Sveučilište u Rijeci, Fakultet za fiziku

Velimir Labinac

Matematičke metode fizike I

Zbirka zadataka

Izdano: 19. rujna 2023.

Ova zbirka sadrži zadatke koji su tijekom godina dani na vježbama, domaćim zadaćama, kolokvijima i pismenim ispitima iz kolegija *Matematičke metode fizike I*. Zbirku ću nadopunjavati novim zadacima, a u planu su i rješenja/upute za jedan dio zadataka.

Matematičke metode fizike I logičan su nastavak nekoliko kolegija iz matematičke analize i linearne algebre na prvoj godini studija fizike. Temelji kolegija nalaze se u poopćenju pojma integrala i derivacije na više dimenzija. Posebno važno gradivo čine krivocrtni koordinatni sustavi i vektorska analiza koji su ''utkani '' u klasičnu mehaniku i elektrodinamiku. Tenzorska analiza je, na primjer, podloga za opću teoriju relativnosti.

Iako se često govori o tome da fizičar treba naučiti matematiku ''usput'', sustavan pristup učenju koje osiguravaju kolegiji iz matematičkih metoda, sigurno će olakšati studentu savladavanje gradiva i iz matematike, a nakon toga i iz fizike. Pažljivo odabrani zadaci razvrstani po poglavljima će, vjerujem, doprinijeti da se taj cilj još bezbolnije i brže ostvari.

Velimir Labinac

Sveučilište u Rijeci, Fakultet za fiziku

Sadržaj

1 Neprekinutost i limes. Parcijalne derivacije i diferencijali prvog reda

Zadatak 1.1 Nađite $f(x, y)$ ako je $f(x + y, x - y) = xy + y^2$.

Zadatak 1.2 Neka je $z = xf(y/x)$. Odredite funkcije f i z ako je $z = (1 + y^2)^{1/2}$ za $x = 1$.

Zadatak 1.3 Izračunajte $z = z(x, y)$ ako je

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} \ .$$

Zadatak 1.4 Nađite područja egzistencije funkcija:
(a) $z = [\sin (x^2 + y^2)]^{1/2}$
(b) $u = \ln (xyz)$

Zadatak 1.5 Nađite nivo-linije ili nivo-plohe ovih funkcija:
(a) $z = yx^{-1/2}$
(b) $z = f([x^2 + y^2]^{1/2})$
(c) $u = x^2 + y^2 + z^2$

Zadatak 1.6 Funkcija $z = f(x, y)$ definirana je na sljedeći način: zadana je proizvoljna i fiksna dužina AB u ravnini xy. Ako je $P = (x, y)$ točka u ravnini xy, vrijednost funkcije f u točki P je kut pod kojim se vidi dužina AB. Nađite nivo-krivulje funkcije f.

Zadatak 1.7 Nađite ove limese funkcija:
(a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \frac{\sin xy}{x}$; (b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

Zadatak 1.8 Nađite parcijalne derivacije funkcija:
(a) $z = \exp[\sin(y/x)]$
(b) $u = (xy)^z$

Zadatak 1.9 Pokažite da funkcija

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}, \text{ za } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, \quad \text{za } x = y = 0 \end{cases}$$

ima parcijalne derivacije $f'_x(x, y)$ i $f'_y(x, y)$ u točki (0, 0), premda je prekinuta u toj točki. Konstruirajte geometrijsku sliku te funkcije u blizini točke (0, 0).

Zadatak 1.10 Za funkciju $f(x, y) = x^2y$ nađite totalni prirast točno i aproksimativno u točki (1, 2) te ih usporedite ako je
(a) $\Delta x = 1$; $\Delta y = 2$
(b) $\Delta x = 0{,}1$; $\Delta y = 0{,}2$

Zadatak 1.11 Zatvoreni sanduk kojemu su vanjske dimenzije 10 cm, 8 cm i 6 cm napravljen je iz šperploča debljine 2 mm. Odredite približno volumen materijala utrošenog za izradu sanduka.

Zadatak 1.12 Jedna je stranica pravokutnka $a = 10$ cm, a druga $b = 24$ cm. Kako će se promijeniti dijagonala l pravokutnika ako stranicu a produljimo za 4 mm, a stranicu b skratimo za 1 mm? Nađite približnu promjenu i usporedite je s točnom.

2 Diferenciranje složenih funkcija. Derivacija funkcije u zadanom smjeru

Zadatak 2.1 Uvjerite se da su navedeni izrazi totalni diferencijali funkcije i nađite tu funkciju integracijom:

(a) $ydx + xdy$

(b) $(2x + y + z)dx + (x + 2y + z)dy + (x + y + 2z)dz$

Zadatak 2.2 Uvjerite se da je $df = y^{-1}dx - xy^{-2}dy$ totalni diferencijal te nađite f.

Zadatak 2.3 Zadane su projekcije sile na koordinatne osi:

$$F_x = \frac{y}{(x+y)^2}, \quad F_y = \frac{\lambda x}{(x+y)^2} \ ,$$

gdje je λ konstantna veličina. Kakav mora biti koeficijent λ da sila ima potencijal?

Zadatak 2.4 Nađite funkciju u ako je $f(z)$ neprekinuta i vrijedi

$$du = f(xy)(ydx + xdy) \ .$$

Zadatak 2.5 (a) Izračunajte $\partial z/\partial u$ i $\partial z/\partial v$ ako je $z = \mathrm{arctg}(x/y)$, gdje je $x = u \sin v$, $y = u \cos v$.

(b) Pokažite da funkcija $w = f(u, v)$, gdje je $u = x + at$, $v = y + bt$ zadovoljava jednadžbu

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} \ .$$

Zadatak 2.6 Pokažite da funkcija $z = z(x, y)$ definirana izrazom

$$x + y + z = f(x^2 + y^2 + z^2)$$

gdje je f diferencijabilna funkcija, zadovoljava parcijalnu diferencijalnu jednadžbu

$$(y - z)\frac{\partial z}{\partial x} + (z - x)\frac{\partial z}{\partial y} = x - y$$

***Uputa*:** diferencirajte obje strane definicijske jednadžbe po x i po y.

Zadatak 2.7 Pokažite da funkcija $z(x, y)$ koja je određena jednadžbom

$$F(x - az, y - bz) = 0$$

gdje je F po volji odabrana diferencijabilna funkcija svojih argumenata, zadovoljava jednadžbu

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

Zadatak 2.8 Pokažite da je

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2$$

ako je

$$z = \ln\left(x^2 + xy + y^2\right) \ .$$

Zadatak 2.9 Ako je $u = \phi(x^2 + y^2)$ i ϕ diferencijabilna funkcija, pokažite da je

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Zadatak 2.10 Pod pretpostavkom da je funkcija ϕ diferencijabilna pokažite da vrijedi

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = x$$

ako je $u = x + \phi(xy)$.

Zadatak 2.11 Neka je f funkcija od x_1 , x_2 , … , x_n , y te $y = g(x_1 , \dots , x_n)$ takva funkcija da je

$$f\left(x_1, x_2, ..., x_n, g\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)\right) = 0$$

Nađite $D_i g$, $i = 1, 2, \dots , n$, gdje D_i označava parcijalnu derivaciju po i-toj varijabli. Na primjer, $D_2 g = \partial g/\partial x_2$.

Zadatak 2.12 Dokažite sljedeću tvrdnju: ako funkcija $z = w(x, y)$ zadovoljava jednadžbu

$$f\left(u\left(x, y, z\right), v\left(x, y, z\right)\right) = 0 \quad (*)$$

onda je

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{D_1 f \cdot D_2 u + D_2 f \cdot D_2 v}{D_1 f \cdot D_3 u + D_2 f \cdot D_3 v}$$

gdje D_i označava parcijalnu derivaciju po i-toj varijabli. Na primjer, $D_2 f = \partial f / \partial v$.
***Uputa*:** diferencirajte definicijsku jednadžbu (*) po y.

Zadatak 2.13 (a) Funkcija $F(x, y, z)$ naziva se homogenom funkcijom reda n (po varijablama x, y, z) ako je $F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^n F(x, y, z)$. Pokažite da za takvu funkciju vrijedi Eulerov teorem za homogene funkcije

$$x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + z\frac{\partial F}{\partial z} = nF$$

(b) Zadana je funkcija $f = x^2y + z^2\ln y$. Po kojim je varijablama homogena i kojeg reda?

Zadatak 2.14 Dva broda isplove istovremeno iz luke A, jedan na sjever, a drugi na sjeveroistok. Brzina brodova je 20 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ i 40 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Kojom brzinom raste njihova međusobna udaljenost?

Zadatak 2.15 Stranica pravokutnika, početne duljine $x_0 = 20$ m produžuje se brzinom od 5 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, a druga stranica početne duljine $y_0 = 30$ m, skraćuje se brzinom 4 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Kojom brzinom se mijenja opseg i površina pravokutnika u $t = 0$?

Zadatak 2.16 Nađite vrijednost najstrmijeg uspona plohe $z = x^2 + 4y^2$ u točki (2, 1, 8).

Zadatak 2.17 Nađite derivaciju funkcije $u(x, y, z) = xy + yz + zx$ u točki $M(2, 1, 3)$ u smjeru od te točke prema točki $N(5, 5, 15)$.

Zadatak 2.18 Pokažite da je derivacija funkcije $z = y^2/x$ izračunata u nekoj točki elipse $2x^2 + y^2 = C^2$ duž normale na elipsu jednaka nuli.

Zadatak 2.19 Nađite derivaciju funkcije $z = x^2 - xy - 2y^2$ u točki $P(1, 2)$ u smjeru koji s osi x zatvara kut od 60°.

Zadatak 2.20 Nađite derivaciju funkcije $z = \ln[(x^2 + y^2)^{1/2}]$ u točki (1, 1) u smjeru simetrale prvog kvadranta.

Zadatak 2.21 Zadana je jednadžba

$$2x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2u$$

Pokažite da je

$$u = x\phi\left(x, y\right)$$

gdje funkcija $\phi(x, y)$ ima oblik

$$\phi(x, y) = \phi\left(\frac{x}{y^2}\right)$$

Zadatak 2.22 Pokažite da jednadžba

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u$$

uvođenjem novih varijabli

$$\xi = x - t$$

$$\eta = x + t$$

prelazi u jednadžbu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{4} u = 0$$

3 Parcijalne derivacije i diferencijali viših redova. Taylorova formula

Zadatak 3.1 (a) Izračunajte $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ ako je $u = x^\alpha y^\beta z^\gamma$.

(b) Pokažite da je $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ ako je $z = x^y$.

Zadatak 3.2 Izračunajte z_{xyy} ako je

$$z = \sin(xy)\,.$$

Zadatak 3.3 Pokažite da funkcija

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi}\sqrt{t}\right)^3} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}{4a^2 t}\right],$$

gdje su x_0, y_0, z_0, a konstante zadovoljava jednadžbu vođenja topline

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).$$

Zadatak 3.4 (a) Nađite $\mathrm{d}^2 z$ ako je $z = \mathrm{e}^{xy}$.
(b) Nađite $\mathrm{d}^2 z$ ako je $z = f(u, v)$, gdje je $u = ax$, $v = by$.

Zadatak 3.5 Nađite $\mathrm{d}z$ i $\mathrm{d}^2 z$ ako je

$$z = u^v, \text{ gdje je } u = xy^{-1},\ v = xy\,.$$

Zadatak 3.6 Funkcija $y = y(x)$ zadana je implicitno jednadžbom

$$\ln\sqrt{x^2+y^2} = a\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$$

gdje je a konstanta, $a \neq 0$. Nađite $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ i $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2$.

Zadatak 3.7 Diferencijabilne funkcije $y = y(x)$ i $z = z(x)$ zadane su implicitno sustavom jednadžbi

$$x^2+y^2-z^2=0$$
$$x^2+2y^2+3z^2=4$$

Nađite $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}z/\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2$ i $\mathrm{d}^2z/\mathrm{d}x^2$ u točki $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$.

Zadatak 3.8 Razvijte po Maclaurinovoj formuli do uključivo članova 3. reda funkciju

$$f(x,y) = \mathrm{e}^x \sin y$$

Zadatak 3.9 Razvijte funkciju po Maclaurinovoj formuli do uključivo članova 2. reda

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{-x} \cos y$$

Zadatak 3.10 Razvijte po Maclaurinovoj formuli do uključivo članova 3. reda funkciju

$$f(x,y) = x\,\mathrm{e}^y\,.$$

Zadatak 3.11 Zadana je funkcija

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{x+y}$$

Razvijte $f(x,y)$ u Maclaurinov red u okolini točke (0, 0) do uključivo članova drugog reda.

