KVANTNA MEHANIKA

Treći kolokvij 13. 6. 2023.

ZADATAK 1 Razmotrite vremenski ovisan hamiltonijan $H = H_0 + H'(t)$ gdje je

$$H'(t) = U \exp(-t/T)$$

Operatori H_0 i U su vremenski neovisni, a T je konstanta. Kolika je vjerojatnost, u najnižem redu po U, da će smetnja uzrokovati prijelaz iz svojstvenog stanja $|n\rangle$ za H_0 u različito svojstveno stanje $|m\rangle$ za H_0 tijekom vremenskog intervala $t = 0$ i $t >> T$?

ZADATAK 2 Neka je čestica A u vezanom stanju opisanom valnom funkcijom $\phi_A(\mathbf{r}')$. Na čestici A raspršuje se snop čestica B opisanih ravnim valom. Svaka čestica snopa interagira s česticom B. Odgovarajuća potencijalna energija je $W(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, gdje su $\mathbf{r}'$ položaji čestice A, $\mathbf{r}$ čestica u snopu B.

(a) Pod pretpostavkom da čestica A ne mijenja kvantno stanje tijekom raspršenja, izračunajte matrični element

$$\langle \phi_A, \mathbf{k}' | W(\mathbf{r} - \mathbf{r}') | \phi_A, \mathbf{k} \rangle$$

gdje $\mathbf{k}$ i $\mathbf{k}'$ valni vektori koji označavaju početno i konačno stanje upadnih čestica B. Ravne valove ne treba normalizirati.

(b) Izračunajte amplitudu raspršenja i diferencijalni udarni presjek u Bornovoj aproksimaciji upotrijebivši rezultat pod (a) tako da zamijenite Fourierov transformat potencijala u formuli (22.10) u Pregledu formula s matričnim elementom izračunatim pod (a). Dobiveni diferencijalni udarni presjek sastoji se od produkta dva člana: jedan koji opisuje raspršenje na potencijalu $W(\mathbf{r})$ u Bornovoj aproksimaciji, a drugi član, form faktor, karakterizira stanje $\phi_A(\mathbf{r})$.

(c) Razmotrite raspršenje čestice na vezanom sustavu, na primjer, elektronu u atomu, koji je opisan valnom funkcijom

$$\phi_A(\mathbf{r}') = a \exp\left(-\frac{r'^2}{\beta^2}\right)$$

gdje su a i β konstante. Ako je interakcija upadnih čestica i sustava dana potencijalom

$$W(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \lambda \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

izračunajte diferencijalni udarni presjek u Bornovoj aproksimaciji, odnosno, koristite formulu koju ste izveli pod (b).

$\boxed{1.}$

Vremenski ovisan hamiltonijan

$$H = H_0 + H'(t)$$

$$H'(t) = \mathcal{U} \exp(-t/T)$$

Operatori H_0 i $\mathcal{U}$ su vremenski neovisni.

$$H_0 \Psi_K = E_K \Psi_K$$

Vremenski-ovisan račun smetnje; amplituda vjerojatnosti da sustav prijeđe u stanje $|m\rangle$ ako je počeo u stanju $|n\rangle$. u 1. redu $(m \neq n)$

$$c_m^{(1)} = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' \, H'_{mn}(t') \, e^{i\omega_{mn} t'}$$

$$H'_{mn}(t') = \underbrace{\langle m | \mathcal{U} | n \rangle}_{\mathcal{U}_{mn}} \exp(-t'/T)$$

$$c_m^{(1)} = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' \, \mathcal{U}_{mn} \, e^{-t'/T} \cdot e^{i\omega_{mn} t'}$$

$$= \frac{\mathcal{U}_{mn}}{i\hbar} \cdot \left. \frac{e^{-t'/T} \cdot e^{i\omega_{mn} t'}}{-\frac{1}{T} + i\omega_{mn}} \right|_0^t$$

Za $t \gg T$ je približno

$$e^{-t/T} \to 0$$

$$c_m^{(1)} \simeq \frac{\mathcal{U}_{mn}}{i\hbar} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{-\frac{1}{T} + i\omega_{mn}}$$

Sredimo

$$C_m^{(1)}(t) \simeq \frac{\mathcal{U}_{mn}}{\hbar} \cdot \frac{1}{\omega_{mn} - i\frac{1}{T}}$$

$$\omega_{mn} = \frac{E_m - E_n}{\hbar}$$

Vjerojatnost prijelaza u stanje $|m\rangle$ je

$$|C_m(t)|^2 \simeq |C_m^{(1)}(t)|^2 = \frac{|\mathcal{U}_{mn}|^2}{\hbar^2} \cdot \frac{\hbar^2}{(E_m - E_n)^2 + \frac{\hbar^2}{T^2}}$$

$$= \frac{|\mathcal{U}_{mn}|^2}{(E_m - E_n)^2 + \frac{\hbar^2}{T^2}}$$

2.

