ODJEL ZA FIZIKU SVEUČILIŠTE U RIJECI

Preddiplomski studij Fizika

Ak. god. 2019./2020.

KVANTNA FIZIKA I PRIMJENE

Drugi kolokvij 22.05.2020.

1. U ovom zadatku, vrijednosti spina izražene su u jedinicama od $\hbar$. Promotrite sustav koji se sastoji od dvije neinteragirajuće čestice: za česticu 1 spin je 1, a čestica 2 ima spin 1/2. Mjerenje je pokazalo sljedeće rezultate:

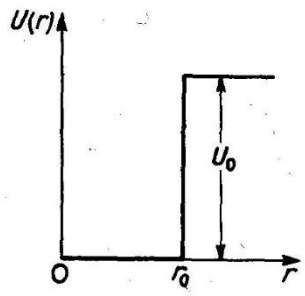
$$s_{1z} = -1;\ s_{2y} = \frac{1}{2}$$

Ovdje su $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$ operatori spina čestice 1 i 2, a S_{1z} , S_{2y} operatori projekcije spina na os z za prvu česticu i os y za drugu česticu. Njihove svojstvene vrijednosti su s_{1z} , s_{2y} . Kolika je vjerojatnost da za ukupni spin sustava izmjerimo vrijednost $s = 1/2$?

2. Čestica se giba u sferno-simetričnom potencijalu prikazanom na slici. U području $r \leq 0$ valna funkcija je jednaka nuli.
(a) Riješite Schrödingerovu jednadžbu za ovaj problem i nađite valne funkcije ako je energija $E < U_0$.
(b) Nađite jednadžbu iz koje se mogu izračunati energije. Jednadžba se ne može riješiti analitički pa je dovoljno da je napišete u što jasnijem obliku.
(c) Napišite uvjet dobiven pod (b) za $l = 0$. Možete li grafički naći rješenja ove jednadžbe?
***Uputa*:** kovergentna rješenja jednadžbe

$$x^2 y'' + 2xy' - \left[\lambda^2 x^2 + l(l+1)\right] y = 0$$

nazivaju se modificirane sferne Besselove funkcije druge vrste, $y = k_l(\lambda x)$. U dodatku se nalaze neke osnovne informacije o ovim funkcijama.



3. (a) Provjerite zadovoljava li vektorski potencijal

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{2}\mathbf{r} \times \mathbf{B}$$

uvjet $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, gdje je $\mathbf{B}$ konstantno magnetsko polje.
(b) Neka je $\mathbf{A}$ vektorski potencijal zadan pod (a). Pokažite da je član

$$-\frac{q}{m}\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}$$

koji se pojavljuje u hamilotonijanu za česticu u EM polju jednak izrazu za interakciju magnetskog momenta μ_L zbog orbitalnog angularnog momenta s magnetskim poljem $\mathbf{B}$

$$-\boldsymbol{\mu}_L \cdot \mathbf{B} = -\frac{q}{2m}\mathbf{L} \cdot \mathbf{B} = -\frac{q}{2m}\mathbf{B} \cdot \mathbf{L}$$

gdje je q naboj, a m masa čestice.
(c) (NIJE OBAVEZNO) Je li tvrdnja pod (b) točna ako je $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$? Pretpostavimo da smo našli potencijal za kojeg je $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Je li operator $-\boldsymbol{\mu}_L \cdot \mathbf{B}$ uopće hermitski?

4. (a) Nađite svojstvene funkcije operatora $\mathbf{L}^2$ i L_z u impulsnoj reprezentciji, dakle, kao valne funkcije iz impulsnog prostora.
(b) Pokažite da je prosječna vrijednost impulsa

$$\langle \mathbf{p} \rangle = 0$$

u stanju kojem ima oštro definirane svojstvene vrijednosti $\mathbf{L}^2$ i L_z , odnosno, l i m.

***Uputa*:** pod (a), prisjetite se da su u impulsnoj reprezentaciji, operator položaja **r** i impulsa **p** jednaki

$$\langle \mathbf{p}' | \mathbf{r} | \psi \rangle = -\frac{\hbar}{i} \nabla_{\mathbf{p}'} \psi(\mathbf{p}')$$

$$\langle \mathbf{p}' | \mathbf{p} | \psi \rangle = \mathbf{p}' \psi(\mathbf{p}')$$

gdje je $\nabla_{\mathbf{p}'} = (\partial/\partial p'_x , \partial/\partial p'_y , \partial/\partial p'_z)$.