Zadatak 3.12 Razvijte $f(x + h, y + k, z + l)$ po cijelim pozitivnim potencijama od h, k i l ako je

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz$$

Zadatak 3.13 Razvijte $f(x + h, y + k)$ po cijelim pozitivnim potencijama od h i k ako je

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

Zadatak 3.14 Izvedite približne formule s točnosti do članova drugog reda s obzirom na veličine α, β za izraz

$$\operatorname{arctg}\frac{1+\alpha}{1-\beta}$$

ako su $|\alpha|$, $|\beta| << 1$.

Zadatak 3.15 Funkciju $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - 4x - 3y - z + 4$ razvijte po Taylorovoj formuli u okolini točke (1, 1, 1).

Zadatak 3.16 Razvijte po Taylorovoj formuli u okolini točke (1, 1) do uključivo članova drugog reda funkciju

$$f(x, y) = y^x$$

Zadatak 3.17 Funkcija $z = f(x, y)$ definirana je jednadžbom

$$z^3 - 2xz + y = 0$$

pri čemu je je $f(1,1) = 1$. Napišite Taylorov red za f do članova drugog reda oko točke (1,1).

Zadatak 3.18 Primjenom Taylorove formule do članova drugog reda izračunajte približno izraz $(0{,}95)^{2{,}01}$.

Zadatak 3.19 Primjenom Taylorove formule do članova drugog reda približno izračunajte $1{,}04^{2{,}02}$.
***Uputa*:** razvijte funkciju $f(x, y) = y^x$ u Taylorov red oko točke (2, 1).

Zadatak 3.20 Izračunajte približno

$$a = (1{,}03)^{3{,}001}$$

***Uputa*:** promatrajte funkciju $f(x, y) = x^y$ i točku (1, 3) te računajte Taylorov polinom za f do uključivo članova prvog reda.

Zadatak 3.21 Razvijte funkciju

$$f(x, y) = \ln\left(e^x + y\right)$$

u Taylorov red oko točke $x_0 = 1$ i $y_0 = 0$ do članova drugog reda.

Zadatak 3.22 Nađite razvoj u red po potencijalama od $x - 1$ i $y - 1$ za implicitno zadanu funkciju $z = z(x, y)$

$$z^3 + yz - xy^2 - x^3 = 0$$

do uključivo članova drugog reda. U točki (1,1) je očito $z(1, 1) = 1$.

Zadatak 3.23 Nađite razvoj funkcije

$$f(x, y) = \ln(1 + x + y)$$

u polinom drugog reda oko točke (0,0) upotrijebivši Maclaurinovu formulu.

Zadatak 3.24 Funkciju $f(x, y) = \ln(1 + x + 2y)$ razvijte po Taylorovoj formuli u okolini točke (2, 1) do članova drugog reda.

4 Ekstremi funkcija više varijabli

Zadatak 4.1 Ispitajte narav stacionarnih točaka sljedećih funkcija:
(a) $z = (x - 1)^2 + 2y^2$
(b) $z = (x^2 - 2y^2)\exp(x - y)$

Zadatak 4.2 Nađite ekstreme funkcije

$$z = (x-2)^2 + 2(y-1)^2 .$$

Zadatak 4.3 Nađite stacionarne točke funkcije

$$f(x, y) = 2x^2 - xy - 3y^2 - 3x + 7y$$

i ispitajte koje od njih su točke ekstrema.

Zadatak 4.4 Ispitajte ekstreme sljedećih funkcija:
(a) $z = x^3y^2(6 - x - y)$ pri čemu je $x > 0$ i $y > 0$
(b) $z = (1 + x - y)(1 + x^2 + y^2)^{-1/2}$

Zadatak 4.5 Nađite ekstreme funkcije z zadane implicitno

$$x^3 - y^2 - 3x + 4y + z^2 + z - 8 = 0$$

Zadatak 4.6 Odredite najveću i najmanju vrijednost funkcije $z = x^3 + y^3 - 3xy$ u području $0 \le x \le 2$, $-1 \le y \le 2$.

Zadatak 4.7 Odredite najmanju i najveću vrijednost funkcije $z = x^2 - y^2$ u području $x^2 + y^2 \le 1$.

Zadatak 4.8 Nađite uvjetne ekstreme sljedećih funkcija:
(a) $z = xy$ ako je $x + y = 1$
(b) $u = xyz$ ako je $x + y + z = 5$ i $xy + yz + zx = 8$

Zadatak 4.9 Od svih kvadara jednakog volumena V nađite onaj kojemu je oplošje najmanje.

Zadatak 4.10 Nađite kvadar koji uz zadano oplošje S ima najveći volumen. Kolike su stranice tog kvadra i volumen? Izrazite ih pomoću oplošja S.

Zadatak 4.11 Nađite kvadar najvećeg obujma uz uvjet da je zadana duljina dijagonale kvadra.

Zadatak 4.12 Od svih trokuta zadanog opsega $2p$ nađite onaj koji ima najveću površinu.

Zadatak 4.13 U zadanu kuglu polumjera R upišite valjak s najvećim oplošjem.

Zadatak 4.14 Prikažite pozitivan broj a u obliku produkta od četiri pozitivna faktora tako da njihov zbroj bude najmanji.

Zadatak 4.15 Prikažite pozitivan broj a kao sumu n brojeva tako da suma kvadrata tih brojeva bude najmanja.

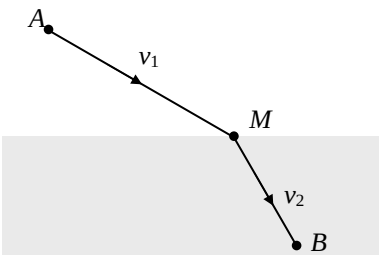
Zadatak 4.16 Odredite stranice trokuta tako da uz zadani opseg ima najveću površinu.
***Uputa*:** Heronova formula za površinu trokuta glasi

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

gdje je s poluopseg trokuta $s = (a + b + c)/2$. Umjesto s P, smijete računati s P^2.

Zadatak 4.17 Ako električnim strujnim krugom otpora R teče struja I, onda će količina proizvedene topline u jedinici vremena biti proporcionalna s I^2R. Odredite kako treba razgranati struju I na struje I_1 , I_2 , I_3 pomoću tri vodiča s pojedinačnim otporima R_1 , R_2 , R_3 da oslobođena toplina bude najmanja?

Zadatak 4.18 Točke A i B nalaze se u različitim homogenim optičkim sredstvima odijeljenim međusobno ravninom. Brzina širenja svjetlosti u prvom sredstvu je v_1 , a u drugom v_2 . Izvedite zakon loma svjetlosti (ili, Snellov zakon).



Uputa: Koristite Fermatov princip koji glasi: zraka svjetlosti širi se po onom putu AMB kojeg će prijeći u najkraćem vremenu, odnosno, po putanji za koju je integral

$$t = \frac{1}{c}\int_A^B n(s)\mathrm{d}s$$

minimalan.

Zadatak 4.19 Korita dvaju rijeka (u granicama nekog područja) približno predstavljaju parabolu $y = x^2$ i pravac $x - y - 2 = 0$. Treba spojiti obje rijeke ravnim kanalom najmanje duljine. Kojim točkama treba provesti kanal? Kolika je duljina kanala?
***Uputa*:** minimizirajte kvadrat duljine $(x - u)^2 + (y - v)^2$ uz uvjet da su (x, y) koordinate točke na paraboli, a (u, v) koordinate točke na pravcu.

Zadatak 4.20 (a) Neka su $p, q > 1$ takvi da $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Dokažite da za x, y funkcija f

$$f(x, y) = \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$$

uz uvjet $xy = 1$, ima minimum 1.
(b) Iskoristite (a) te pomoću jednakosti

$$x = \frac{a}{(ab)^{1/p}}, \quad y = \frac{b}{(ab)^{1/q}}$$

dokažite nejednakost

$$ab \le \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

(c) Dokažite Hölderovu nejednakost

$$\sum_{i=1}^{n} a_k b_k \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}$$

ako su a_i, b_i , $i = 1, 2,..., n$ nenegativni realni brojevi, koristeći (b) i sljedeće izraze

$$a = \frac{a_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p}}, \quad b = \frac{b_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}}$$

Zadatak 4.21 U prostoru su zadane koordinate (x_i , y_i , z_i) za N točaka, A_i , $i = 1, 2, ..., N$. Nađite koordinate točke X za koju je suma kvadrata udaljenosti od X do svake točke A_i , minimalna.

Zadatak 4.22 (a) Dokažite da funkcija

$$f(x, y, z) = x^2 y^2 z^2$$

uz uvjet

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

ima maksimum $(1/3)^3$.

(b) Pomoću (a) izvedite nejednakost

$$(abc)^{1/3} \le \frac{a+b+c}{3}, \quad a,b,c \ge 0$$

(c) Generalizirajte rezultat pod (b) i pokažite

$$(a_1 a_2 ... a_n)^{1/n} \le \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}, \quad a_1, a_2, ..., a_n \ge 0$$

Zadatak 4.23 (a) Neka su zadane funkcije f i g

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Pretpostavimo da funkcija g ima ekstrem u točki

$$\mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$$

Pokažite da kompozicija funkcija

$$h = f \circ g$$

$$h(x_1, x_2, ..., x_n) = f\left(g(x_1, x_2, ..., x_n)\right)$$

ima također ekstrem u $\mathbf{x}_0$ ako $y_0 = g(\mathbf{x}_0)$ nije stacionarna točka za funkciju f. Pretpostavite da derivacije funkcija f i g do uključivo drugog reda postoje i konačne su.

(b) Iskoristite (a) i maksimizirajte izraz

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)^2$$

uz uvjet

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1,$$

i pri tom pretpostavite da je $a_k \ne 0$ bar za jedno k. Pokažite da vrijedi

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

za x_i i a_i koji zadovoljavaju gornje uvjete.

***Uputa*:** pod (a) pokažite da je $\mathbf{x}_0$ stacionarna točka za h i da je izraz

$$\Delta h \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j$$

sigurno veći (ili manji) od nule ako parcijalne derivacije računamo u točki $\mathbf{x}_0$.

Zadatak 4.24 Pomoću minimuma funkcije

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^k$$

čije varijable zadovoljavaju uvjet

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = c = konst.$$

dokažite nejednakost

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^k \ge \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i\right)^k, \quad k \ge 1, x_i \ge 0$$

Zadatak 4.25 Neka su a, b, $c > 0$. Ako su x, y, $z > 0$ te vrijedi

$$ayz + bzx + cxy = 3abc \quad (**)$$

onda je

$$xyz \le abc$$

***Uputa*:** potražite stacionarne točke funkcije $f(x, y, z) = xyz$ uz uvjet (**). Provjerite da li se radi o maksimumu tako da u $f(x, y, z)$ uvrstite neku drugu pogodnu točku koja zadovoljava uvjet (**).

Zadatak 4.26 U elipsoid

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

upišite kvadar navećeg obujma.
***Uputa*:** primijetite da su stranice kvadra jednake $2x$, $2y$ i $2z$, gdje su x, y, z pozitivni brojevi koji zadovoljavaju jednadžbu elipsoida.

Zadatak 4.27 Na elipsoidu $x^2/96 + y^2 + z^2 = 1$ pronađite točku koja je najmanje (najviše) udaljena od ravnine $3x + 4y + 12z = 288$.
***Uputa*:** smijete koristiti kvadrat udaljenosti između točaka jer će imati isti ekstrem kao i udaljenost između točaka. Primijetite, u ovom zadatku imate ukupno 6 varijabli i dvije jednadžbe veze.

Zadatak 4.28 Temperatura točke (x, y, z) na jediničnoj sferi dana je jednadžbom

$$T(x,y,z)=1+xy+yz$$

Upotrebom metode Lagrangeovih množitelja, nađite temperaturu najtoplije točke na sferi.

