ODJEL ZA FIZIKU SVEUČILIŠTE U RIJECI

Preddipl. stud. Fizika Dipl. stud. Fizika i matematika Dipl. stud. Fizika i informatika Dipl. stud. Fizika i filozofija

Ak. god. 2019./2020.

KVANTNA FIZIKA I PRIMJENE

Prvi kolokvij 29.04.2020.

1. Neka su $\{E_n\}$ energije vezanih stanja za 1D sustav kojima pripadaju normalizirane valne funkcije $\{\psi_n\}$. U trenutku $t = 0$ normalizirana valna funkcija sustava zadana je izrazom:

$$\Psi(x,t=0)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\alpha_1}\psi_1(x)+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\alpha_2}\psi_2(x)+\frac{1}{\sqrt{6}}e^{i\alpha_3}\psi_3(x)$$

gdje su α_i konstante.
(a) Napišite valnu funkciju $\Psi(x, t)$.
(b) Nađite vjerojatnost da u trenutku t mjerenje energije sustava pokaže vrijednost E_2 .
(c) Da li $\langle x\rangle$ ovisi o vremenu? Da li $\langle p\rangle$ ovisi o vremenu? Da li $E = \langle H\rangle$ ovisi o vremenu? Sve prosječne vrijednosti računaju se obzirom na zadano kvantno stanje $\Psi(x, t)$.

2. Razmotrite sustav dva identična jednostavna harmonička oscilatora kružne frekvencije ω i mase m.
(a) Napišite hamiltonijan ovog sustava neovisnih oscilatora i nađite energije sustava.
(b) Prepostavimo da su sada oscilatori vezani interakcijom $-\lambda x_1 x_2$, gdje je λ realna konstanta, a koordinate x_1 i x_2 odnose se na oscilator 1 i 2, respektivno. Napišite hamilotonijan ovog sustava vezanih oscilatora i nađite energije sustava.
(c) Prepostavljajući da je $\lambda << m\omega^2$ (granica slabog vezanja) nađite aproksimativne energije do prvog reda po $\lambda/m\omega^2$ pomoću izraza izračunatog pod (b).
***Uputa*:** pod (b), u hamilotonijanu sustava promijenite koordinate

$$\eta=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1+x_2)$$

$$\xi=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1-x_2)$$

3. Zadana su dva operatora A i B. Ako je $[A, B] = c$, gdje je c skalar (broj), pokažite da vrijedi:
(a) $e^A B e^{-A} = B + c$
(b) $e^{A+B} = e^A e^B e^{-c/2}$
***Uputa*:** pod (a), izračunajte $[e^A, B]$ na dva načina: upotrijebite definiciju komutatora i definiciju

$$e^A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}$$

Pod (b), uvedite operator

$$T(\lambda)=e^{\lambda A}e^{\lambda B}$$

i diferencirajte po λ. Koristite rezultat pod (a), a ne kraju računa postavite $\lambda = 1$.

$\boxed{1.}$

(a) Radi se stacionarnim stanjima ψ_1, ψ_2 i ψ_3 pa možemo pisati

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\alpha_1} \psi_1(x) e^{-iE_1 t/\hbar} + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i\alpha_2} \psi_2 e^{-iE_2 t/\hbar}$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{6}} e^{i\alpha_3} \psi_3(x) e^{-iE_3 t/\hbar}$$

(b) Pomnožimo ti rezultat pod (a) s ψ_2^* i integriramo

$$\langle \psi_2 | \psi; t \rangle = \int dx\, \psi_2^* \psi(x,t)$$
$$= \sum_{j=1}^{3} c_j e^{i\alpha_j} \underbrace{\int dx\, \psi_2^*(x) \psi_j(x)}_{\delta_{j2}} \cdot e^{-iE_j t/\hbar}$$
$$= c_2 e^{i\alpha_2} e^{-iE_2 t/\hbar}$$

gdje je $c_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Dobili smo amplitudu vjerojatnosti da u trenutku t izmjerimo energiju E_2. Vjerojatnost je

$$|\langle \psi_2 | \psi; t \rangle|^2 = |c_2|^2 = \frac{1}{3}$$

(c)
$$\langle x \rangle_\psi = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} c_j^* c_k e^{-i(\alpha_k + \alpha_j)} \cdot e^{i(E_j - E_k)t/\hbar}$$
$$\langle \psi_j | x | \psi_k \rangle$$

Sliko,

$$\langle p\rangle_\psi = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} c_j^* c_k\, e^{i(\alpha_k-\alpha_j)} \cdot e^{i(E_j-E_k)t/\hbar} \cdot \langle\psi_j|p|\psi_k\rangle$$

