima glatka krivulja ako se dobiva spajanjem konačno mnogo Jordanovih luka. Ako se početna i konačna točka podudaraju, tada je krivulja Γ zatvorena.

Kontura ili zatvorena Jordanova krivulja je po dijelovima glatka, zatvorena, **ravninska** krivulja. Po Jordanovom teoremu, kontura dijeli ravninu na svoju unutrašnjost i vanjštinu.

9.1.2 Duljina luka krivulje. Prirodna parametrizacija

Neka je $\mathbf{r}(t)$ parametrizacija Jordanovog luka $\Gamma \subset E$. Duljina luka krivulje Γ između dvije točke $M_1 = M(t_1)$ i $M_2 = M(t_2)$ na krivulji Γ dane je formulom

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} dt \quad (9.3)$$

Formule se pojednostavljaju uzmemu li duljinu luka s kao parametar krivulje. Tada se $(I, M(s))$ naziva prirodnom parametrizacijom, a s prirodnim parametrom.

Napomena 9 U fizici se, najčešće, vrijeme označava s t , a derivacije po vremenu s $x' = \dot{x}, x'' = \ddot{x}, \dots$

9.2 Trobrid pratilac krivulje, $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$

Pretpostavimo da je zadana prirodna parametrizacija Jordanovog luka jednadžbom $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$. **Vektor tangente** $\mathbf{t}(s)$ zadane krivulje definiran je izrazom

$$\mathbf{t} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{ds} \quad (9.4)$$

Vektor tangente je jedinični vektor, $\|\mathbf{t}\| = 1$. **Vektor normale** $\mathbf{n}(s)$ definiran je formulom

$$\mathbf{n} \equiv \frac{1}{\kappa} \frac{d\mathbf{t}}{ds} \quad (9.5)$$

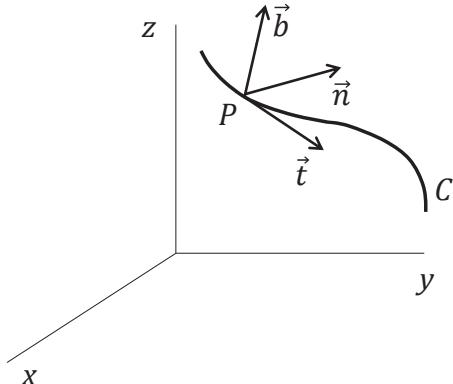
gdje je $\kappa(s)$ **zakrivljenost** krivulje u točki koja je određena s vrijednošću parametra s . Vektor normale je jedinični vektor, $\|\mathbf{n}\| = 1$. **Polumjer zakrivljenosti** $\rho(s)$ definiran je izrazom

$$\rho \equiv \frac{1}{\kappa} \quad (9.6)$$

Zakrivljenost i polumjer zakrivljenosti su nenegativne veličine, $\kappa, \rho \geq 0$. **Vektor binormale** $\mathbf{b}(s)$ definiran je pomoću vektora tangente i normale

$$\mathbf{b} \equiv \mathbf{t} \times \mathbf{n} \quad (9.7)$$

Vektor binormale je jedinični vektor, $\|\mathbf{b}\| = 1$. Može se pokazati da su vektori tangente, normale i binormale međusobno ortogonalni i da u svakoj točki krivulje tvore (lokalnu) ortonormirani bazu. Uređena trojka $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ naziva se trobrid pratilac krivulje (Slika 9.1).



Slika 9.1

9.2.1 Trobrid pratilac u bilo kojoj parametrizaciji

Ako je zadana bilo koja parametrizacija $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$, tada su vektori tangente, binormale i normale jednaki

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|}, \quad \mathbf{b} = \pm \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t} \quad (9.8)$$

gdje predznak "+" uzimamo ako vrijedi $ds/du > 0$, a "−" za $ds/du < 0$.