$\boxed{1.}$

S vježbi

$$|S_y;+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|-\rangle$$

Početno stanje napisat ćemo pomoću vektora $|S_y;+\rangle$

$$|\alpha\rangle = |s_1=1, s_{1z}=-1\rangle\,|s_2=\tfrac{1}{2}; s_{2y}=\tfrac{1}{2}\rangle =$$

$$= |s_1=1, s_{1z}=-1\rangle\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|s_2=\tfrac{1}{2}, m_2=\tfrac{1}{2}\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|s_2=\tfrac{1}{2}, m_2=-\tfrac{1}{2}\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}|s_1=1, s_{1z}=-1\rangle\,|s_2=\tfrac{1}{2}, m_2=\tfrac{1}{2}\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|s_1=1, s_{1z}=-1\rangle\,|s_2=\tfrac{1}{2}, m_2=-\tfrac{1}{2}\rangle$$

Napišimo ove vektore samo pomoću z-projekcije

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|m_1=-1, m_2=\tfrac{1}{2}\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|m_1=-1, m_2=-\tfrac{1}{2}\rangle$$

Iz tablica s Clebsch-Gordanovim koeficijentima

$$|m_1=-1, m_2=\tfrac{1}{2}\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|j=\tfrac{3}{2}, m=-\tfrac{1}{2}\rangle - \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|j=\tfrac{1}{2}, m=-\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$|m_1=-1, m_2=-\tfrac{1}{2}\rangle = |j=\tfrac{3}{2}, m=-\tfrac{3}{2}\rangle$$

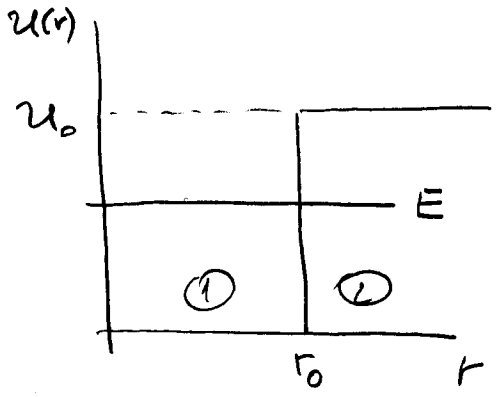
Početno stanje

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}|j=\tfrac{3}{2}, m=-\tfrac{1}{2}\rangle - \underbrace{\sqrt{\tfrac{2}{3}}}_{C_{j=\frac{1}{2}}}|j=\tfrac{1}{2}, m=-\tfrac{1}{2}\rangle\right) + \frac{i}{\sqrt{2}}|j=\tfrac{3}{2}, m=-\tfrac{3}{2}\rangle$$

Vjerojatnost da za ukupni spin ostane izmjerimo $\frac{1}{2}$ je $\boxed{|C_{j=\frac{1}{2}}|^2 = \frac{1}{3}}$.

$\boxed{2.}$

(a)



$E < U_0$

Rješenje Schrödingerove jednadžbe u oba područja je oblika

$$\psi = R(r)\, Y_\ell^m(\theta,\phi)$$

Treba riješiti radijalnu Schrödingerovu jednadžbu u području 1 i 2 te rješenje spojiti rubnim uvjetima.

U području 1 radijalna Schrödingerova jednadžba glasi

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right\} R + k^2 R = 0$$

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

Rješenje ove jednadžbe glasi

$$R = A\, j_\ell(kr)$$

gdje je j_ℓ sferna Besselova funkcija reda ℓ. Za $r \to 0$

$$j_\ell(kr) \to 0$$

čime je zadovoljen uvjet konačnosti valne funkcije.