Zadatak 4.29 Šator ima oblik cilindra sa stošcem na vrhu kako je prikazano na slici. Želimo napraviti šator zadanog volumena V s minimalnom količinom materijala, odnosno, minimalnom površinom tkanine pri tom ne uzimajući u obzir baze cilindra i stošca. Pokažite da u tom slučaju polumjer cilindra R, visina cilindra H i visina stošca h moraju zadovoljavati relacije

$$R=\frac{h\sqrt{5}}{2};\quad H=\frac{h}{2}$$

***Uputa*:** površina stošca glasi $R\pi(h^2 + R^2)^{1/2}$, a volumen stošca $(1/3)R^2\pi h$.

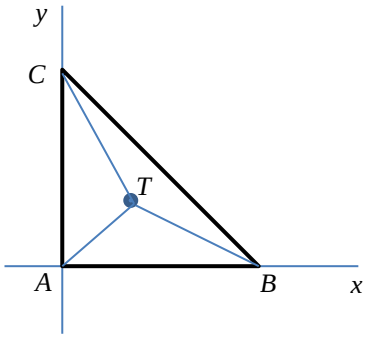
Zadatak 4.30 U polusferu polumjera R

$$x^2+y^2+z^2=R^2,\quad z\geq 0$$

upišite kvadar najvećeg volumena.
***Uputa*:** primijetite da su stranice kvadra jednake $2x$, $2y$ i z, gdje su x, y, z pozitivni brojevi koji zadovoljavaju jednadžbu polusfere.

Zadatak 4.31 Zadana je funkcija $f(x, y)$ klase C^2 na $U \subset \mathbb{R}^2$. Pretpostavimo da je u točki $T(x_0, y_0)$ minimum. Pokažite da su svojstvene vrijednosti matrice Hessiana u točki T strogo pozitivne.

Zadatak 4.32 U trokutu ABC (unutar ili na stranicama trokuta) čiji su vrhovi $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ i $C(0, 1)$ nađite koordinate točke T čiji je zbroj ***kvadrata udaljenosti*** od T do vrhova trokuta najveći.



5 Dvostruki integrali

Zadatak 5.1 Izračunajte ove višestruke integrale:

(a) $\int_0^2 \mathrm{d}y \int_0^1 (x^2 + 2y)\mathrm{d}x$

(b) $\int_1^2 \mathrm{d}x \int_{1/x}^{x} \frac{x^2 \mathrm{d}y}{y^2}$

Zadatak 5.2 (a) Izračunajte dvostruki integral

$$\int_P xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

ako je područje P omeđeno s osi x i gornjom polukružnicom $(x - 2)^2 + y^2 = 1$.
(b) Izračunajte dvostruki integral

$$\int_P y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

ako je područje P omeđeno s osi apscisa i svodom cikloide

$$x(t) = R(t - \sin t)$$
$$y(t) = R(1 - \cos t)$$

za $t \in [0, 2\pi]$.

Zadatak 5.3 Izračunajte integral

$$\int_D \frac{x\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2 + y^2}$$

gdje je područje D omeđeno parabolom $y = x^2/2$ i pravcem $y = x$.

Zadatak 5.4 (a) Izračunajte dvostruki integral

$$\int_P \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

gdje je područje P omeđeno elipsom $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$, upotrijebivši koordinate (η, ϕ) i transformacijske formule $x = a\eta \cos \phi$ i $y = b\eta \sin \phi$, gdje je $\eta \in [0, 1]$, a $\phi \in [0, 2\pi]$.
(b) Provedite promjenu varijabli $u = x + y$, $v = x - y$ u integralu

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 f(x, y)\mathrm{d}y$$

Zadatak 5.5 (a) Transformirajte integral

$$\int_0^c \mathrm{d}x \int_{\alpha x}^{\beta x} f(x, y)\mathrm{d}y$$

uvođenjem novih varijabli $u = x + y$, $uv = y$, gdje je $0 < \alpha < \beta$ i $c > 0$.
(b) Prijelazom na polarne koordinate izračunajte dvostruki integral

$$\int_P \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

gdje je područje integracije P gornji polukrug polumjera a sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava.

Zadatak 5.6 Izračunajte dvostruki integral

$$I = \int_R dxdy \sqrt[3]{1 - x^3 - y^3}\, x^2 y$$

ako je područje R definirano jednadžbama

$$x \geq 0, y \geq 0, x^3 + y^3 \leq 1$$

***Uputa*:** prvi način je da svedete dvostruki integral na jednostruki binomni integral integracijom po x, a drugi da promijenite varijable

$$x = u^{1/3} \cos^{2/3} v$$

$$y = u^{1/3} \sin^{2/3} v$$

Kako izgleda novo područje integracije u ravnini uv?

Zadatak 5.7 (a) Izračunajte površinu omeđenu elipsom $(y - x)^2 + x^2 = 1$.
(b) Nađite površinu krivocrtnog četverokuta omeđenog lukovima krivulja $y^2 = ax$, $y^2 = bx$, $xy = \alpha$, $xy = \beta$ pri čemu je $0 < a < b$ i $\alpha < \beta < 0$.

Zadatak 5.8 (a) Nađite volumen tijela, omeđenog eliptičkim paraboloidom $z = 2x^2 + y^2 + 1$, ravninom $x + y = 1$ i koordinatnim ravninama.
(b) Nađite ukupan volumen unutar čunja $2(x^2 + y^2) - z^2 = 0$ i hiperboloida $x^2 + y^2 - z^2 = -a^2$.

Zadatak 5.9 Tijelo je omeđeno hiperboličkim paraboloidom $z = x^2 - y^2$ i ravninama $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$. Izračunajte njegov volumen.

Zadatak 5.10 (a) Nađite površinu dijela ravnine $x/a + y/b + z/c = 1$ zatvorenog među koordinatnim ravninama.
(b) Nađite površinu plohe valjka $y^2 = 4x$ izrezane kuglom $x^2 + y^2 + z^2 = 5x$.

Zadatak 5.11 Izračunajte površinu plohe paraboloida $y^2 + z^2 = 2ax$ koja se nalazi između valjka $y^2 = ax$ i ravnine $x = a$.

Zadatak 5.12 Nađite masu kružne plohe polumjera R, ako je njezina gustoća proporcionalna udaljenosti točke od središta i iznosi δ na rubu ploče.

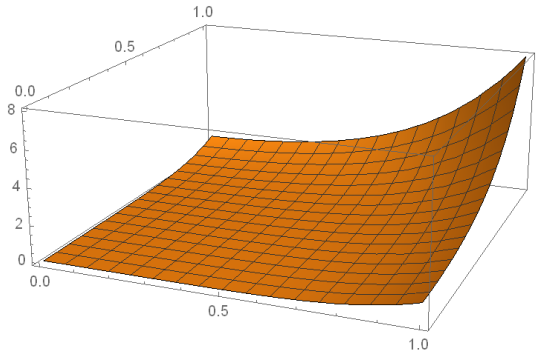
Zadatak 5.13 Izračunajte koordinate težišta lika omeđenog parabolama $y^2 = 4x + 4$ i $y^2 = -2x + 4$.

Zadatak 5.14 Izračunajte moment tromosti trokuta omeđenog pravcima $x + y = 2$, $x = 2$, $y = 2$ s obzirom na os x.
***Uputa*:** Moment tromosti plošnih raspodjela mase obzirom na x os računa se po formuli

$$I_x = \int_P y^2 \rho(x, y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Ako se radi o momentu tromosti geometrijskog lika, stavljamo $\rho(x, y) = 1$.

Zadatak 5.15 Izračunajte volumen područja određenog nejednakostima $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $x^2 + y^2 \geq 1$ i $0 \leq z \leq (x^2 + y^2)^3$. Ploha $z = (x^2 + y^2)^3$ prikazana je na slici.

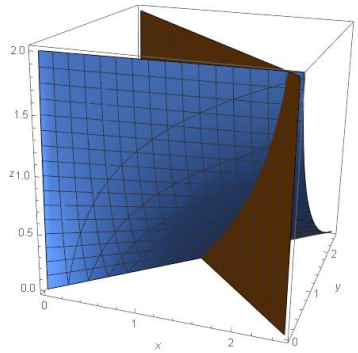


Zadatak 5.16 Upotrijebite dvostruki integral te izračunajte obujam koji je omeđen sljedećim plohama: $z = 0$, $x^2 + y^2 = c^2$ te plohom $z[\phi(x) + \phi(y)] = a\phi(x) + b\phi(y)$, gdje je $\phi(x)$ proizvoljna pozitivna funkcija $a > 0$ i $b > 0$.
***Uputa*:** rezultat kojeg trebate dobiti glasi

$$\frac{\pi}{2}c^2\left(a+b\right)$$

Zadatak 5.17 Izračunajte volumen područja na slici koje je omeđeno plohama $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 5/2$ te plohom

$$z=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(\frac{x}{y}\right)$$



***Uputa*:** ako je potrebno, koristite činjenicu da je limes funkcije $x\ln x$ kad x teži u nulu, jednak nuli. Volumen je jednak

$$V=\frac{25\ln 2}{8\sqrt{2}}$$

Zadatak 5.18 Provjerite da je

$$\int_0^1 dy\int_0^1 dx\,\frac{y-x}{\left(x+y\right)^3}=\frac{1}{2}$$

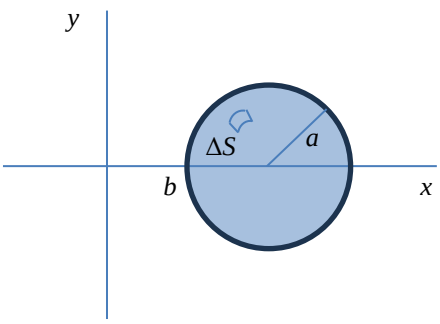
$$\int_0^1 dx\int_0^1 dy\,\frac{y-x}{\left(x+y\right)^3}=-\frac{1}{2}$$

Zašto smo dobili različit rezultat pri zamjeni integriranja?

Zadatak 5.19 Torus je ploha koja nastaje vrtnjom kružnice k oko pravca p koji je u ravnini te kružnice i s njom nema zajedničkih točaka. Neka je polumjer kružnice k jednak a i neka je udaljenost središta kružnice k do pravca p jednaka b ($b > a$). Upotrijebite polarne koordinate da nađete volumen torusa.
***Uputa*:** primijetite da je volumen cijevi koju dobijemo vrtnjom njenog poprečnog presjeka ΔS oko osi y približno

$$\Delta V\approx 2\pi x\,\Delta S$$

ako je ΔS mala površina.



Zadatak 5.20 Izračunajte volumen dijela prostora koji je omeđen paraboloidom $z = 3 - x^2 - y^2$ i ravninom $z = 0$.

***Uputa*:** koristite polarne koordinate.

6 Trostruki integrali

Zadatak 6.1 Izračunajte ove trostruke integrale:

(a) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{x+y+z+1}}$

(b) $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int_0^{1-x-y} xyz\,\mathrm{d}z$

Zadatak 6.2 Izračunajte trostruke integrale:

(a) $\int_P \frac{\mathrm{d}V}{(x+y+z+1)^3}$

gdje je P područje integracije omeđeno koordinatnim ravninama i ravninom $x + y + z = 1$;

(b) $\int_P z\mathrm{d}V$

ako je područje P omeđeno ravninom $z = 0$ i gornjom polovinom elipsoida

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Zadatak 6.3 (a) Izračunajte integral

$$\int_P z\mathrm{d}V$$

gdje je područje P omeđeno čunjom $z^2 = (h/R)^2(x^2 + y^2)$ i ravninom $z = h$.

(b) Izračunajte

$$\int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \mathrm{d}y \int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}z$$

transformiravši ga najprije na cilindričke koordinate.

Zadatak 6.4 Izračunajte integral

$$I = \int_R e^{xyz} x^2 y\, dV$$

gdje je područje R zadano s $x > 0$, $y > 1$, $z > 1$ i $xyz \leq 1$ tako da uvedete nove varijable

$$x = u, \quad y = \frac{u+v}{u}, \quad z = \frac{u+v+w}{u+v}$$

Zadatak 6.5 Izračunajte volumen dijela valjka $x^2 + y^2 = 2ax$ izvan paraboloida $x^2 + y^2 = 2az$ i ravnine xOy.

Zadatak 6.6 Izračunajte volumen tijela omeđenog kuglom $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ i paraboloidom $x^2 + y^2 = 3z$ koje leži u unutrašnjosti paraboloida.

Zadatak 6.7 Nađite masu kvadra stranica a, b i c ako se njegova gustoća mijenja kao

$$\rho(\mathbf{r}) = x + y + z$$

Kvadar je smješten u koordinatni sustav tako da jedan njegov vrh podudara s ishodištem, a bridovi s koordinatnim osima.

Zadatak 6.8 U tijelu polukugle $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, $z \geq 0$, gustoća se mijenja proporcionalno udaljenosti točke od središta. Nađite težište tog tijela.