Općenito, prosječne vrijednosti $\langle x\rangle_\psi$ i $\langle p\rangle_\psi$ ovise o vremenu.
Prosječna vrijednost za H

$$\langle H\rangle_\psi = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} c_j^* c_k\, e^{i(\alpha_k-\alpha_j)}\, e^{i(E_j-E_k)t/\hbar} \cdot \langle\psi_j|H|\psi_k\rangle$$

No,

$$H|\psi_k\rangle = E_k|\psi_k\rangle$$

pa je

$$\langle\psi_j|H|\psi_k\rangle = E_k\langle\psi_j|\psi_k\rangle = E_k\,\delta_{jk}$$

Uvrstimo u prosječnu vrijednost

$$\langle H\rangle_\psi = \sum_{j=1}^{3} |c_j|^2 \cdot E_k$$

Prosječna vrijednost za H u stanju ψ ne ovisi o vremenu.
Ipak neodređenost energije u stanju H može biti (i najčešće jest!) različita od nule; dakle, stanje ψ nije stacionarno stanje, općenito.

$\boxed{2.}$

(a)
$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x_1^2}{2} + \frac{m\omega^2 x_2}{2}$$

Hamiltonijan možemo zapisati u obliku

$$H = H(x_1) + H(x_2)$$

Ukupna energija sustava je

$$E = E_1 + E_2$$

gdje su E_1 i E_2 energije za harmonijski oscilator 1 i oscilator 2, respektivno. Gdje je

$$E_i = \hbar\omega\left(n_i + \frac{1}{2}\right); \quad i = 1, 2$$

pa je ukupna energija

$$E = \hbar\omega\left(n_1 + n_2 + 1\right); \quad n_1 \text{ i } n_2 \text{ su iz } \mathbb{N}_0$$

(b)
$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x_1^2}{2} + \frac{m\omega^2 x_2^2}{2} - \lambda x_1 x_2$$

Prijeđimo na nove koordinate

$$\eta \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2)$$

$$\xi \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2)$$

Kvadriramo ove jednadžbe i zbrojimo, te oduzmemo

$$\eta^2 + \xi^2 = x_1^2 + x_2^2$$

$$\eta^2 - \xi^2 = 2x_1x_2$$

Potencijalnu energiju u hamiltonijanu možemo napisati u obliku

$$\frac{m\omega^2}{2}\left(\eta^2+\xi^2\right)-\frac{\Lambda}{2}\left(\eta^2-\xi^2\right)=\frac{m\omega^2-\Lambda}{2}\eta^2$$

$$+\frac{m\omega^2+\Lambda}{2}\xi^2$$

Kinetička energija za česticu 1 je

$$\frac{p_1^2}{2m}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx_1^2}=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d}{dx_1}\right)\left(\frac{d}{dx_1}\right)=$$

$$=-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x_1}\right)\cdot$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x_1}\right)$$

Ali

$$\frac{\partial\eta}{\partial x_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad,\quad\frac{\partial\xi}{\partial x_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Imamo

$$\frac{p_1^2}{2m}=-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\eta}+\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\eta}+\frac{\partial}{\partial\xi}\right)$$

$$=-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2}{\partial\eta\,\partial\xi}\right)$$

Zbog

$$\frac{\partial\xi}{\partial x_2}=-\frac{1}{2}$$

za kinetičku energiju čestice 2 dobivamo

$$\frac{p_2^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\eta}-\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\eta}-\frac{\partial}{\partial\xi}\right)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\xi}-2\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\xi}\right)$$

Zbrojmo kinetičke energije

$$\frac{p_1^2}{2m}+\frac{p_2^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial\xi}$$

Dakle, u novim koordinatama hamiltonijan glasi

$$H = H(\eta)+H(\xi)$$

gdje je

$$H(\eta) = \frac{p_\eta^2}{2m}+\frac{m\omega^2}{2}\left(1-\frac{\Lambda}{m\omega^2}\right)\eta^2$$

$$H(\xi) = \frac{p_\xi^2}{2m}+\frac{m\omega^2}{2}\left(1+\frac{\Lambda}{m\omega^2}\right)\xi^2$$

Energije za ovaj sustav dobijemo iz (a) uz promjene

$$\omega_1 \to \omega\sqrt{1-\frac{\Lambda}{m\omega^2}}$$

$$\omega_2 \to \omega\sqrt{1+\frac{\Lambda}{m\omega^2}}$$

Prema tome, energija glasi

$$E = E_1+E_2 = \hbar\omega\sqrt{1-\frac{\Lambda}{m\omega^2}}\left(n_1+\frac{1}{2}\right)$$

$$+\hbar\omega\sqrt{1+\frac{\Lambda}{m\omega^2}}\left(n_2+\frac{1}{2}\right),\quad n_1,n_2\in\mathbb{N}_0$$

