ODJEL ZA FIZIKU SVEUČILIŠTE U RIJECI

Preddiplomski studij Fizika

Ak. god. 2019./2020.

KVANTNA FIZIKA I PRIMJENE

Treći kolokvij 12.06.2020.

1. Čestica mase m giba se u dvodimenzionalnom potencijalu oblika

$$V(x,y) = \beta |x|\,|y|$$

(a) Upotrijebite probnu funkciju oblika

$$\psi(x,y) = Ae^{-b(x^2+y^2)}$$

da izračunate varijacijski izraz $E(b) = \langle H \rangle$.
(b) Nađite vrijednost varijacijskog parametra b koji minimizira $E(b)$.
(c) Pokažite da je gornja granica za energiju osnovnog stanja

$$E_{\min} = \hbar\sqrt{\frac{2\beta}{\pi m}}$$

2. Hamiltonijan dvodimenzionalnog izotropnog harmoničkog oscilatora glasi

$$H_0 = H_x + H_y$$

gdje je

$$H_x = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \quad H_y = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dy^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 y^2$$

Označite svojstvene vektore za H_x s $|k\rangle$, a svojstvene vektore za H_y s $|l\rangle$, gdje su k i l nenegativni cijeli brojevi.
(a) Kolike su energije osnovnog i prvog pobuđenog stanja za H_0? Kolika je degeneracija osnovnog i prvog pobuđenog stanja?
(b) Pretpostavimo da na sustav počne djelovati smetnja $V = gxy$, gdje je g realna konstanta tako da je ukupni hamilotnijan sustava

$$H = H_0 + V$$

(b1) Izračunajte energiju osnovnog stanja do drugog reda po V.
(b2) Izračunajte vektor osnovnog stanja za H do prvog reda po V. Izrazite svoj odgovor pomoću direktnog produkta stanja $|k\rangle|l\rangle$.
(b3) Izračunajte energiju prvog pobuđenog stanja do prvog reda po V.

***Uputa*:** smijete upotrijebiti matrični element

$$\langle k' | x | k \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{k+1}\,\delta_{k',k+1} + \sqrt{k}\,\delta_{k',k-1}\right)$$

3. Razmotrite "polarizacijski" potencijal

$$V(r) = \frac{V_0}{\left(r^2 + d^2\right)^2}$$

gdje su V_0 i d realne konstante.
(a) Upotrijebite prvu Bornovu aproksimaciju da izračunate amplitudu raspršenja $f(\theta)$ za navedeni potencijal. Rezultat trebate izraziti pomoću q, V_0 , d i temeljnih konstanti ($\hbar$, m, …).
(b) Nađite diferencijalni udarni presjek $d\sigma/d\Omega$.
(c) Pokažite da je totalni udarni presjek

$$\sigma = \frac{A}{k^2}\left[1 - (4kd+1)e^{-4kd}\right]$$

Kolika je konstanta A?
(d) Pokažite da je pri visokim energijama ($kd >> 1$) udarni presjek $\sigma \sim E^{-1}$.
(e) Pokažite da je za bilo koji sferno-simetričan potencijal, udarni presjek u prvoj Bornovoj aproksimaciji na visokim energijama ($k \to \infty$) uvijek $\sigma \sim E^{-1}$.

***Uputa*:** pod (a) upotrijebite parcijalnu integraciju, uzmite $u = \sin(qr)$ i $dv = rdr/(r^2 + d^2)^2$. Pod (e), pokažite najprije da vrijedi relacija $k^2 \sin\theta d\theta = qdq$, gdje je valni vektor $k^2 = 2mE/\hbar^2$, a promjena valnog vektora $q = |\mathbf{k'} - \mathbf{k}|$ te zamijenite integraciju po θ s integracijom po q u izrazu za totalni udarni prosjek.

1.