9.3 Frenetove formule

Neka je $\mathbf{r}(s)$ prirodna parametrizacija Jordanovog luka. Tada vrijede Frenetove formule (upotrebljava se i naziv Frenet-Serretove formule):

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{t}}{ds} &= \kappa \mathbf{n} \\ \frac{d\mathbf{b}}{ds} &= -\tau \mathbf{n} \\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} &= \tau \mathbf{b} - \kappa \mathbf{t} \end{aligned} \quad (9.9)$$

gdje je $\tau(s)$ **torzija** krivulje. Može se pokazati da za krivulje koje u potpunosti leže u ravnini vrijedi $\tau = 0$. Torzija je, zato, mjera odstupanja zadane krivulje od ravne krivulje u nekoj točki. Definiramo još i **polumjer torzije** $\sigma(s)$

$$\sigma \equiv \frac{1}{\tau} \quad (9.10)$$

Jednadžbe (9.9) su sustav linearnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda za komponente vektora u trobridu $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$. Egzistencija i jedinstvenost takvog sustava ukazuje na činjenicu da je krivulja određena svojom zakrivljenosti i torzijom, ali položaj krivulje u prostoru nije određen.

9.3.1 Izračun zakrivljenosti i torzije

Neka je krivulja C zadana u bilo kojoj parametrizaciji $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$. Zakrivljenost $\kappa(s)$ i torzija $\tau(s)$ računamo po formulama

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}{\|\mathbf{r}'\|^3} \quad (9.11)$$

$$\tau = \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''}{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|^2}$$

9.4 Definicija Diracove delta funkcije

Neka je $f(x)$ zadana funkcija. Diracovu delta funkciju definiamo izrazom:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0) \quad (9.12)$$

Ponekad je korisno zamisliti da Diracova delta funkcija posvuda, osim u točki x_0 , ima vrijednost nula. U točki x_0 vrijednost delta funkcije teži u beskonačnost.

9.4.1 Važnija svojstva

Neka važnija svojstva Diracove delta funkcije su:

$$\begin{aligned} \delta(-x) &= \delta(x) \\ \delta(cx) &= \frac{1}{c}\delta(x), c > 0 \\ x\delta(x - x_0) &= x_0\delta(x - x_0) \end{aligned} \quad (9.13)$$

Primijetite da iz zadnje jednakosti slijedi $x\delta(x) = 0$. Također, vrijedi

$$\begin{aligned} f(x)\delta(x - x_0) &= f(x_0)\delta(x - x_0) \\ \delta(x^2 - c^2) &= \frac{1}{2c} [\delta(x - c) + \delta(x + c)], c > 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_1)\delta(x - x_2)dx &= \delta(x_1 - x_2) \\ \delta[f(x)] &= \sum_i \left(\frac{df}{dx} \Big|_{a_i} \right)^{-1} \delta(x - a_i) \end{aligned} \quad (9.14)$$

gdje su a_i jednostrukе nule funkcije $f(x)$.

9.5 Derivacija δ -funkcije: $\delta'(x)$

Derivaciju δ -funkcije $\delta'(x)$ definiramo relacijom

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x)dx = - \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=0} \quad (9.15)$$

9.5.1 Važnija svojstva funkcije $\delta'(x)$ i viših derivacija

Navodimo neka važnija svojstva derivacija δ -funkcije.

$$\begin{aligned}\delta'(-x) &= -\delta(x) \\ \delta^{(n)}(-x) &= (-1)^n \delta^{(n)}(x) \\ x\delta^{(n)}(x) &= -n\delta^{(n-1)}(x) \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta^{(n)}(x)dx &= (-1)^n \frac{d^n f(x)}{dx^n} \Big|_{x=0}\end{aligned}\tag{9.16}$$

9.6 δ -funkcija u tri dimenzije

Definicija Diracove δ -funkcije u 3D slična onoj u 1D

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)d^3r = f(\mathbf{r}_0)\tag{9.17}$$

gdje je δ -funkcija u kartezijevim koordinatama jednaka

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)\tag{9.18}$$

9.7 δ -funkcija u sfernim koordinatama (r, θ, ϕ)