Zadatak 6.9 Nađite moment tromosti kružnog čunja visine h, polumjera baze a i gustoće λ, s obzirom na promjer baze.

Zadatak 6.10 Izračunajte

$$\int_P z^2 \mathrm{d}V$$

gdje je P područje koje je zajedničko kuglama $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ i $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz$.

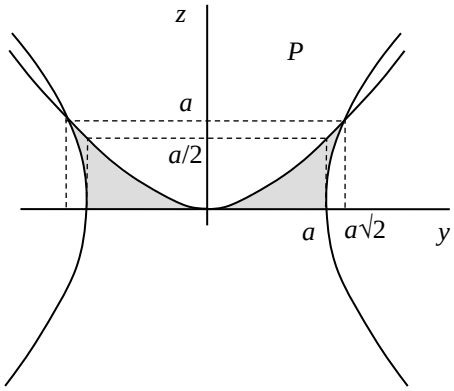
Zadatak 6.11 Izračunajte

$$\int_{-R}^{R} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \mathrm{d}y \int_{0}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2 + y^2)\mathrm{d}z$$

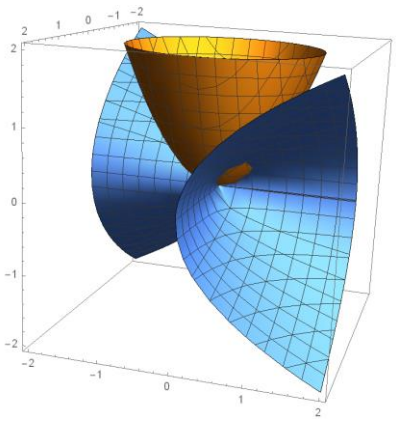
transformiravši ga prethodno na sferne koordinate.

Zadatak 6.12 Nađite moment tromosti kružnog valjka visine h i polumjera baze a, s obzirom na os koja je ujedno promjer baze valjka.

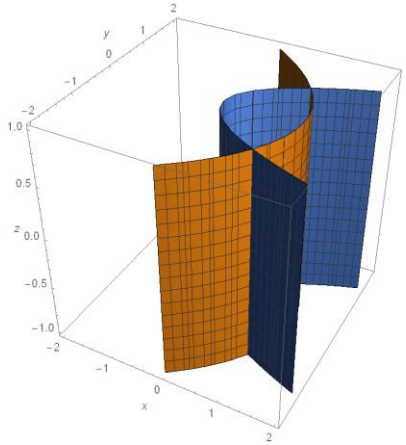
Zadatak 6.13 Nađite volumen tijela omeđenog plohama $2az = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$, $z = 0$.
***Uputa*:** prijeđite na polarne koordinate. Projekcija područja kojemu se traži volumen na yz ravnini prikazana je na crtežu.

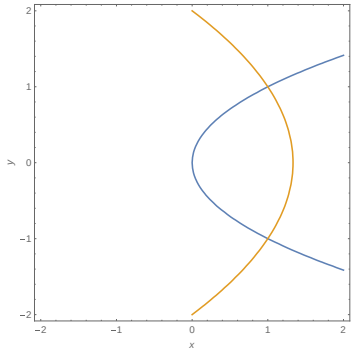


Zadatak 6.14 Izračunajte volumen područja omeđenog paraboloidom $z = x^2 + y^2$ i stožastom plohom $z^2 = xy$.



Zadatak 6.15 Izračunajte pomoću trostrukog integrala volumen tijela omeđenog plohama $y^2 = 4a^2 - 3ax$, $y^2 = ax$ i $z = \pm h$.


y
x
z


y
x

7 Razne metode izračuna integrala

Zadatak 7.1 (a) Pokažite da je

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$$

ako je $f(x)$ neparna funkcija.
(b) Izračunajte integral

$$\int_{-a}^{a} \mathrm{d}x \int_{-b}^{b} \mathrm{d}y \sin^7 x \sin(y^7)$$

Zadatak 7.2 Izračunajte integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-bx^4} \sin cx^5}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx$$

gdje su konstante a, b i c veće od nule.

Zadatak 7.3 (a) Izračunajte volumen 4-dimenzionalne sfere polumjera a

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a^2$$

(b) Kako biste izračunali volumen n-dimenzionalne sfere polumjera a

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = a^2$$

Zadatak 7.4 Izračunajte:

(a) $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-at^2} \mathrm{d}t$

(b) $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-au^4} u\mathrm{d}u$

Zadatak 7.5 Izračunajte:

(a) $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax} \cos(\lambda x)\mathrm{d}x$

(b) $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax} \cos(\lambda x) x\mathrm{d}x$

Zadatak 7.6 Izračunajte integrale:

(a) $\int_0^{\infty} \sin(bx)\mathrm{d}x$

(b) $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$

Zadatak 7.7 Primjenom diferenciranja po parametru izračunajte ovaj integral:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2 x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x \,, |\alpha| \le 1$$

(b) Nađite $G'(x)$ ako je $G(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2x^2}\,\mathrm{d}t$.

Zadatak 7.8 Nađite $F'(y)$ za funkciju

$$F(y) = \int_{\sin y}^{\exp y} \sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x$$

Zadatak 7.9 Diferenciranjem po parametru izračunajte integral

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln\left(a^2 - \sin^2\theta\right) d\theta, \quad a > 1$$

Zadatak 7.10 Pomoću diferenciranja po parametru, pokažite da je

$$I(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1+m\cos x)}{\cos x}\,dx = -\frac{1}{2}\arccos^2(m) + \frac{\pi^2}{8}$$

ako je $-1 < m < 1$. Smijete koristiti Bronštejna.

Zadatak 7.11 Izračunajte integral diferenciranjem po parametru

$$I(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \frac{\arctan(\alpha\tan x)}{\tan x}\,dx$$

Zadatak 7.12 Izračunajte ove neprave integrale

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x} - \mathrm{e}^{-\beta x}}{x}\,\mathrm{d}x$, $\alpha > 0, \beta > 0$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan(\alpha x)}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$

Zadatak 7.13 Ispitajte konvergenciju sljedećih nepravih integrala:

(a) $\displaystyle\int_P \ln\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

gdje je P područje određeno nejednadžbom $x^2 + y^2 \le 1$.

(b) $\displaystyle\int_P \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt[3]{(x-y)^2}}$

gdje je P kvadrat $|x| \le 1$, $|y| \le 1$.

Zadatak 7.14 (a) Izračunajte integral

$$I_1(\mathbf{k}) = \int_P \frac{\mathrm{d}\Omega}{1+\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}_r}$$

gdje je diferencijal prostornog kuta $\mathrm{d}\Omega = \sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$ (θ i ϕ su kutovi kod sfernih koordinata), $\mathbf{k}$ je valni vektor, a $\mathbf{e}_r$ jedinični vektor u smjeru porasta koordinate r (odnosno, vektor normale na jediničnu sfere)

$$\mathbf{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\mathbf{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\mathbf{e}_y + \cos\theta\,\mathbf{e}_z$$

Područje P je cijeli prostor.

(b) Izračunajte integral

$$I_m(\mathbf{k}) = \int_P \frac{\mathrm{d}\Omega}{(1+\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}_r)^m}$$

Zadatak 7.15 Izračunajte sljedeći integral prijelazom na sferne koordinate:

$$\int_P \mathrm{d}V\, \mathrm{e}^{i\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}} \mathrm{e}^{-br^2}$$

gdje je P cijeli prostor. Vektor **a** je konstantan i b je konstanta.

Zadatak 7.16 Zadan je integral $I_m(a) = \int_0^1 \frac{x^2 \mathrm{d}x}{(x^2+a)^m}$, $a > 0, m \in N$. Koja je veza između $I_m(a)$ i $I_{m+1}(a)$? Nađite $I_1(a)$, $I_2(a)$ i $I_3(a)$.

Zadatak 7.17 Izračunajte integral

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^n}$$

***Uputa*:** promijenite varijablu u $y = n^{1/2}x$ te izračunajte najprije graničnu vrijednost, a potom integral. Prisjetite se da vrijedi

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Zadatak 7.18 Izračunajte nepravi integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x+b} \mathrm{d}x$$

***Uputa*:** promijenite varijablu integracije u $y = x + b$. Nakon toga, rastavite integraciju na dva dijela: od $-\infty$ do 0 i od 0 do $+\infty$. Integral od $-\infty$ do 0 svedite promjenom varijabli na integral od 0 do $+\infty$. Zbrojite integrale, te na kraju koristite Dirichletov integral kojega smo definirali na vježbama

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} \mathrm{d}x = \begin{cases} \pi/2, & a > 0; \\ 0, & a = 0; \\ -\pi/2, & a < 0. \end{cases}$$

Zadatak 7.19 Pomoću diferenciranja po parametru, izračunajte integral

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax} \sin(\lambda x) x \mathrm{d}x$$

gdje je $a > 0$.

Zadatak 7.20 Izračunajte integral

$$I(kr) = \int_P \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathrm{d}\Omega$$

gdje je element volumena $\mathrm{d}\Omega = \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi$ (θ i ϕ su kutovi kod sfernih koordinata), **k** je valni vektor, $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$, gdje je $\mathbf{e}_r$ jedinični vektor u smjeru porasta koordinate r (odnosno, vektor normale na jediničnu sferu)

$$\mathbf{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\mathbf{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\mathbf{e}_y + \cos\theta\,\mathbf{e}_z$$

Područje P je cijeli prostor.

Zadatak 7.21 Pomoću Leibnizovog pravila, izračunajte integral

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\ln x} dx$$

gdje je $\alpha > -1$.

Zadatak 7.22 Upotrijebite Leibnizovo pravilo za izračun integrala

$$I(m) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \cos(mt)\, dt, \quad m \in \mathbb{R}$$

i pokažite da je

$$I(m) = \sqrt{\pi} e^{-m^2/4}$$

Zadatak 7.23 Upotrijebite Leibnizovo pravilo za izračun integrala

$$I(y) = \int_0^1 x^y \left(\ln x\right)^n dx, \quad y > -1$$

i pokažite da je

$$I(y) = \frac{\left(-1\right)^n n!}{\left(y+1\right)^{n+1}}$$

***Uputa*:** izračunajte pa diferencirajte n puta integral

$$I(y) = \int_0^1 x^y \, dx$$

po parametru y.

8 Operator nabla. Krivocrtne koordinate

Zadatak 8.1 Zadano je vektorsko polje $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$.
(a) Pojednostavite izraz

$$\nabla\times\left[\mathbf{a}(\nabla\cdot\mathbf{a})\right]+\mathbf{a}\times\left[\nabla\times(\nabla\times\mathbf{a})\right]+\mathbf{a}\times\nabla^2\mathbf{a}$$

(b) Dokažite identitet raspisujući nablu u Karetzijevim koodinatama

$$\left[\mathbf{c}\cdot(\mathbf{b}\cdot\nabla)-\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\cdot\nabla)\right]\mathbf{a}=(\nabla\times\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$$

Zadatak 8.2 Pokažite da je veza između jediničnih vektora u Kartezijevim i cilindričkim koordinatama dana formulama

$$\mathbf{e}_\rho = \cos\varphi\,\mathbf{e}_x + \sin\varphi\,\mathbf{e}_y$$
$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\mathbf{e}_x + \cos\varphi\,\mathbf{e}_y$$
$$\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z$$

Zadatak 8.3 Nađite divergenciju i rotaciju vektorskog polja

$$\mathbf{v} = \rho(2+\sin^2\varphi)\mathbf{e}_\rho + \rho\sin\varphi\cos\varphi\,\mathbf{e}_\varphi + 3z\,\mathbf{e}_z$$

Zadatak 8.4 Nađite divergenciju i rotaciju polja linearnih brzina točaka tijela koje rotira konstantnom kutnom brzinom ω oko osi z u smislu suprotnom gibanju kazaljke sata.

Zadatak 8.5 Pokažite da je polje $\mathbf{E} = \mathbf{r}/r^2$ bezvrtložno. Nađite skalarno polje Φ takvo da je $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ uz dodatan uvjet $\Phi(a) = 0$ za realni broj $a > 0$.
(b) Ako su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ bezvrtložna vektorska polja, tada je polje $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ solenoidalno.
(c) Nađite divergenciju i rotaciju vektorskog polja $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$.

Zadatak 8.6 Dokažite da vrijedi

$$\nabla^2\left(\frac{C}{r}\right)=0$$

u posvuda (osim u $r = 0$), gdje je C konstanta. Time ste pokazali da je skalarna funkcija C/r rješenje Laplaceove jednadžbe $\nabla^2\Phi = 0$. U kojim ćete koordinatama računati Laplacean?