$$\langle \Phi_A, \vec{k}'|\,\mathbb{1}\,W(\vec{r}-\vec{r}')|\Phi_A, \vec{k}\rangle = \int d^3r'\,|\Phi_A(\vec{r}')|^2 \int d^3r\, W(\vec{r}-\vec{r}')\, e^{-i(\vec{k}'-\vec{k})\cdot\vec{r}}$$

U gornju relaciju umetnuli smo relaciju potpunosti:

$$\int d^3r \int d^3r'\, |\vec{r},\vec{r}'\rangle\langle \vec{r},\vec{r}'| = \mathbb{1}$$

Označimo

$$\vec{k}'-\vec{k} = \vec{q}$$

U integralu

$$\int d^3r\, W(\vec{r}-\vec{r}')\, e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}}$$

promijenimo varijable

$$\vec{r}-\vec{r}' = \vec{r}''$$

$$\int d^3r''\, W(\vec{r}'')\, e^{-i\vec{q}\cdot(\vec{r}''+\vec{r}')}$$

Imamo

$$\underbrace{\int d^3r'\,|\Phi_A(\vec{r}')|^2 e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}'}}_{\text{Fourier transformat za gustoću vjerojatnosti } |\Phi_A|^2=\rho}\;\underbrace{\int d^3r''\, W(\vec{r}'')\, e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}''}}_{\text{Fourier transformat za } W(\vec{r}'')}$$

Prema tome, matrični element glasi

$$\langle \Phi_A, \vec{k}' | w(\vec{r}-\vec{r}') | \Phi_A, \vec{k} \rangle \propto \rho(\vec{q})\, w(\vec{q})$$

gdje su $\rho(\vec{q})$ i $w(\vec{q})$ Fourierovi transformati za ρ i w.

(b) Amplituda raspršenja i diferencijalni udarni presjek u Bornovoj aproksimaciji za elastično raspršenje glase

$$f(\vec{q}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}'} \cdot w(\vec{r}')\, d^3r'$$

$$= -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\, w(\vec{q})$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2}{4\pi^2\hbar^4}\, |w(\vec{q})|^2$$

Zamijenimo

$$w(\vec{q}) \longrightarrow \rho(\vec{q})\, w(\vec{q})$$

pa je

$$f(\vec{q}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\, w(\vec{q}) \cdot \rho(\vec{q})$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2}{4\pi^2\hbar^4} \cdot |w(\vec{q})|^2 \cdot |\rho(\vec{q})|^2$$

(c) Treba odračunati Fourierove transformate za w i za ρ.

$$w(\vec{q}) = \lambda \int d^3r\, e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} \cdot \delta(\vec{r}) = \lambda$$

$$\int d^3r\, e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} \cdot |\phi_A|^2 = \int d^3r\, e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} \cdot a^2 e^{-2r^2/z^2}$$

Postavimo z-os koordinatnog sustava u smjeru vektora $\vec{q}$.

$$\vec{q}\cdot\vec{r} = qr\cos\theta$$

$$\int d\Omega\, e^{-iqr\cos\theta} = 2\pi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta\, e^{-iqr\cos\theta}$$

$$= 2\pi \left. \frac{e^{-iqr\cos\theta}}{iqr} \right|_0^{\pi} = \frac{2\pi}{iqr} \cdot \big(\underbrace{e^{iqr} - e^{-iqr}}_{2i\sin(qr)} \big)$$

$$= \frac{4\pi}{qr} \sin(qr)$$

Integral po r

$$a^2 \int dr\, r^2 e^{-2r^2/z^2} \cdot \frac{4\pi}{qr} \sin(qr)$$

$$= \frac{4\pi a^2}{q} \int_0^{\infty} dr\, r\, e^{-2r^2/z^2} \sin(qr)$$

Ovakav integral smo rješavali na vježbama.

$$\int_0^{\infty} dr\, r\, e^{-2r^2/z^2} \sin(qr) = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, q z^3 e^{-\frac{1}{8} q^2 z^2}$$

Imamo

$$\rho(\vec{q}) = \frac{4\pi a^2}{\cancel{q}} \cdot \frac{1}{8}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \cancel{q} z^3 e^{-\frac{1}{8} q^2 z^2}$$

Diferencijalni udarni presjek iz (5) je

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2}{4\pi^2\hbar^4}\cdot|N|^2\cdot\left(\frac{\pi a^2}{\nu}\sqrt{\frac{\pi}{\nu}}\; q^3\, e^{-\frac{1}{8}a^2 q^2}\right)^2$$

$$= \frac{m^2 \nu^2 a^4 \pi\, q^2}{32\,\hbar^4}\, e^{-\frac{1}{4}a^2 q^2}$$