U sfernem sustavu koordinata δ -funkcija ima oblik

$$\begin{aligned}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(\phi - \phi_0) \\ &= \frac{1}{r^2} \delta(r - r_0) \delta(\cos \theta - \cos \theta_0) \delta(\phi - \phi_0)\end{aligned}\tag{9.19}$$

9.8 Laplace funkcije $1/r$

Za fiziku je osobito značajna relacija koja povezuje Laplaceov operator i δ -funkciju

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta(\mathbf{r})\tag{9.20}$$

10 Krivuljni integrali. Cirkulacija vektorskog polja. Stokesov teorem

10.1 Definicija krivuljnog integrala

10.1.1 Orijentacija krivulje

Za krivuljne integrale područje integracije je jednostavna, glatka krivulja (Jordanov luk) ili po dijelovima glatka krivulja koja je zadana nekom parametrizacijom. Orijentirana krivulja ili dio krivulje kojoj znamo početnu A i konačnu točku B nazivamo **putom**. Povećanjem vrijednosti parametra krivulje, prolazimo koordinatama svake točke puta između A i B . Iz tog se razloga krivuljni integrali još nazivaju i integrali duž puta ili po putu.

10.1.2 Krivuljni integrali prve vrste

Krivuljni integrali po putu γ prve vrste su oblika

$$\int_{\gamma} \Psi ds, \quad \int_{\gamma} \mathbf{a} ds \quad (10.1)$$

gdje je $\Psi(\mathbf{r})$ skalarno i $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ vektorsko polje. Element duljine luka ds krivulje γ je

$$ds = \|d\mathbf{r}\| = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} du \quad (10.2)$$

gdje je u parametar, a $\mathbf{r}(u) = x(u)\mathbf{e}_x + y(u)\mathbf{e}_y + z(u)\mathbf{e}_z$ glatka parametrizacija krivulje γ .

Napomena 10 Vektor infinitezimalnog pomaka obilježava se često i kao $d\mathbf{l}$, odnosno, $ds = \|d\mathbf{l}\|$.

10.1.3 Krivuljni integrali druge vrste

Integrali druge vrste definirani su izrazima

$$\int_{\gamma} \Psi d\mathbf{r}, \quad \int_{\gamma} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}, \quad \int_{\gamma} \mathbf{a} \times d\mathbf{r} \quad (10.3)$$

Promotrimo drugi od integrala u (10.3). Put γ razdijelimo na N dijelova $X_0X_1, X_1X_2, \dots, X_{N-1}X_N$ gdje su X_0, X_1, \dots, X_N točke na krivulji γ . Odsječak puta $X_{p-1}X_p$ aproksimiramo vektorom $\Delta\mathbf{r}_p = \mathbf{r}_p - \mathbf{r}_{p-1}$, gdje su \mathbf{r}_p i \mathbf{r}_{p-1} vektori položaja točaka X_p i X_{p-1} . Neka točki X na odsječku puta $X_{p-1}X_p$ odgovara vektor položaja ξ_p . Formiramo sumu:

$$\sum_{p=1}^N \mathbf{a}(\xi_p) \cdot \Delta\mathbf{r}_p \quad (10.4)$$

Za $N \rightarrow \infty$ imamo $\|\Delta\mathbf{r}_p\| = \Delta s_p \rightarrow 0$ te ako limes gornje sume postoji, onda ga nazivamo krivuljnim integralom po putu γ i obilježavamo

$$\int_{\gamma} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} \quad (10.5)$$

10.1.4 Cirkulacija vektorskog polja

Za zatvorenu krivulju C krivuljni integral (10.5) nazivamo cirkulacijom vektorskog polja $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ i označavamo

$$\oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} \quad (10.6)$$

10.1.5 Orijentacija plohe i rubne krivulje

Promatamo dio plohe ili cijelu plohu σ čiji je rub krivulja C . Prepostavimo da je projekcija krivulje C na xy ravninu, na primjer, po dijelovima glatka, zatvorena krivulja γ . Neka je krivulja γ rub područja D u xy -ravnini. Kažemo da je γ **pozitivno orijentirana** ako je smjer obilaska po γ takav da je D uvijek s lijeve strane. Ako je smjer obilaženja suprotan, tada je negativno orijentirana.