U području 2 radijalna Schrödingerova jednadžba glasi

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right\} R - \lambda^2 R = 0$$

$$\lambda^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(U_0 - E) > 0$$

Uz zamjenu

$$\rho = \lambda r$$

ova jednadžba postaje

$$\frac{d^2}{dr^2} \to \frac{d^2}{d\rho^2}\cdot\Lambda^2 \; ; \; \frac{d}{dr} \to \frac{d}{d\rho}\Lambda$$

$$\Lambda^2\left\{\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{d}{d\rho} - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2}\right\}R - \Lambda^2 R = 0$$

odnosno,

$$\rho^2 R'' + 2\rho R'' - \{\rho^2 + \ell(\ell+1)\}R = 0$$

Rješenje ove jednadžbe za koje $\rho \to \infty$, $R \to 0$ glasi

$$R = B\, K_\ell(\Lambda r)$$

gdje je K_ℓ modificirana sferna Besselova funkcija druge vrste.

(b) Rubni uvjeti

$$A\, j_\ell(kr_0) = B\, K_\ell(\Lambda r_0)$$

$$A k\, j_\ell'(kr_0) = B\Lambda K_\ell'(\Lambda r_0)$$

Ovaj sustav jednadžbi ima netrivijalno rješenje za A i B ako je

$$\det\begin{pmatrix} j_\ell(kr_0) & K_\ell(\Lambda r_0) \\ k\, j_\ell'(kr_0) & \Lambda K_\ell'(\Lambda r_0)\end{pmatrix} = 0$$

Dakle, jednadžba iz koje se dobivaju energije glasi

$$\Lambda\, j_\ell(kr_0) K_\ell'(\Lambda r_0) - k\, K_\ell(\Lambda r_0)\, j_\ell'(kr_0) = 0$$

(c) Za $\ell = 0$ je

$$j_0(kr_0) = \frac{\sin(kr_0)}{kr_0} \; ; \; j_0'(kr_0) = \frac{\cos(kr_0)}{kr_0} - \frac{\sin(kr_0)}{(kr_0)^2}$$

$$K_0(\Lambda r_0) = \frac{e^{-\Lambda r_0}}{\Lambda r_0} \quad ; \quad K_0'(\Lambda r_0) = \frac{e^{-\Lambda r_0}\cdot(-1)}{\Lambda r_0} - \frac{e^{-\Lambda r_0}}{\Lambda^2 r_0^2}$$

Vstavimo v zvezo dobljeno pod (3)

$$\Lambda\, J_0(k r_0)\, K_0'(k r_0) - k\, K_0(\Lambda r_0)\, J_0'(k r_0) = 0$$

$$\Lambda \cdot \frac{\sin(k r_0)}{k r_0} \cdot \left(-\frac{e^{\Lambda r_0}}{\Lambda r_0} - \frac{e^{-\Lambda r_0}}{\Lambda^2 r_0^2} \right)$$

$$- k \cdot \frac{e^{-\Lambda r_0}}{\Lambda r_0} \cdot \left(\frac{\cos(k r_0)}{k r_0} - \frac{\sin(k r_0)}{(k r_0)^2} \right) = 0$$

$$-\Lambda \sin(k r_0) \left(1 + \frac{1}{\Lambda r_0} \right) - k \left[\cos(k r_0) - \frac{\sin(k r_0)}{k r_0} \right] = 0$$