Do pierwszego rzędu po $\Lambda/m\omega^2$ mamy

$$\omega\sqrt{1-\frac{\Lambda}{m\omega^2}} = \omega\cdot\left(1-\frac{1}{2}\frac{\Lambda}{m\omega^2}\right)$$

$$\omega\sqrt{1+\frac{\Lambda}{m\omega^2}} = \omega\left(1+\frac{1}{2}\frac{\Lambda}{m\omega^2}\right)$$

Energia postaje

$$E = \hbar\omega\left(1-\frac{1}{2}\frac{\Lambda}{m\omega^2}\right)\left(n_1+\frac{1}{2}\right) + \hbar\omega\left(1+\frac{1}{2}\frac{\Lambda}{m\omega^2}\right)\left(n_2+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \hbar\omega\left(n_1+n_2+1\right) + \frac{\hbar\Lambda}{2m\omega}\left(-n_1+n_2\right)$$

Jeśli oscylatory tkwią w takim modzie, o takiej energii, gdzie $n_1 = n_2$ dostaniemy wzór na energię złożonego dwa niezależnie oscylatora.

$\boxed{3.}$

(a) $[e^A, B] = e^A B - B e^A$

Na drugoj strani,

$$[e^A, B] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [A^n, B] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} [A^n, B]$$

Zadnji korak slijedi jer je za $n=0$

$$[A^0, B] = [\mathbb{1}, B] = 0$$

gdje je $\mathbb{1}$ jedinični operator. Sada treba izračunati $[A^n, B]$

$$[A, B] = c$$

$$[A^2, B] = A \underbrace{[A, B]}_{c} + \underbrace{[A, B]}_{c} A$$

$$= 2cA$$

Je li

$$[A^n, B] = ncA \ ?$$

Indukcija: pretpostavimo da je

$$[A^{n-1}, B] = (n-1) c A^{n-2}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Imamo

$$[A^n, B] = [A A^{n-1}, B] = A [A^{n-1}, B] + [A, B] A^{n-1}$$

$$= A (n-1) c A^{n-2} + c A^{n-1}$$

$$= n c A^{n-1} \checkmark \quad \text{OK}$$

Prema tome,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{[A^n, B]}_{nCA^{n-1}} = C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} A^{n-1} \overset{n-1=k}{=} C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

$$= C e^{A}$$

Imamo

$$C e^{A} = e^{A} B - B e^{A} \quad / \; e^{-A}$$

$$C \underbrace{e^{A} \cdot e^{-A}}_{\mathbb{1}} = e^{A} B e^{-A} - B \underbrace{e^{A} \cdot e^{-A}}_{\mathbb{1}}$$

Odnosno,

$$\boxed{e^{A} B e^{-A} = B + C}$$

(5) Definiramo operator

$$T(\lambda) = e^{\lambda A} \cdot e^{\lambda B}$$

Diferenciramo po λ

$$\frac{dT}{d\lambda} = e^{\lambda A} \cdot A e^{\lambda B} + e^{\lambda A} \cdot e^{\lambda B} \cdot B$$

$$e^{\lambda A} A = A e^{\lambda A} \quad \text{(komutacija)}$$

$$e^{\lambda B} B = B e^{\lambda B} \quad \text{(komutacija)}$$

$$\frac{dT}{d\lambda} = \left(A + e^{\lambda A} B e^{-\lambda A} \right) \underbrace{e^{\lambda A} e^{\lambda B}}_{T(\lambda)}$$

Iskoristimo rezultat pod (a): uvrstimo $A \to \lambda A$. Imamo

$$[\lambda A, B] = \lambda [A, B] = \lambda C$$

$$e^{\lambda A} B e^{-\lambda A} = B + \lambda C$$

$$\frac{dT}{d\lambda} = (A + B + \lambda C)\, T(\lambda)$$

$$\frac{dT}{T} = (A + B + \lambda C)\, d\lambda \quad \int$$

$$T = \exp\left[(A+B)\lambda + \frac{\lambda^2}{2} C\right] \cdot \underbrace{T(0)}_{\mathbb{1}}$$

gdje smo koristili

$$T(\lambda = 0) = \mathbb{1}$$

Prema tome, za $\lambda = 1$ dobivamo

$$\underset{\substack{\parallel \\ e^A \cdot e^B}}{T(1)} = \exp[A+B] \cdot \exp\left(\tfrac{1}{2} C\right)$$

ili

$$\boxed{e^{A+B} = e^A \cdot e^B \, e^{-\frac{1}{2} C}}$$