Krivulju C orijentiramo tako da se smjer obilaska podudara s pozitivnom orijentacijom za γ . Neka je normala \mathbf{n} u po volji odabranoj točki plohe σ takva da s vrha vektora \mathbf{n} vidimo da je smjer obilaženja po C suprotan gibanju kazaljki na satu. Onda kažemo da su σ i C **koherentno orijenitrane**.

10.2 Stokesov teorem

Neka je σ po dijelovima glatka ploha i neka je rub za σ po dijelovima glatka, jednostavna zatvorena krivulja C . Ploha i krivulja su koherentno orijentirane. Ako je polje $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ klase C^1 u okolini plohe S tada vrijedi Stokesova formula:

$$\int_{\sigma} (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n} dS = \oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} \quad (10.7)$$

10.2.1 Stokesov teorem za skalarno polje

Pomoću (10.7) može se izvesti identitet

$$\int_{\sigma} (\mathbf{n} \times \nabla \Psi) dS = \oint_C \Psi d\mathbf{l} \quad (10.8)$$

gdje je $\Psi(\mathbf{r})$ skalarno polje klase C^1 .

10.2.2 Greenov teorem

Greenov teorem je, ustvari, Stokesov teorem primjenjen na područje u xy -ravnini. Prepostavimo da krivulja C omeđuje jednostavno povezano područje D u ravnini i neka su funkcije $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ klase C^1 . Tada vrijedi formula:

$$\oint_C (P dx + Q dy) = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (10.9)$$

10.3 Teorem o konzervativnim poljima

Vektorsko polje $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ koje ima neprekidne parcijalne derivacije u jednostavno povezanom području R je konzervativno (potencijalno, bezvrtložno) ako i samo ako vrijede sljedeće tvrdnje:

- i. Integral

$$\int_A^B \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} \quad (10.10)$$

po bilo kojem putu u R od točke A do B ima jednaku vrijednost, odnosno, ne ovisi o putu integracije. Tada je:

$$\oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (10.11)$$

gdje je C bilo koja zatvorena krivulja u R .

- ii. Postoji funkcija položaja $\Phi(\mathbf{r})$ takva da je $\mathbf{a} = -\nabla\Phi$. Funkcija Φ određena je do na konstantu.

iii. Vrijedi

$$\nabla \times \mathbf{a} = 0 \quad (10.12)$$

iv. Izraz $\mathbf{a} \cdot d\mathbf{l}$ je egzaktan diferencijal.

11 Plošni integrali. Tok vektorskog polja

11.1 Ploha u prostoru

Skup $S \subset \mathbb{R}^2$ naziva se regularnom ili glatkom plohom ako svaka točka skupa S ima okolinu u S koja je difeomorfna nekom otvorenom skupu u \mathbb{R}^2 . Drugim riječima, postoji preslikavanje F koje je difeomorfizam s okoline na otvoreni skup, što znači da su F i F^{-1} bijekcije klase C^1 . Promatrat ćemo, također, plohe koje su po dijelovima glatke, odnosno, sastoje se od konačnog broja glatkih ploha.