Zadatak 8.7 Paraboličke koordinate u, v, ϕ definirane su pomoću Kartezijevih relacijama

$$x = uv\cos\varphi$$
$$y = uv\sin\varphi$$
$$z = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$$

(a) Kako izgledaju koordinatne plohe?
(b) Provjerite da svaka od koordinatnih ploha (u = konst., na primjer) siječe preostale dvije koordinatne plohe (v = konst., na primjer).
(c) Pokažite da je ovaj sustav koordinata ortogonalan te odredite funkcije h_1 , h_2 , h_3 (faktori skale).
(d) Pokažite da je u-komponenta od $\nabla\times\mathbf{a}$

$$\frac{1}{(u^2+v^2)^{1/2}}\left(\frac{a_\varphi}{v}+\frac{\partial a_\varphi}{\partial v}\right)-\frac{1}{uv}\frac{\partial a_v}{\partial v}$$

Zadatak 8.8 Zadana je sljedeća transformacija Kartezijevih (x, y) i generaliziranih koordinata (q_1, q_2):

$$x = q_1 + q_2$$
$$y = q_1 - q_2$$

(a) Nađite metrički tenzor za ovu transformaciju.
(b) Koliki je kvadrat diferencijala duljine luka u generaliziranim koordinatama?
(b) Koliki je diferencijal "volumena" u generaliziranim koordinatama?

Zadatak 8.9 Zadana je sljedeća transformacija Kartezijevih (x, y) i generaliziranih koordinata (q_1, q_2):

$$x = q_1 + q_2$$
$$y = q_1 - q_2$$

(a) Pokažite da su koordinate (q_1, q_2) ortogonalne.
(b) Nađite gradijent u koordinatama (q_1, q_2).

Zadatak 8.10 (a) Pokažite direktno, raspisom nable u Kartezijevim koordinatama, da za skalarnu funkciju $\Phi = \Phi(\mathbf{r})$ vrijedi

$$\nabla \times (\nabla \Phi) = 0$$

(b) Pokažite direktno, raspisom nable u Kartezijevim koordinatama, da za vektorsku funkciju $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$ vrijedi

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0$$

***Uputa*:** koristite Schwarz-ov teorem koji pokazuje da za skalarnu funkciju $V = V(\mathbf{r})$ vrijedi

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_i}, \; i, j = 1, 2, 3$$

za $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$.

Zadatak 8.11 Pokažite da je
(a) $\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$
(b) $\nabla \times (\Phi \mathbf{A}) = (\nabla \Phi) \times \mathbf{A} + \Phi(\nabla \times \mathbf{A})$

Zadatak 8.12 Neka su $\psi(\mathbf{r})$ skalarno i $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ vektorsko polje. Dokažite da vrijedi identitet

$$\nabla \times (\psi \mathbf{a}) = \nabla \psi \times \mathbf{a} + \psi \nabla \times \mathbf{a}$$

Zadatak 8.13 Dokažite identitet

$$\mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \frac{1}{2} \nabla (a^2) - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{a}$$

gdje je $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$ vektorsko polje.

Zadatak 8.14 Zadano je vektorsko polje $\mathbf{A}$ za koje $\mathbf{A}^2$ = konst. Pokažite da za $\mathbf{A}$ vrijedi

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

Zadatak 8.15 Pokažite da vrijedi identitet

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})$$

Zadatak 8.16 Ako je $\mathbf{c}$ konstantan vektor i

$$\mathbf{A} = \nabla (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) + \nabla \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$$

izračunajte projekciju vektora $\mathbf{A}$ na vektor $\mathbf{c}$.
***Uputa*:** potražite $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{c})/c$.

Zadatak 8.17 Pokažite da je

$$(\mathbf{a} \times \nabla) \cdot \mathbf{r} = 0$$

gdje je $\mathbf{a}$ proizvoljna vektorska funkcija, a $\mathbf{r}$ vektor položaja.

Zadatak 8.18 Ako je $\mathbf{A}$ konstantan vektor (ne ovisi o $\mathbf{r}$) i $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r})$, pokažite da je

$$\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

Zadatak 8.19 Zadano je vektorsko polje

$$\mathbf{F} = 2xz\mathbf{e}_x - 5yz^2\mathbf{e}_y + (x^2 + 2y^2 z - 1)\mathbf{e}_z$$

Izračunajte $\nabla \times \mathbf{F}$ i time pokažite da postoji skalarni potencijal Φ takav da je $\mathbf{F} = -\nabla \Phi$. Odredite Φ.

Zadatak 8.20 Zadana je sila u obliku

$$\mathbf{F} = (x^2 + y^2 + z^2)^n (x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z)$$

Nađite:
(a) $\nabla \cdot \mathbf{F}$
(b) $\nabla \times \mathbf{F}$
(c) skalarni potencijal Φ za silu $\mathbf{F}$, takav da je $\mathbf{F} = -\nabla\Phi$

Zadatak 8.21 Izračunajte gradijent sljedećih skalarnih polja:
(a) r^2
(b) $|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^{-1}$
gdje je $\mathbf{a}$ konstantan vektor.

Zadatak 8.22 Izračunajte divergenciju sljedećih vektorskih polja:
(a) $\mathbf{r}$
(b) $\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})$
gdje su $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ konstantni vektori.

Zadatak 8.23 Izračunajte rotaciju sljedećih vektorskih polja:
(a) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})$
(b) $\mathbf{a}\ln|\mathbf{b} \times \mathbf{r}|$
gdje su $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ konstantni vektori.

Zadatak 8.24 Izračunajte

$$(\mathbf{a}\times\nabla)\times\mathbf{r}$$

gdje je $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$ vektorsko polje i vektor položaja $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$.

Zadatak 8.25 Vektorsko polje $\mathbf{a} = f(r)\mathbf{r}$ je sferno-simetrično i posvud usmjereno od ishodišta. Pokažite da je $\mathbf{a}$ konzervativno i da je solenoidalno ako vrijedi $f(\mathbf{r}) = Ar^{-3}$.

Zadatak 8.26 Iskoristite neke od identiteta s predavanja i izračunajte:
(a) $\nabla\left(\dfrac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\right)$
(b) $\nabla\times\left(\dfrac{\mathbf{p}\times\mathbf{r}}{r^3}\right)$
gdje je $\mathbf{p}$ konstantan vektor dipolnog momenta. Koristite sferne koordinate.

Zadatak 8.27 Pretpostavimo da je vektorsko polje brzina $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ potencijalno. Pokažite da je onda i vektorsko polje ubrzanja $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$ također potencijalno, te nađite odgovarajući potencijal.
Uputa: $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\Phi(\mathbf{r}, t)$. Izrazite $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$ pomoću $\Phi(\mathbf{r}, t)$.

Zadatak 8.28 Pokažite da iz

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{r}\,f(r) \quad\Rightarrow\quad \mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{c}$$

gdje je $\mathbf{c}$ konstantan vektor. O kojem je zakonu očuvanja riječ?

Zadatak 8.29 (a) Pokažite da iz definicije derivacije skalarnog polja Φ u smjeru $\mathbf{l}$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial l} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\Phi(\mathbf{r}+\epsilon\mathbf{l})-\Phi(\mathbf{r})}{\epsilon}$$

slijedi formula

$$\frac{\partial\Phi}{\partial l} = \nabla\Phi\cdot\mathbf{l}$$

gdje je $\mathbf{l}$ jedinični vektor.
(b) Pokažite da iz definicije derivacije u smjeru vektorskog polja $\mathbf{a}$ u smjeru $\mathbf{l}$

$$\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial l} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\mathbf{a}(\mathbf{r}+\epsilon\mathbf{l})-\mathbf{a}(\mathbf{r})}{\epsilon}$$

slijedi formula

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial l} = (\mathbf{l} \cdot \nabla)\mathbf{a}$$

gdje je **l** jedinični vektor.
***Uputa*:** koristite Taylorov red oko točke $\epsilon = 0$.

Zadatak 8.30 Prepostavimo da za transformacije varijabli

$$x_i = f_i(y_1, y_2, ..., y_n), i = 1, 2, ..., n$$

postoje i inverzne transformacije

$$y_i = g_i(x_1, x_2, ..., x_n), i = 1, 2, ..., n$$

Dokažite da za pripadne Jacobijane tada vrijedi

$$J\left(\frac{x_1, x_2, ..., x_n}{y_1, y_2, ..., y_n}\right) J\left(\frac{y_1, y_2, ..., y_n}{x_1, x_2, ..., x_n}\right) = 1$$

Uputa*:** za lakše razmatranje, najprije ispitajte sustav transformacija s dvije varijable (n = 2). te izračunajte umnožak pridružene ***matrice Jacobijana za transformacije i matrice Jacobijana za inverznu transformaciju.

Zadatak 8.31 U Kartezijevu sustavu koordinata, točke A i B su (0, 0, −1) i (0, 0, 1), respektivno. U novom sustavu koordinata, po volji odabrana točka P ima koordinate (u_1, u_2, u_3) gdje su

$$u_1 = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$$

$$u_2 = \frac{1}{2}(r_1 - r_2)$$

$$u_3 = \psi$$

gdje su r_1 i r_2 udaljenosti AP i BP, respektivno, dok je kut ψ između ravnine ABP i ravnine $y = 0$.
(a) Izrazite koordinatu z i udaljenost ρ točke P od osi z pomoću koordinata (u_1, u_2, u_3).
(b) Izračunajte $\partial x/\partial u_i$, $\partial y/\partial u_i$, $\partial z/\partial u_i$, i = 1, 2, 3.
(c) Nađite Kartezijeve komponente vektora $\mathbf{u}_i = \partial \mathbf{r}/\partial u_i$, i = 1, 2, 3 i pokažite da su nove koordinate međusobno ortogonalne.
(d) Izračunajte faktore skale i infinitezimalni element volumena u novom sustavu koordinata.
(e) Nađite najopćenitiju funkciju f koja je samo funkcija varijable u_1 i koja zadovoljava Laplaceovu jednadžbu $\nabla^2 f = 0$.

Zadatak 8.32 Izračunajte

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla)(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

gdje su **a**, **b** i **c** vektorske funkcije argumenta **r**.

Zadatak 8.33 Hiperboličke koordinate (u, v, ϕ) definirane su pomoću Kartezijevih koordinata izrazima

$$x = \cosh u \cos v \cos \phi$$

$$y = \cosh u \cos v \sin \phi$$

$$z = \sinh u \sin v$$

(a) Skicirajte koordinatne krivulje u $\phi = 0$ ravnini i pokažite da krivulje daleko od ishodišta postaju koncentrične kružnice i radijalni pravci. Posebno, identificirajte krivulje $u = 0$, $v = 0$, $v = \pi/2$ i $v = \pi$.
(b) Izračunajte vektore tangenti u po volji odabranoj točki, pokažite da su međusobno ortogonalni i izvedite faktore skale

$$h_u = h_v = \sqrt{\cosh^2 u - \cos^2 v}$$

$$h_\phi = \cosh u \cos v$$

(c) Nađite najopćenitiju funkciju f koja je samo funkcija varijable u i koja zadovoljava Laplaceovu jednadžbu $\nabla^2 f = 0$.

Zadatak 8.34 Zadana su vektorska polja **a**(**r**) i **b**(**r**). Pokažite da vrijedi

$$(\mathbf{a} \times \nabla) \times \mathbf{b} = \mathbf{J}_b \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b})$$

gdje je $\mathbf{J}_b$ matrica

$$\mathbf{J}_b = \begin{pmatrix} \partial b_1 / \partial x_1 & \partial b_2 / \partial x_1 & \partial b_3 / \partial x_1 \\ \partial b_1 / \partial x_2 & \partial b_2 / \partial x_2 & \partial b_3 / \partial x_2 \\ \partial b_1 / \partial x_3 & \partial b_2 / \partial x_3 & \partial b_3 / \partial x_3 \end{pmatrix}$$

koja se ponekad zapisuje i obliku $\mathbf{J}_b = \nabla\mathbf{b}$.