(a) $$\psi(x,y) = A e^{-b(x^2+y^2)}$$

Normalizacyjna stała

$$|A|^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2b(x^2+y^2)} dx\,dy}_{\left(\sqrt{\frac{\pi}{2b}}\right)^2} = 1$$

$$|A|^2 = \frac{2b}{\pi} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2b}{\pi}}$$

Rachujemy wartości wzgl

$$E(b) = \langle H \rangle = \langle T \rangle + \langle V \rangle$$

$$\langle T \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, \psi \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -2b e^{-bx^2} + 4b^2 x^2 e^{-bx^2}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -2b e^{-by^2} + 4b^2 y^2 e^{-by^2}$$

$$\psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -2b e^{-2b(x^2+y^2)} + 4b^2 e^{-2b(x^2+y^2)} x^2$$

$$\psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -2b e^{-2b(x^2+y^2)} + 4b^2 e^{-2b(x^2+y^2)} y^2$$

$$\langle T \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} |A|^2 \cdot \left\{ -4b \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-2b(x^2+y^2)} + \right.$$

nastawek na drugą stronę.

$$+ 4b^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-2b(x^2+y^2)} x^2 + 4b^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-2b(x^2+y^2)} y^2 \Big\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-2b(x^2+y^2)} x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-2b(x^2+y^2)} y^2$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2b}} \cdot \frac{1}{4b} \sqrt{\frac{\pi}{2b}} = \frac{\pi}{8b^2}$$

$$\langle T \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{2b}{\pi} \cdot \left\{ -4b \cdot \frac{\pi}{2b} + 4b^2 \cdot \frac{\pi}{8b^2} + 4b^2 \cdot \frac{\pi}{8b^2} \right\}$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{2b}{\pi} \cdot \left\{ -2\pi + \pi \right\} = \frac{\hbar^2}{2m} \cdot 2b = \frac{\hbar^2}{m} \cdot b$$

$$\langle V \rangle = z \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, |\psi|^2 \cdot |x| \cdot |y|$$

$$= 4z \cdot |A|^2 \cdot \underbrace{\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} dy\, e^{-2b(x^2+y^2)} \cdot x \cdot y}_{\left(\frac{1}{4b}\right)^2}$$

$$= 4z \cdot \frac{2b}{\pi} \cdot \frac{1}{16b^2} = \frac{z}{2\pi b}$$

$$\boxed{E(b) = \frac{\hbar^2}{m} b + \frac{z}{2\pi b}}$$

(b)

$$\frac{dE}{db} = \frac{\hbar^2}{m} - \frac{z}{2\pi} \cdot \frac{1}{b^2} = 0$$

$$b_0 = \sqrt{\frac{mz}{2\pi\hbar^2}}$$

(c)

$$E(b_0) = \frac{\hbar^2}{m}\sqrt{\frac{mz}{2\pi\hbar^2}} + \frac{z}{2\pi}\sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mz}}$$

$$= \frac{\hbar \cdot 2\sqrt{z}}{\sqrt{2\pi m}} = \hbar\sqrt{\frac{2z}{\pi m}}$$

$\boxed{2.}$

(a) Ukupna energija sustava je

$$E = \hbar\omega\left(k+\frac{1}{2}\right) + \hbar\omega\left(l+\frac{1}{2}\right) = \hbar\omega(k+l+1)$$

Energija osnovnog stanja: $k=l=0$

$$E = \hbar\omega$$

Energija prvog pobuđenog stanja: $k=0$ i $l=1$ ili $l=0, k=1$

$$E = \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{3}{2}\hbar\omega = 2\hbar\omega$$

Za prvo pobuđeno stanje imamo <u>dvostruku</u> degeneraciju. Osnovno stanje nema degeneraciju.

(b) Svojstvena stanja za $H = H_x + H_y$ su oblika

$$\{|k\rangle|l\rangle\} = \{|k\,l\rangle\}$$

Pretpostavimo da na sustav počne djelovati smetnja

$$V = gxy$$

(b1) Računamo korekcije za osnovno stanje

$$|0\rangle|0\rangle = |0\,0\rangle$$

U prvom redu računa smetnje za nedegenerirana stanja

$$\langle 0\,0|V|0\,0\rangle = 0$$

Naime, valne funkcije za osnovno stanje su parne, a smetnja je neparna. Stoga je cijela podintegralna funkcija neparna na simetričnom intervalu $(-\infty, +\infty)$, a to je nula.