$$-\Lambda \sin(k r_0) = k \cos(k r_0)$$

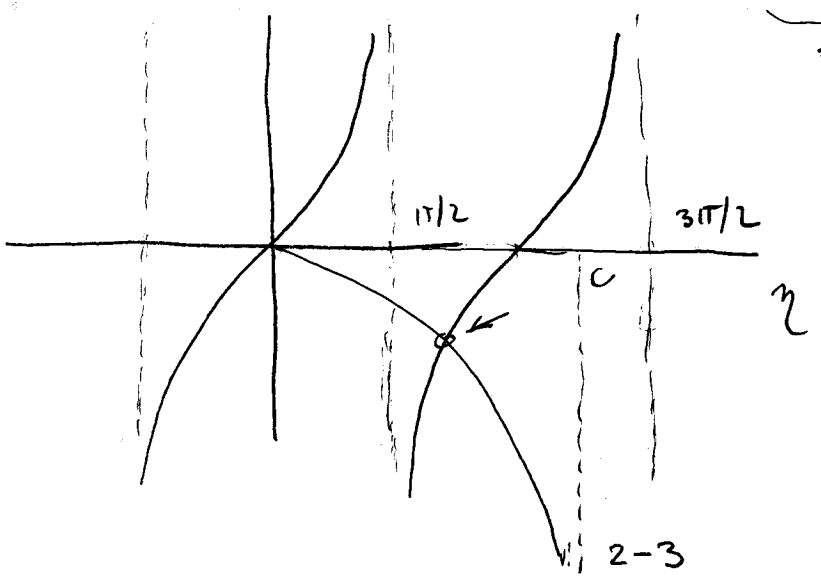
$$\Lambda \tan(k r_0) = -k$$

Skica rešitev: stavimo $\eta = k r_0$

$$\eta^2 = k^2 r_0^2 = \frac{2 m r_0^2}{\hbar^2} E$$

$$\frac{k}{\Lambda} = \sqrt{\frac{E}{U_0 - E}} = \sqrt{\frac{\eta^2}{\underbrace{\frac{2 m U_0 r_0^2}{\hbar^2}}_{=C^2} - \eta^2}}$$

$$\tan \eta = -\sqrt{\frac{\eta^2}{C^2 - \eta^2}}$$



$$C^2 - \eta^2 > 0$$

$$\eta < \sqrt{\frac{2 m U_0 r_0^2}{\hbar^2}}$$

Da dobijemo točno jedno rješenje moramo imati uvjet

$$\frac{3\pi}{2} > c > \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 > \frac{2mU_0r_0^2}{\hbar^2} > \left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

$\boxed{3.}$

(a) $$A_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) x_j B_k$$

$\vec{B}$ je konstantno polje

Najprej preverimo $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right)_i \overset{?}{=} B_i$$

$$\sum_{jk} \epsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j} = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{em} \left(-\frac{1}{2}\right) \epsilon_{kem} x_e B_m \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \sum_{jkem} \epsilon_{ijk} \epsilon_{kem} \underbrace{\frac{\partial x_e}{\partial x_j}}_{\delta_{ej}} B_m$$

$$\sum_k \epsilon_{ijk} \epsilon_{kem} = \epsilon_{kij} \epsilon_{kem} = \delta_{ie} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{je}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right) \left[\sum_{jem} \delta_{ie} \delta_{jm} \delta_{ej} B_m - \sum_{jem} \delta_{im} \delta_{je} \delta_{ej} B_m \right]$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right) \left[B_i - B_i \underbrace{\sum_j \delta_{jj}}_{3} \right] = B_i$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \overset{?}{=} 0$$

$$\sum_i \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \left(-\frac{1}{2}\right) \underbrace{\frac{\partial x_j}{\partial x_i}}_{\delta_{ji}} B_k = \left(-\frac{1}{2}\right) \sum_{ik} \underbrace{\epsilon_{iik}}_{=0} B_k$$

$$= 0$$

(b) Računamo $\vec{A}\cdot\vec{p}$

Zbog $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ je

$$\vec{A}\cdot\vec{p} = \vec{p}\cdot\vec{A}$$

$$\sum_i A_i p_i = \left(-\frac{1}{2}\right)\sum_{ijk} \epsilon_{ijk} x_j B_k p_i$$

$$= \left(+\frac{1}{2}\right)\sum_k B_k \underbrace{\sum_{ij} \epsilon_{kji} x_j p_i}_{L_k}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_k B_k L_k$$

Imamo

$$-\frac{e}{m}\vec{A}\cdot\vec{p} = -\frac{e}{2m}\vec{B}\cdot\vec{L}$$

(c) Ovo nije bilo očekivano!

Ako $\vec{B}$ ovisi o $\vec{r}$, tada $\vec{L}$ i $\vec{B}$, odnosno $\vec{\mu}_L$ i $\vec{B}$ ne komutiraju, općenito. Odavdje $\vec{\mu}_L\cdot\vec{B}$ nije hermitski.

Vjerojatno treba raditi s operatorom

$$\frac{1}{2}\left(\vec{\mu}_L\cdot\vec{B} + \vec{B}\cdot\vec{\mu}_L\right)$$

koji je hermitski.