Zadatak 8.35 Ako je zadana funkcija

$$u(\mathbf{r}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{r})\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{r})$$

pokažite da vrijedi

$$\frac{\partial u}{\partial e} = \nabla u\cdot\mathbf{e} = (\mathbf{a}\times\mathbf{r})\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{e}) + (\mathbf{b}\times\mathbf{r})\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{e})$$

gdje su vektori **a** i **b** konstantni vektori, a **e** jedinični vektor. Vektor **r** je vektor položaja.
***Uputa*:** koristite Lagrangeov vektorski identitet za vektore **x**, **y**, **z** i **w**

$$(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\cdot(\mathbf{z}\times\mathbf{w}) = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{z})(\mathbf{y}\cdot\mathbf{w}) - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{w})(\mathbf{y}\cdot\mathbf{z})$$

Zadatak 8.36 Zadana su vektorska polja **a**(**r**) i **b**(**r**). Pojednostavite izraz

$$(\mathbf{a}\times\nabla)\times\mathbf{b}$$

9 Frenetove formule. Diracova delta funkcija

Zadatak 9.1 (a) Napišite jednadžbe tangente, glavne normale i binormale za zavojnicu $\mathbf{r} = (a \cos t, a \sin t, bt)$ u proizvoljnoj točki krivulje. Uzmite da su a i b pozitivni brojevi.
(b) Nađite zakrivljenost u proizvoljnoj točki zavojnice.

Zadatak 9.2 Nađite zakrivljenost i torziju krivulje zadane parametrizacijom

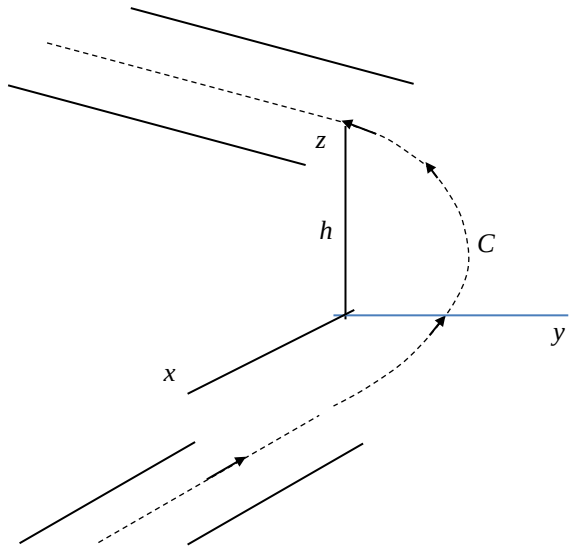
$$\mathbf{r}(t) = \left\{ t + \frac{a^2}{t}, t - \frac{a^2}{t}, 2a \ln\left(\frac{t}{a}\right) \right\}$$

u proizvoljnoj točki krivulje.

Zadatak 9.3 Oblik dijela ceste koji spaja dvije mimoilazne, okomite ravne ceste koje se nalaze na visinama $z = 0$ i $z = h$ slijedi krivulju C zadanu kao $\mathbf{r} = \mathbf{r}(z)$

$$\mathbf{r} = \frac{h\sqrt{2}}{\pi} \ln \cos\left(\frac{\pi}{2h} z\right) \mathbf{e}_x - \frac{h\sqrt{2}}{\pi} \ln \sin\left(\frac{\pi}{2h} z\right) \mathbf{e}_y + z\,\mathbf{e}_z$$

(a) Pokažite da je polumjer zakrivljenosti ove krivulje na visini z jednak $(2h/\pi)[\sin(z\pi/h)]^{-1}$.
(b) Pokažite da je torzija ove krivulje $\tau = -1/\rho$.



Zadatak 9.4 Pokažite da za prostornu krivulju $y^3 + 27axz - 81a^2y = 0$ čije su parametarske jednadžbe

$$x(u) = au(3 - u^2)$$
$$y(u) = 3au^2$$
$$z(u) = au(3 + u^2)$$

vrijede sljedeće tvrdnje:
(a) Ako je s duljina luka navedene krivulje od ishodišta do točke krivulje, tada je

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u} = 3a\sqrt{2}(1 + u^2).$$

(b) Polumjer zakrivljenosti u točki s proizvoljnim parametrom u je $3a(1 + u^2)^2$.

Zadatak 9.5 Pokažite da za prostornu krivulju s prirodnom parametrizacijom $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ gdje je s duljina luka po krivulji (od čvrste točke na krivulji), vrijedi sljedeći identitet

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s} \times \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}s^2} \right) \cdot \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{r}}{\mathrm{d}s^3} = \kappa^2 \tau$$

gdje je κ zakrivljenost, a τ torzija u promatranoj točki.

Zadatak 9.6 Silnice magnetskog polja **B** su krivulje na koje je vektor **B** tangencijalan. Pretpostavimo da smo silnice magnetskog polja parametrizirali prirodnom parametrizacijom. Računajući d**B**/ds, gdje je s duljina luka po silnici (od čvrste točke na silnici), dokažite da je polumjer zakrivljenosti u po volji odabranoj točki na silnici

$$\rho = \frac{B^3}{|\mathbf{B}\times(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{B}|}$$

Zadatak 9.7 Pokažite da za prostornu krivulju s prirodnom parametrizacijom $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ gdje je s duljina luka po krivulji (od čvrste točke na krivulji), vrijedi sljedeći identitet

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}\times\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}s^2}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{r}}{\mathrm{d}s^3} = \kappa^2\tau$$

gdje je κ zakrivljenost, a τ torzija u promatranoj točki.

Zadatak 9.8 (a) Zadana je krivulja $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ gdje je t parametar. Pokažite da je vektor binormale

$$\mathbf{b} \propto \dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}$$

(b) Izračunajte vektore Frenetovog trobrida za krivulju $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ u točki $t = 1$.
Uputa: (a) vektor tangente je

$$\mathbf{t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{\dot{s}}$$

gdje je s duljina luka. Vektor normale je

$$\mathbf{n} \propto \frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\dot{s}}$$

a vektor binormale $\mathbf{b} = \mathbf{t}\times\mathbf{n}$.

Zadatak 9.9 Duljina luka krivulje $\mathbf{r} = \{x(t), y(t), z(t)\}$ od neke fiksne točke na krivulji je $s = \phi(t)$. Pokažite da je torzija zadane krivulje jednaka

$$\tau = -\frac{1}{\kappa^2(\phi')^6}\det\begin{pmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{pmatrix}$$

(b) Koji je nužan i dovoljan uvjet da krivulja zadana u dijelu (a) bude ravninska krivulja?

Zadatak 9.10 Neka je $\Delta\alpha$ kut između glavnih normala u dvama točkama krivulje C. Duljina luka krivulje između danih točaka iznosi Δs. Pokažite da je

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \sqrt{\kappa^2+\tau^2}$$

gdje su κ i τ zakrivljenost i torzija krivulje C. Pretpostavljamo da u svakoj točki krivulje Frenetov trobrid postoji i jedinstven je.
***Uputa*:** izračunajte vektorski produkt glavnih normala

$$|\mathbf{n}(s_1)\times\mathbf{n}(s_2)| = \sin(\Delta\alpha) \approx \Delta\alpha$$

gdje posljednja jednakost vrijedi ako je kut $\Delta\alpha$ mali. Također, koristite $s_2 = s_1 + \Delta s$.

Zadatak 9.11 Krivulja je zadana jednadžbom

$$\mathbf{r}(s) = as\mathbf{m} + \mathbf{m}\times\mathbf{c}(s)$$

gdje je **m** konstantan jedinični vektor, a je skalar i $\mathbf{c}(s)$ je proizvoljna vektorska funkcija od duljine luka s. Pokažite da vrijedi:
(a) Vektor tangente krivulje zatvara konstantan kut s vektorom **m**.
(b) Glavna normala krivulje je ortogonalna na **m**.
(c) Zakrivljenost i torzija krivulje proporcionalne se u svakoj točki krivulje.

Zadatak 9.12 (a) Izračunajte integral

$$\int_{\substack{\text{cijeli}\\ \text{prostor}}} (r^2 + \mathbf{r}\cdot\mathbf{a} + a^2)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{a})\,\mathrm{d}^3r$$

gdje je **a** fiksni vektor iznosa a.
(b) Izračunajte integral

$$\int_V \mathbf{r}\cdot(\mathbf{d}-\mathbf{r})\delta(\mathbf{e}-\mathbf{r})\,\mathrm{d}^3r$$

gdje su vektori **d** = (1, 2, 3), **e** = (3, 2, 1), a V sfera polumjera 3/2 sa središtem u točki (2, 2, 2).

Zadatak 9.13 Pokažite da za delta funkciju vrijedi

$$\delta(kx)=\frac{1}{|k|}\delta(x)$$

gdje je k realna konstanta.

(b) Izračunajte integral

$$\int_0^3 x^3\delta(x+1)\,\mathrm{d}x$$

Zadatak 9.14 Izračunajte integral

$$\int_P |\mathbf{r}-\mathbf{b}|^2\ \delta(5\mathbf{r})\,\mathrm{d}^3r$$

gdje je P kocka s duljinom stranice 2 čiji je centar u ishodištu, a vektor $\mathbf{b} = 4\mathbf{e}_y + 3\mathbf{e}_z$.

(b) Izračunajte integral

$$\int_P (r^2+2)\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{e}_r}{r^2}\right)\mathrm{d}^3r$$

gdje je P unutrašnjost sfere polumjera R sa središtem u ishodištu.

Zadatak 9.15 Dokažite da je

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)=-4\pi\delta(\mathbf{r})$$

tako da promotrite sljedeću funkciju:

$$D(r,\varepsilon)\equiv-\frac{1}{4\pi}\nabla^2\frac{1}{\sqrt{r^2+\varepsilon^2}}\ .$$

(a) Pokažite da je $D(r,\varepsilon) = (3\varepsilon^2/4\pi)(r^2 + \varepsilon^2)^{-5/2}$.
(b) Provjerite da $D(0,\varepsilon) \to \infty$ za $\varepsilon \to 0$.
(c) Provjerite da $D(r,\varepsilon) \to 0$ za $\varepsilon \to 0$ za $r \neq 0$.
(d) Provjerite je li integral funkcije $D(r,\varepsilon)$ po cijelom prostoru jednak 1.

Zadatak 9.16 Nužan i dovoljan uvjet da glavna normala u bilo kojoj točki krivulje bude paralelna jednoj te istoj ravnini jest da je krivulja cilindrička zavojnica. Dokažite!
***Uputa*:** parametarske jednadžbe zavojnice glase $\mathbf{r} = (a\cos t, a\sin t, bt)$.

Zadatak 9.17 Odredite zakrivljenost krivulje

$$\mathbf{r}(t)=\mathbf{e}_x\int_0^t f(u)\sin u\ du+\mathbf{e}_y\int_0^t f(u)\cos u\ du+\mathbf{e}_z\int_0^t f(u)\psi(u)\ du$$

gdje su f i ψ diferencijabilne funkcije.

Zadatak 9.18 Izračunajte integral

$$\int_P\left[r^4+r^2(\mathbf{r}\cdot\mathbf{c})+c^4\right]\delta(\mathbf{r}-\mathbf{c})dV$$

gdje je područje P kugla polumjera $R = 6$ oko ishodišta, vektor $\mathbf{c} = 5\mathbf{e}_x + 3\mathbf{e}_y + 2\mathbf{e}_z$, a $c = |\mathbf{c}|$.

Zadatak 9.19 Neka je krivulja $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ zadana parametrizacijom koja nije prirodna. Pokažite da je zakrivljenost jednaka

$$\kappa = \frac{|\mathbf{B}|}{|\mathbf{T}|^3}$$

gdje je $\mathbf{T} = \mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t$ vektor u smjeru tangente, a $\mathbf{B} = \mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t \times \mathrm{d}^2\mathbf{r}/\mathrm{d}t^2$ vektor u smjeru binormale, a oba vektora nisu jedinična.

Zadatak 9.20 Ako su α i β kutovi koje zatvaraju tangenta i binormala s nekim pravcem, respektivno, pokažite da vrijedi

$$\frac{\kappa}{\tau} = -\frac{\sin\alpha \, d\alpha}{\sin\beta \, d\beta}$$

Zadatak 9.21 Pokažite da su zakrivljenost i torzija krivulje

$$\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{e}_x + 3t^2\mathbf{e}_y + 2t^3\mathbf{e}_z$$

međusobno razmjerne veličine u svakoj točki navedene krivulje.

10 Krivuljni integrali. Cirkulacija vektorskog polja. Stokesov teorem

Zadatak 10.1 Krivulja $\Gamma \subset R^2$ zadana je pomoću parametrizacije

$$x(t) = \int_1^t \frac{\sin\xi}{\xi}\,\mathrm{d}\xi$$

$$y(t) = \int_1^t \frac{\cos\xi}{\xi}\,\mathrm{d}\xi$$

gdje je $t \in [1, t_0]$. Koliki mora biti t_0 da bi duljina krivulje bila jednaka 2?