Za drugi red računa smetnje

$$E^2 = \sum_{k\neq 0}\sum_{l\neq 0} \frac{|\langle kl|V|00\rangle|^2}{\underbrace{\hbar\omega - \hbar\omega(k+l+1)}_{-\hbar\omega(k+l)}}$$

$$\langle kl|gxy|00\rangle = g\langle k|x|0\rangle\langle l|y|0\rangle$$

$$= g\cdot\frac{\hbar}{2m\omega}\left(\delta_{k,1}\right)\left(\delta_{l,1}\right)$$

gdje smo koristili dani matrični element za x. Imamo

$$E^2 = \left(\frac{\hbar\cdot g}{2m\omega}\right)^2\cdot\frac{1}{-\hbar\omega}\cdot\underbrace{\sum_{k\neq 0}\sum_{l\neq 0}\frac{\delta_{k1}\,\delta_{l1}}{k+l}}_{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{\hbar g^2}{8m^2\omega^3}$$

Do drugog reda, za osnovno stanje imamo

$$E_0 = \hbar\omega - \frac{\hbar g^2}{8m^2\omega^3} = \hbar\omega\left(1 - \frac{g^2}{8m^2\omega^4}\right)$$

(52) Do prvog reda, promjena vektora stanja glasi

$$|kl\rangle^{(1)} = \sum_{k\neq 0}\sum_{l\neq 0}\frac{\langle kl|V|00\rangle}{\hbar\omega - \hbar\omega(k+l+1)}|kl\rangle$$

$$\langle k\ell | V | 00 \rangle = g \frac{\hbar}{2m\omega} \delta_{k1} \delta_{\ell 1}$$

$$|k\ell\rangle^{(1)} = \frac{\hbar g}{2m\omega} \cdot \frac{1}{-\hbar\omega} \cdot \frac{1}{2} |1\rangle|1\rangle$$

$$= -\frac{g}{4m\omega^2} |1\rangle|1\rangle$$

Vidimo da je osnovno stanje

$$|\psi\rangle = |0\rangle|0\rangle - \frac{g}{4m\omega^2} |1\rangle|1\rangle$$

(b3) Računamo korekcije energije za prvo pobuđeno stanje.

Najprije treba napisati matricu u bazi $\{|01\rangle, |10\rangle\}$

Matrični elementi glase

$$\langle 01 | V | 01 \rangle = 0$$

$$\langle 01 | V | 10 \rangle = g \langle 0 | x | 1 \rangle \langle 1 | x | 0 \rangle$$

$$= g \frac{\hbar}{2m\omega} \cdot \delta_{00} \delta_{00} = \frac{g\hbar}{2m\omega}$$

$$\langle 10 | V | 01 \rangle = \frac{g\hbar}{2m\omega}$$

$$\langle 10 | V | 10 \rangle = 0$$

Matrica za V izgleda ovako

$$V \doteq \frac{g\hbar}{2m\omega} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Računamo svojstvene vrijednosti za matricu

$$\frac{2m\omega}{g\hbar} V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 1$$

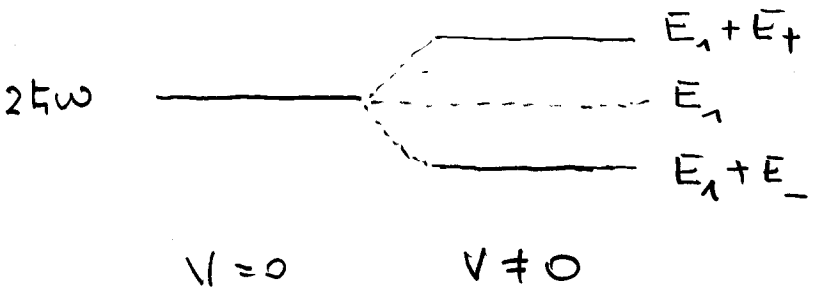
Imamo,

$$E^{(1)}_{+/-} = \pm \frac{g\hbar}{2m\omega}$$

Odnosno,

$$E = 2\hbar\omega \pm \frac{g}{2m\omega^2}\hbar\omega$$

$$= 2\hbar\omega \left(1 \pm \frac{g}{4m\omega^2}\right)$$



Smetnje je ukinula degeneraciju.