$\boxed{4.}$

(a) Uzmimo komponentu angularnog momenta

$$\langle \vec{p}\,' | L_i | \psi \rangle = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \langle \vec{p}\,' | x_j p_k | \psi \rangle$$

Zbog

$$[x_j, p_k] = x_j p_k - p_k x_j = i\hbar \delta_{jk}$$

imamo

$$\sum_{jk} \epsilon_{ijk} \langle \vec{p}\,' | p_k x_j | \psi \rangle + i\hbar \sum_{jk} \underbrace{\epsilon_{ijk} \delta_{jk}}_{\epsilon_{ijj} = 0} \langle \vec{p}\,' | \psi \rangle$$

Prema tome

$$\langle \vec{p}\,' | L_i | \psi \rangle = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \langle \vec{p}\,' | p_k \underbrace{\mathbb{1}}_{\int d^3p'' |\vec{p}\,''\rangle\langle \vec{p}\,''|} x_j | \psi$$

$$= \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \int d^3p'' \langle \vec{p}\,' | p_k | \vec{p}\,'' \rangle \langle \vec{p}\,'' | x_j | \psi \rangle$$

Zbog

$$\langle \vec{p}\,' | p_k | \vec{p}\,'' \rangle = p_k' \langle \vec{p}\,' | \vec{p}\,'' \rangle = p_k' \, \delta(\vec{p}\,' - \vec{p}\,'')$$

$$\langle \vec{p}\,'' | x_j | \psi \rangle = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial p_j''} \psi(\vec{p}\,'')$$

Imamo

$$\langle \vec{p}\,' | L_i | \psi \rangle = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \, p_k' \left(-\frac{\hbar}{i}\right) \frac{\partial}{\partial p_j'} \psi(\vec{p}\,')$$

Zamjenimo li indekse k i j u $\epsilon_{ijk} \to -\epsilon_{ikj}$

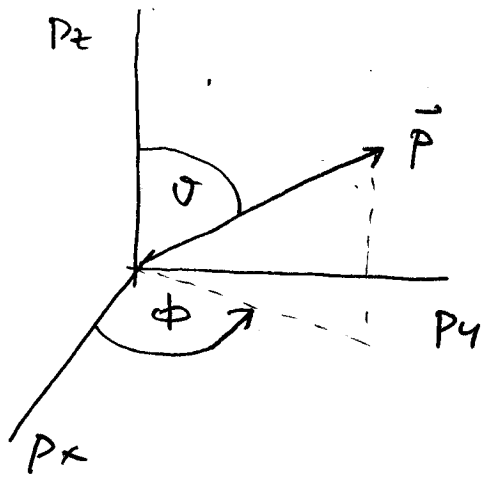
$$\langle \vec{p}' | L_i | \psi \rangle = \sum_{jk} (-\epsilon_{ikj}) p'_k \left(-\frac{\hbar}{i}\right) \frac{\partial}{\partial p'_j} \psi(\vec{p}')$$

$$= \sum_{jk} \epsilon_{ikj} p'_k \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial p'_j}\right) \psi(\vec{p}')$$

Dobijemo točno isti izraz kao i za x-reprezentaciju s tim da se $\vec{r}$ i $\vec{p}$ zamjene. U sfernom sustavu koordinata

$$(r, \theta, \phi) \to (p, \theta, \phi)$$

Dakle, kutni operator u kutnim koordinatama je identičan kao i kod $\vec{r}$-reprezentacije. Prema tome, sferni harmonici su i dalje svojstvene funkcije za $\vec{L}^2$ i L_z, ali se kutovi odnose na $\vec{p}$-prostor.



$$\vec{L}^2 Y_\ell^m = \ell(\ell+1)\hbar^2 Y_\ell^m$$

$$L_z Y_\ell^m = m\hbar Y_\ell^m$$

(b) Stanje s oštro definiranim vrijednostima za ℓ i m su upravo sferni harmonici. Ho, sferni harmonici, sada u impulsnom prostoru, imaju dobro definiranu paritet: ili su parni ili neparni za promjenu $\vec{p}' \to +\vec{p}'$

$$\langle \vec{p} \rangle = \langle lm | \vec{p} | lm \rangle$$

$$= \int d\Omega \, Y_l^{m\,*}(\theta,\phi) \, \vec{p} \, Y_l^m(\theta,\phi) = \int d\Omega \, \vec{p} \, |Y_l^m|^2$$

za $\vec{p} \to -\vec{p}$ ovaj integral se mijenja u

$$= -\int d\Omega \, \vec{p} \, |Y_l^m|^2 = -\langle \vec{p} \rangle$$

pa je

$$\langle \vec{p} \rangle = 0$$