11.2 Plošni integrali prve vrste

Zadano je skalarno polje $\Phi(\mathbf{r})$ i vektorsko polje $\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Za plošne integrale područje integracije je cijela ploha ili dio plohe σ , a razlikovat ćemo plošne integrale prve i druge vrste. Primjeri plošnih integrala prve vrste koji se koriste u fizici su oblika

$$\int_{\sigma} \Phi dS, \quad \int_{\sigma} \mathbf{A} dS \quad (11.1)$$

11.2.1 Definicija

Definirat ćemo prvi od plošnih integrala u (11.1). Razdijelimo plohu σ na N dijelova $\Delta\sigma_k$, $k = 1, 2, \dots, N$ čija je površina ΔS_k i koji se nalaze na položajima \mathbf{r}_k . Formiramo sumu:

$$\sum_{k=1}^N \Phi(\mathbf{r}_k) \Delta S_k \quad (11.2)$$

Za $N \rightarrow \infty$ površine $\Delta S_k \rightarrow 0$ pa ako limes gornje sume postoji, nazivamo ga plošnim integralom

$$\int_{\sigma} \Phi dS \quad (11.3)$$

gdje je dS element površine.

11.3 Plošni integrali druge vrste

Plošni integrali druge vrste koji se često koriste u fizici su oblika

$$\int_{\sigma} \Phi d\mathbf{S}, \quad \int_{\sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}, \quad \int_{\sigma} \mathbf{A} \times d\mathbf{S} \quad (11.4)$$

gdje je $d\mathbf{S}$ vektor elementa površine

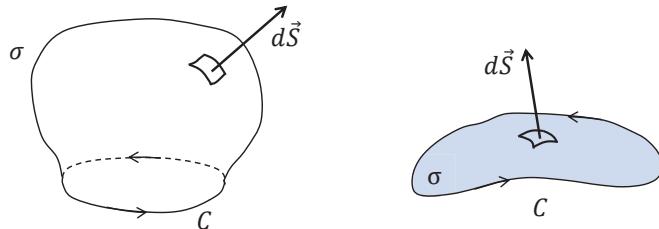
$$d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS \quad (11.5)$$

Vektor \mathbf{n} je jedinični vektor normale. Ako se radi o *zatvorenoj plohi*, na primjer o sferi, vektor \mathbf{n} usmjeren je prema vanjštini područja kojeg ploha omeđuje. Ukoliko je *ploha otvorena*, na primjer stožasta ploha bez baze, tada rubom plohe obilazimo tako da ploha σ leži s lijeve strane, a smjer normale se podudara s napredovanjem desnog vijka, kao što je objašnjeno u odjeljku 10.1.5. Na Slici 11.1 rub plohe je krivulja C .

11.3.1 Definicija

Definirat ćemo drugi od plošnih integrala u (11.4). Razdijelimo plohu σ na N dijelova $\Delta\sigma_k$, $k = 1, 2, \dots, N$ čija je površina ΔS_k i koji se nalaze na položajima \mathbf{r}_k . Jedinični vektori normale na \mathbf{r}_k su \mathbf{n}_k . Formiramo sumu:

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{A}(\mathbf{r}_k) \cdot \mathbf{n}_k \Delta S_k \quad (11.6)$$



Slika 11.1

Za $N \rightarrow \infty, \Delta S_k \rightarrow 0$ pa ako limes gornje sume postoji, nazivamo ga plošnim integralom

$$\int_{\sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \quad (11.7)$$

Ovakav se tip integrala u fizici naziva tok ili fluks polja \mathbf{A} kroz plohu σ .

Napomena 11 Ukoliko je ploha po kojoj se integrira zatvorena, ponekad se plošni integrali (11.3) i (11.7) označavaju i kao

$$\oint_{\sigma} \Phi dS, \quad \oint_{\sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (11.8)$$

11.4 Element površine i vektor normale

Računanje elementa površine i vektora normale ovisi o tome kakvom je jednadžbom zadana ploha.