$\boxed{3.}$

Potencijal je sferno-simetričan

$$V(r) = \frac{V_0}{(r^2+d^2)^2}$$

Amplituda raspršenja

$$f(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2 q} \cdot \int_0^\infty dr\, r\, V(r) \sin(qr)$$

$$= -\frac{2m}{\hbar^2 q} \cdot \int_0^\infty dr\, \frac{r V_0}{(r^2+d^2)^2} \sin(qr)$$

Ovaj integral riješit ćemo parcijalnom integracijom

$$du = \frac{r\,dr}{(r^2+d^2)^2}$$

$$u = -\frac{1}{(r^2+d^2)} \cdot \frac{1}{2}$$

$$v = \sin(qr)$$

$$dv = \cos(qr) \cdot q\,dr$$

$$\int_0^\infty \frac{r\,dr}{(r^2+d^2)^2} \sin(qr) = \underbrace{-\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(qr)}{(r^2+d^2)} \Big|_0^\infty}_{=0} + \frac{q}{2} \int_0^\infty \frac{\cos(qr)}{(r^2+d^2)} dr$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos(qr)\,dr}{r^2+d^2} = \frac{1}{d^2} \int_0^\infty \frac{\cos(qr)\,dr}{(r/d)^2+1} = \left[\frac{r}{d} = x\right]$$

$$= \frac{1}{d^2} \cdot d \int_0^\infty \frac{\cos(qdx)}{1+x^2} dx$$

$$= [\text{Brouštejn}] = \frac{\pi}{2d} e^{-qd}$$

$$f(\theta) = -\frac{2mV_0}{\hbar^2 q} \cdot \frac{q}{2} \cdot \frac{\pi}{2d} e^{-qd}$$

$$= -\frac{\pi m V_0}{2\hbar^2 d} e^{-qd}$$

(b) Diferencijalni udarni presjek

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \underbrace{\frac{\pi^2 m^2 V_0^2}{4\hbar^4 d^2}}_{\equiv \alpha} e^{-2qd}$$

(c) Totalni udarni presjek

$$\sigma_{tot} = 2\pi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \cdot |f(\theta)|^2$$

$$= 2\pi\alpha \cdot \int_0^{\pi} d\theta \cdot 2 \sin\theta/2 \cdot \cos\theta/2 \cdot e^{-4Kd\sin(\theta/2)}$$

gdje smo koristili

$$q = 2K \sin\theta/2$$

Promjena varijabli

$$\sin\theta/2 = x \,/\, d$$

$$\cos\theta/2 \cdot \frac{d\theta}{2} = dx$$

$$\sigma_{tot} = 2\pi\alpha \cdot 2 \cdot 2 \int_0^1 dx \cdot x\, e^{-4Kdx}$$

$$= 8\pi\alpha \cdot \frac{e^{-4Kdx}}{16K^2d^2}\left(-4Kdx - 1\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{\pi\alpha}{2d^2K^2}\left\{1 - (4Kd+1)e^{-4Kd}\right\}$$

Konstanta A je

$$A = \frac{\pi \alpha}{2d^2} = \frac{\pi}{2d^2} \cdot \frac{\pi^2 m^2 V_0^2}{4\hbar^4 d^2} = \frac{\pi^3 m^2 V_0^2}{8 d^4 \hbar^4}$$

(d) Za $kd \gg 1$

$$e^{-4kd} \to 0 \; ; \; (1+4kd)e^{-4dk} \to 0$$

pa preostaje

$$\sigma \propto \frac{1}{k^2} \propto \frac{1}{E}$$

ker je

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

(e) Totalni udarni presek glasi

$$\sigma_{tot} = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = 2\pi \int_0^{\pi} |f(\theta)|^2 \sin\theta \, d\theta$$

za sferno-simetrični potencijal. Iz

$$q = 2k \sin \theta/2$$

$$\sin\theta = 2 \sin\theta/2 \cos\theta/2$$

$$dq = 2k \cdot \cos\theta/2 \cdot \frac{1}{2} d\theta$$

$$= k \cos\theta/2 \, d\theta$$

sledi

$$\sin\theta \, d\theta = \frac{q}{k} \cdot \frac{dq}{k} = \frac{q \, dq}{k^2}$$

pa je totalni udarni presek

$$\sigma_{tot} = 2\pi \cdot \frac{1}{k^2} \int_0^{2k} |f(q)|^2 q \, dq$$

Za visoke energije $k \to \infty$, integral nema konvergiranje za potencijale konačnog dosega pa je

$$\sigma_{tot} \propto \frac{1}{k^2} \propto \frac{1}{E}$$