Zadatak 10.2 Tanka žica savijena je tako da ima oblik parabole $y = x^2$. Duljinska gustoća žice λ u točki parabole proporcionalna je kvadratu apscise te točke. Konstanta proporcionalnosti iznosi $k = 1\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Kolika je masa žice između $x = 0$ i $x = 2$?

Zadatak 10.3 Nađite masu lančanice čija je jednadžba $y = a \cosh(x/a)$ (a je konstanta) između točaka $x_1 = 0$ i $x_2 = a$ ako je duljinska gustoća $\lambda = \mathrm{d}m/\mathrm{d}s$ (m je masa, a s duljina luka) u svakoj točki obrnuto proporcionalna ordinati te točke. U točki $(0, a)$ duljinska gustoća jednaka je δ.
***Uputa*:** parametarske jednadžbe lančanice su $x = t$, $y = a \cosh(t/a)$, ili jednostavno, uzmite koordinatu x za paramerar.

Zadatak 10.4 Nađite rad sile pri gibanju čestice u polju sile

$$\mathbf{F} = 3xy\mathbf{e}_x - 5z\mathbf{e}_y + 10x\mathbf{e}_z$$

po putu $x = t^2 + 1$, $y = 2t^2$, $z = t^3$ od $t = 1$ do $t = 2$.
***Uputa*:** Rad sile $\mathbf{F}$ definira se krivuljnim integralom $W = \int \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}$.

Zadatak 10.5 Zadano je vektorsko polje $\mathbf{A}$

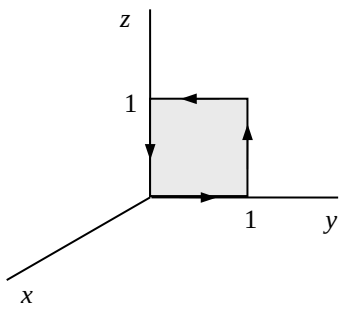
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (4xy - 3x^2z^2)\mathbf{e}_x + (4y + 2x^2)\mathbf{e}_y + (1 - 2x^3z)\mathbf{e}_z$$

(a) Pokažite da krivuljni integral ne ovisi o izabranom putu po kojem integriramo između dvije točke.
(b) Nađite skalarnu funkciju $\Phi = \Phi(\mathbf{r})$ takvu da vrijedi $\mathbf{A} = -\nabla\Phi$.
(c) Izračunajte krivuljni integral od $\mathbf{A}$ po bilo kojem putu od točke $(1, -1, 1)$ do $(2, -2, -1)$.

Zadatak 10.6 Zadano je vektorsko polje $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$

$$\mathbf{v} = (2xz + 3y^2)\mathbf{e}_y + 4yz^2\mathbf{e}_z$$

Provjerite Stokesov teorem za kvadrat sa slike.



Zadatak 10.7 Izračunajte cirkulaciju polja $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$

$$\mathbf{v} = y\mathbf{e}_x - x\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$$

duž zatvorene krivulje dobivene presjekom ploha $z^2 = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z > 0$ te provjerite rezultat pomoću Stokesovog teorema.

Zadatak 10.8 Izračunajte krivuljni integral

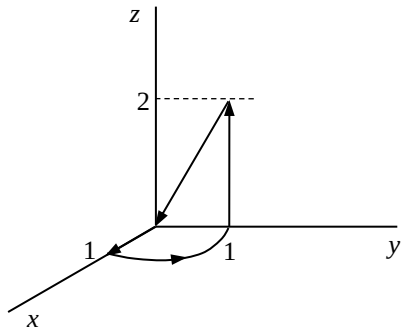
$$\oint_C \left[(\mathrm{e}^x\, y + \cos x \sin y)\,\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x + \sin x \cos y)\,\mathrm{d}y \right]$$

po elipsi $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

Zadatak 10.9 Izračunajte krivuljni integral vektorskog polja $\mathbf{v} = \mathbf{v}(r, \theta, \phi)$

$$\mathbf{v} = r\cos^2\theta\,\mathbf{e}_r - r\cos\theta\sin\theta\,\mathbf{e}_\theta + 3r\,\mathbf{e}_\varphi$$

po putu prikazanom na slici. Provjerite rezultat pomoću Stokesovog teorema.



Zadatak 10.10 Vektorsko polje **F** definirano je u Kartezijevim koordinatama

$$\mathbf{F} = F_0\left[\left(\frac{y^3}{3a^3} + \frac{y}{a}\mathrm{e}^{xy/a^2} + 1\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{xy^2}{a^3} + \frac{x+y}{a}\mathrm{e}^{xy/a^2}\right)\mathbf{e}_y + \frac{z}{a}\mathrm{e}^{xy/a^2}\,\mathbf{e}_z\right]$$

Izračunajte cirkulaciju polja **F**

$$\oint_L \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}$$

tako da upotrijebite Stokesov teorem. Krivulja L sastavljena iz stranica pravokutnika $ABCD$ čije su točke $A = (0, 1, 0)$, $B = (1, 1, 0)$, $C = (1, 3, 0)$ i $D = (0, 3, 0)$.

Zadatak 10.11 Provjerite Stokesov teorem za vektorsko polje

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = x^2y^3\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$$

Cirkulaciju polja **a** računajte po kružnici $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$, a plošni integral po polusferi

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

***Uputa*:** kod računanja javit će se integral

$$\int \sin^4 x\cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{16} - \frac{1}{64}\sin 2x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{192}\sin 6x$$

Zadatak 10.12 Koristeći Stokesov teorem izračunajte

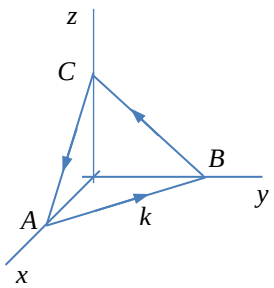
$$\oint_C ydx + zdy + xdz$$

ako je krivulja C po kojoj se integrira kružnica $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$.

Zadatak 10.13 Zadano je vektorsko polje

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = x^2\mathbf{e}_x + xy\mathbf{e}_y + xyz\mathbf{e}_z$$

Provjerite Stokesov teorem za krivulju k koja je rub trokuta s vrhovima $A = (a, 0, 0)$, $B = (0, b, 0)$ i $C = (0, 0, c)$ te plohu S koja je dio ravnine kroz točke A, B i C, a omeđuje je krivulja k.



Zadatak 10.14 Neka je **r** vektor položaja točke u prostoru, **n** konstantni jedinični vektor, a c je zatvorena prostorna krivulja. Pokažite da je

$$\mathbf{n}\cdot\oint_c \mathbf{r}\times d\mathbf{r}$$

jednak dvostrukoj vrijednosti površine omeđene projekcijom krivulje c na ravninu $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} = p$, gdje je p realan broj.

Zadatak 10.15 (a) Pretpostavimo da zatvorena krivulja C leži u xy ravnini i da omeđuje područje D. Pokažite da Stokesov teorem dobiva oblik

$$\oint_C (P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y) = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

gdje su P i Q funkcije od varijabli x i y. Ova se formula naziva ***Greenovom formulom***.
(b) Pokažite da je površina područja D kojeg omeđuje krivulja C

$$S = \frac{1}{2}\oint_C (x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x)$$

Zadatak 10.16 (a) Pokažite da vrijedi

$$\int_D \nabla T\times \mathrm{d}\mathbf{S} = -\oint_C T\mathrm{d}\mathbf{r}$$

(b) Pokažite da je

$$\oint_C (\mathbf{c}\cdot\mathbf{r})\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{S}\times\mathbf{c}$$

gdje je **c** konstantan vektor, a **S** vektorska površina plohe D koja je omeđena krivuljom C, a je definirana izrazom

$$\mathbf{S} \equiv \int_D \mathrm{d}\mathbf{S}$$

Zadatak 10.17 Transformirajte krivuljni integral

$$\oint_C d\mathbf{r}\times\mathbf{a}$$

u plošni integral ako je C krivulja koja omeđuje otvorenu plohu. Izračunajte posebne slučajeve:
(b) $\mathbf{a} = \mathbf{r}$
(c) $\mathbf{a} = \mathbf{r}\times\mathbf{c}$, gdje je **c** konstantan vektor.

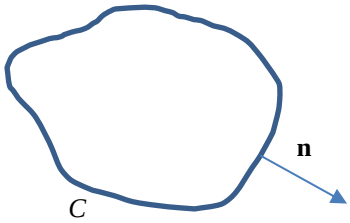
Zadatak 10.18 Neka je funkcija u harmonijska funkcija, odnosno, funkcija koja zadovoljava Laplaceovu jednadžbu ne nekom području D u ravnini xy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Pokažite da je tada

$$\oint_C \nabla u\cdot\mathbf{n}\,ds = 0$$

gdje je C proizvoljna krivulja na D, a **n** vanjska normala na krivulju C.



Uputa: primijetite da je normala **n**

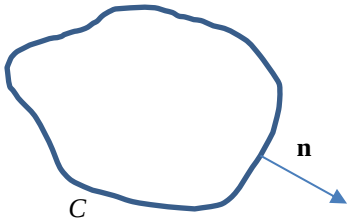
$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\left(\dot{y}\mathbf{e}_x - \dot{x}\mathbf{e}_y\right)$$

te upotrijebite Greenov teorem.

Zadatak 10.19 Za harmonijsku funkciju u, odnosno, funkciju koja zadovoljava Laplaceovu jednadžbu na nekom području D u ravnini xy vrijedi

$$\oint_C \nabla u \cdot \mathbf{n}\, ds = 0 \qquad (*)$$

gdje je C proizvoljna krivulja na D, a **n** vanjska normala na krivulju C.



Upotrijebite gornju jednakost i pokažite da vrijedi teorem srednje vrijednosti za harmonijsku funkciju u

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi R}\oint_C u(x, y)\, ds$$

gdje je C kružnica polumjera R sa središtem u točki (x_0, y_0) koja cijela leži u području D.
Uputa: primijetite da je **n**

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}\left(\dot{y}\mathbf{e}_x - \dot{x}\mathbf{e}_y\right)$$

te da vrijedi

$$\nabla u \cdot \mathbf{n}\, ds = \frac{\partial u}{\partial r} r d\phi$$

ako su (r, ϕ) polarne koordinate na kružnici polumjera $r \leq R$. Na kraju, integrirajte jednadžbu (*) po r od 0 do R.

11 Plošni integrali. Tok vektorskog polja

Zadatak 11.1 Izračunajte plošni integral prve vrste

$$\int_S (6x + 4y + 3z)\, dA$$

gdje je ploha S dio ravnine $x + 2y + 3z = 6$ koji pripada prvom kvadrantu.

Zadatak 11.2 Izračunajte plošni integral prve vrste

$$\int_S x\left(y^2 + z^2\right) dA$$

ako je ploha S zadana jednadžbom $x = (9 - y^2 - z^2)^{1/2}$.

Zadatak 11.3 Izračunajte sljedeći plošni integral prve vrste:

$$\oint_P \left(x^2 + y^2\right) dA$$

gdje je P kugla $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Zadatak 11.4 Izračunajte plošni integral prve vrste

$$\int_S \frac{dA}{(1 + x + z)^2}$$

gdje je S dio ravnine $x + y + z = 1$ koji pripada prvom oktantu.

Zadatak 11.5 Izračunajte plošni integral prve vrste

$$I = \int_S \frac{dA}{l^2}$$

gdje je S dio cilindra $x^2 + y^2 = R^2$ omeđenog ravninama $z = 0$ i $z = h$, a l udaljenost od ishodišta do točke na plohi. Primijetite da ploha po kojoj integriramo nije zatvorena, baze $z = 0$ i $z = h$ nisu dio plohe.

Zadatak 11.6 Pokažite da vrijedi Poissonova formula

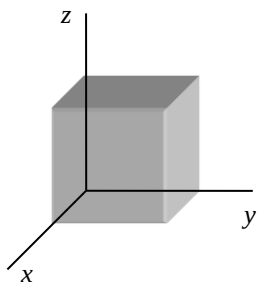
$$\oint_S f\left(ax + by + cz\right) dA = 2\pi \int_{-1}^{1} f\left(u\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\right) du$$

gdje je $f(\eta)$ neprekidna funkcija, a, b, i c su realni brojevi, a S sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Zadatak 11.7 Izračunajte tok vektorskog polja

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = 2xz\mathbf{e}_x + (x + 2)\mathbf{e}_y + y(z^2 - 3)\mathbf{e}_z$$

kroz pet stranica kocke (osim $z = 0$) čija je duljina brida jednaka 2. Koordinatni sustav postavljen je kao na slici. Ovisi li tok vektorskog polja o koordinatnom sustavu?