11.4.1 Parametarske jednadžbe plohe

Neka je ploha σ zadana jednadžbama u parametarskom obliku

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) \quad (11.9)$$

gdje su (u, v) parametri. Element površine je

$$dS = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv \quad (11.10)$$

Označimo li kraće $\mathbf{r}_u \equiv \partial \mathbf{r} / \partial u$ i $\mathbf{r}_v \equiv \partial \mathbf{r} / \partial v$ jedinični vektor normale u točki na σ glasi

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|} \quad (11.11)$$

Primjer: sfera Parametarske jednadžbe sfere polumjera a glase

$$x(\theta, \phi) = a \sin \theta \cos \phi, \quad y(\theta, \phi) = a \sin \theta \sin \phi, \quad z(\theta, \phi) = a \cos \theta \quad (11.12)$$

Vektor normale je

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_r \quad (11.13)$$

a element površine

$$dS = a^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (11.14)$$

Tok polja \mathbf{A} kroz sferu je

$$\oint_{\sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta A_r \quad (11.15)$$

gdje je $A_r = A_r(r, \theta, \phi)$ radikalna komponenta vektorskog polja.

11.4.2 Ploha zadana implicitnom jednadžbom

Pretpostavimo da je ploha zadana jednadžbom

$$F(x, y, z) = 0 \quad (11.16)$$

Želimo li izraziti element površine plohe pomoću projekcije na xy ravninu, tada je

$$dS = \frac{\|\nabla F\|}{|\partial_z F|} dx dy \quad (11.17)$$

dok je normala

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|} \quad (11.18)$$

11.4.3 Ploha zadana eksplisitnom jednadžbom

Ako je ploha zadana jednadžbom

$$z = f(x, y) \quad (11.19)$$

za parametre uzimamo $(u, v) \rightarrow (x, y)$. Jednadžba plohe ima oblik

$$\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + f(x, y) \mathbf{e}_z \quad (11.20)$$

pa koristimo formule za parametarski zadatu plohu (11.9) - (11.11). Na primjer, element površine (11.10) je

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy \quad (11.21)$$

12 Teorem o divergenciji. Srodni teoremi

Neka je područje R omeđeno plohom σ , a normala \mathbf{n} na plohu σ usmjerena je prema vanjštinji za R . Ploha σ može biti sastavljena od više odvojenih ploha. Ako je $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ vektorsko polje klase C^1 na R i σ , tada vrijedi **teorem o divergenciji**

$$\int_R \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \oint_{\sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \quad (12.1)$$

Pomoću teorema o divergenciji, mogu se izvesti sljedeći korisni teoremi i identiteti za skalarna polja $\Phi(\mathbf{r}), \Psi(\mathbf{r})$ te vektorsko polje $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ klase C^1 na R i σ .

Teorem o gradijentu

$$\int_R \nabla \Phi dV = \oint_{\sigma} \Phi \mathbf{n} dS \quad (12.2)$$

Teorem o rotaciji

$$\int_R \nabla \times \mathbf{A} dV = \oint_{\sigma} \mathbf{n} \times \mathbf{A} dS \quad (12.3)$$

Prvi Greenov identitet (Greenov teorem)

$$\int_R (\Phi \nabla^2 \Psi + \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi) dV = \oint_{\sigma} \Phi \nabla \Psi \cdot \mathbf{n} dS \quad (12.4)$$

Drugi Greenov identitet

$$\int_R (\Phi \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Phi) dV = \oint_{\sigma} (\Phi \nabla \Psi - \Psi \nabla \Phi) \cdot \mathbf{n} dS \quad (12.5)$$

13 Tenzorski račun

IV PRILOZI

14 Vektori

14.1 Vektorski i skalarni produkt

Tekst

14.2 Važniji vektorski identiteti

Tekst

LITERATURA

- Riley K. F., Hobson M. P., *Mathematical Methods for Physics and Engineering*, 3rd. ed., Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- Arfken G. B., Weber H. J., Harris F. E., *Mathematical methods for physicists: A Comprehensive Guide*, 7th ed., Academic Press, London, 2012.
- Kurepa S., *Matematička analiza III*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1989.
- Protter M. H., Morrey C. B., *A First Course in Real Analysis*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1991.
- Protter M. H., Morrey C. B., *Intermediate Calculus*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1985.
- Dineen S., *Multivariate Calculus and Geometry*, 3rd ed., Springer-Verlag, London, 2014.
- Tapp K., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Springer International Publishing, 2016.