Zadatak 11.8 Nađite vrijednost toka vektorskog polja $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = x^2\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y + xz\mathbf{e}_z$$

kroz dio rotacijskog paraboloida $y = x^2 + z^2$ koji pripada prvom oktantu ograničen je ravninom $y = 1$.

Zadatak 11.9 Nađite vrijednost plošnog integrala vektorskog polja **A**

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = x\mathbf{e}_x - y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$$

ako je ploha po kojoj se integrira cilindar $x^2 + y^2 = c^2$ omeđen ravninama $z = 0$ i $z = d$.

Zadatak 11.10 Izračunajte tok vektorskog polja

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = x^2\mathbf{e}_x + y^2\mathbf{e}_y + z^2\mathbf{e}_z$$

kroz plohu $x^2/a^2 + y^2/a^2 = z^2/b^2$, $0 \le z \le b$.

Zadatak 11.11 Pokažite da je tok vektorskog polja

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = yz\mathbf{e}_x - x\mathbf{e}_y - y\mathbf{e}_z$$

kroz plašt stošca $x^2 + y^2 = z^2$ ograničenog ravninama $z = 0$ i $z = 1$ jednak nuli.

Zadatak 11.12 Izračunajte tok vektorskog polja **A**

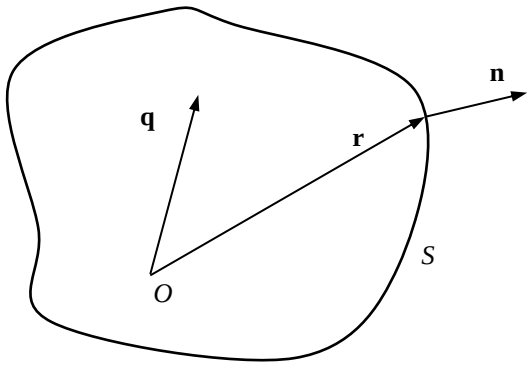
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\sum_{i=1}^{n} \nabla\left(\frac{e_i}{4\pi r_i}\right)$$

gdje je e_i konstantna veličina (naboj), r_i udaljenost točke M_i (izvora) do točke promatranja M kroz zatvorenu plohu S koja sadrži točke M_i , $i = 1, 2, ..., n$.

Zadatak 11.13 Izračunajte integral

$$I(\mathbf{q}) = \oint_S \frac{\cos(\mathbf{R}, \mathbf{n})}{R^2}\, dA$$

gdje je $\mathbf{R} = \mathbf{q} - \mathbf{r}$, a S zatvorena ploha. Vektor **n** je vektor normale na plohu S, a **r** je vektor položaja proizvoljne točke na plohi. Razmotrite slučaj kad je **q** vektor položaja točke unutar plohe S (na slici) i slučaj kad je **q** vektor položaja točke koja je smještena izvan plohe S.



Zadatak 11.14 Izračunajte plošni integral

$$\int_D \left(x^2 \cos\alpha + y^2 \cos\beta + z^2 \cos\gamma\right) dA$$

gdje je D dio površine (plašt) $x^2 + y^2 = z^2$, $0 < z < h$ dok su α, β i γ kutovi koje vanjska normala zatvara s koordinatnim osima.

Zadatak 11.15 Odredite masu plohe paraboloida

$$z = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right), \quad 0 \le z \le 1$$

čija je plošna gustoća jednaka $\rho = z$.

12 Teorem o divergenciji. Srodni teoremi

Zadatak 12.1 Izračunajte plošni integral vektorskog polja **A**

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (x^2 + y^2 + z^2)(x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z)$$

po sferi $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Računajte direktno i nakon toga računajte pomoću teorema o divergenciji.

Zadatak 12.2 Nađite vrijednost toka vektorskog polja **A**

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = x\mathbf{e}_x - y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$$

ako je ploha po kojoj se integrira cilindar $x^2 + y^2 = c^2$ omeđen ravninama $z = 0$ i $z = d$. Računajte direktno i upotrebom teorema o divergenciji.

Zadatak 12.3 Izračunajte tok polja **A** = **A**(**r**)

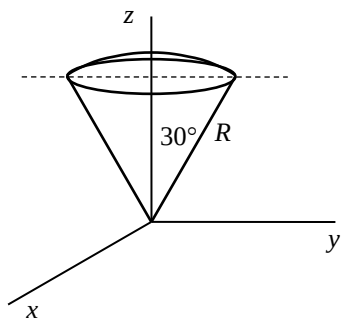
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (x - 2z)\mathbf{e}_x + (3z - 4x)\mathbf{e}_y + (5x + y)\mathbf{e}_z$$

kroz stranice piramide s vrhovima (1,0,0); (0,1,0); (0,0,1); (0,0,0) te provjerite rezultat pomoću teorema o divergenciji.

Zadatak 12.4 Provjerite teorem o divergenciji za vektorsko polje oblika

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = r^2 \sin\theta\,\mathbf{e}_r + 4r^2 \cos\theta\,\mathbf{e}_\theta + r^2 \tan\theta\,\mathbf{e}_\varphi$$

za kuglin isječak prikazan na slici.



Zadatak 12.5 Izračunajte tok polja **a** = **a**(**r**)

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \frac{1}{x}\mathbf{e}_x + \frac{1}{y}\mathbf{e}_y + \frac{1}{z}\mathbf{e}_z$$

kroz sferu polumjera R.
(b) Provjerite rezultat pomoću teorema o divergenciji.
***Uputa*:** pod (a), parametarska jednadžba sfere polumjera R glasi

$$\mathbf{r}(\theta,\phi) = R\sin\theta\cos\phi\,\mathbf{e}_x + R\sin\theta\sin\phi\,\mathbf{e}_y + R\cos\theta\,\mathbf{e}_z$$

Pod (b), izračunajte divergenciju polja **a** u kartezijevim koordinatama te primijetite simetriju podintegralne funkcije.

Zadatak 12.6 Provjerite teorem o divergenciji za vektorsko polje

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$$

ako je područje integracije valjak

$$x^2 + y^2 \le R^2$$

$$0 \le z \le H$$

***Uputa*:** vektor položaja u cilindričkim koordinatama glasi

$$\mathbf{r} = \rho\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_z$$

Diferencijal površine po plaštu je

$$\mathrm{d}S = R\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$$

Zadatak 12.7 Provjerite teorem o divergenciji za vektorsko polje

$$\mathbf{v} = r^2 \cos\theta\, \mathbf{e}_r + r^2 \cos\phi\, \mathbf{e}_\theta - r^2 \cos\theta \sin\phi\, \mathbf{e}_\phi$$

gdje je područje integracije dio kugle polumjera R iz prvog kvadranta.

Zadatak 12.8 Vektorsko polje **F** definirano je u cilidričkim koordinatama ρ, ϕ i z formulom

$$\mathbf{F} = F_0 \left(\frac{x \cos\lambda z}{a} \mathbf{e}_x + \frac{y \cos\lambda z}{a} \mathbf{e}_y + \sin\lambda z\, \mathbf{e}_z \right)$$

$$= \frac{F_0 \rho}{a} \cos\lambda z\, \mathbf{e}_\rho + F_0 \sin\lambda z\, \mathbf{e}_z$$

gdje je $\mathbf{e}_\rho = (x/\rho)\mathbf{e}_x + (x/\rho)\mathbf{e}_y$.
(a) Izračunajte tok polja **F** kroz zatvorenu plohu omeđenu cilindrima $\rho = a$ i $\rho = 2a$ i ravninama $z = \pm\, a\pi/2$.
(b) Izračunajte isti integral upotrebom teorema o divergenciji.

Zadatak 12.9 Toplinu koja u temperaturnom polju $T = T(\mathbf{r}, t)$ prođe u jediničnom vremenu kroz površinu dS nazivamo toplinskim tokom dΦ

$$\mathrm{d}\Phi = -\lambda \nabla T \cdot \mathbf{n}\mathrm{d}S$$

gdje je $\lambda = \lambda(\mathbf{r})$ toplinska provodnost, a **n** jedinični vektor normale na S.
(a) Pretpostavimo da zagrijavamo tijelo gustoće ρ i specifičnog toplinskog kapaciteta c. Odredite količinu primljene topline u jediničnom vremenu.
***Uputa*:** za mali volumen ΔV unutar tijela vrijedi relacija $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t = c\rho\Delta V \partial T/\partial t$.
(b) Izvedite Fourierovu diferencijalnu jednadžbu provođenja topline koju zadovoljava temperatura tijela. ***Uputa*:** Pri izvodu koristite (a), teorem o divergenciji te zakon očuvanja energije (jednadžba kontinuiteta)

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\Phi$$

Zadatak 12.10 Izračunajte

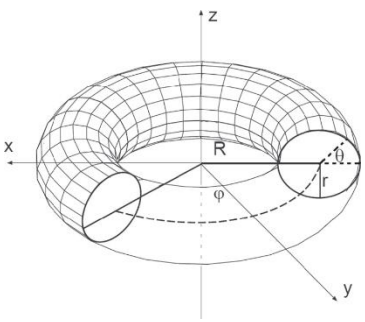
$$\oint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{A}$$

gdje je S torus. Parametarske jednadžbe torusa glase:

$$x(\theta,\phi) = (R + r\cos\theta)\cos\phi$$

$$y(\theta,\phi) = (R + r\cos\theta)\sin\phi$$

$$z(\theta,\phi) = r\sin\theta$$



Uputa: za računanje površine i volumena torusa koristite Pappusove teoreme.

Zadatak 12.11 Dokažite da je

$$\oint_P \cos(\mathbf{n}, \mathbf{l})\mathrm{d}S = 0$$

ako je P proizvoljna zatvorena ploha, **l** po volji odabran konstantan i jedinični vektor, a **n** vanjska normala na plohu S.

Zadatak 12.12 Upotrijebite teorem o divergenciji te integrirajte po sferi s polumjerom $R \to \infty$ da pokažete identitet

$$\int_P f(\nabla \cdot \mathbf{A})\mathrm{d}V = -\int_P \mathbf{A} \cdot (\nabla f)\mathrm{d}V$$

gdje je područje P cijeli prostor. Pretpostavite da $f\mathbf{A}$ teži k nuli brže od R^2 kad $R \to \infty$ (npr. za veliki R ponaša se kao R^{-3}) te da f i $\mathbf{A}$ zadovoljavaju uvjete teorem o divergenciji teorema.

Zadatak 12.13 Upotrijebite teorem o divergenciji i pokažite sljedeće identitete:

(a) $\int_P (\nabla T)\mathrm{d}V = \oint_{\partial P} T\mathrm{d}\mathbf{S}$ (Teorem o gradijentu)

(b) $\int_P (\nabla \times \mathbf{v})\mathrm{d}V = -\oint_{\partial P} \mathbf{v} \times \mathrm{d}\mathbf{S}$ (Teorem o rotaciji)

(c) $\int_P (T\nabla^2 U + (\nabla T) \cdot (\nabla U))\mathrm{d}V = \oint_{\partial P} (T\nabla U) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$ (Greenov identitet)

(d) $\int_P (T\nabla^2 U - U\nabla^2 T)\mathrm{d}V = \oint_{\partial P} (T\nabla U - U\nabla T) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$ (Greenov teorem)

Zadatak 12.14 Koje svojstvo treba imati vektorsko polje $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ da za proizvoljnu plohu D vrijedi relacija

$$\oint_D (\mathbf{c} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S})\mathbf{a} = \oint_D \mathrm{d}\mathbf{S}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})$$

gdje je $\mathbf{c}$ konstantan vektor?

***Uputa*:** koristite teorem o rotaciji

$$\oint_D \mathrm{d}\mathbf{S} \times \mathbf{a} = \int_P \nabla \times \mathbf{a}\,\mathrm{d}V$$

Zadatak 12.15 (a) Pokažite da je

$$\int_P \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A})\mathrm{d}V = \int_P \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})\mathrm{d}V + \oint_{\partial P} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

(b) Čemu teži gornji izraz ako je rub područja ∂P sfera beskonačnog radijusa? Postavite uobičajne uvjete za vektorska polja $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$.

Zadatak 12.16 Upotrijebite teorem o divergenciji i dokažite da je volumen tijela omeđenog plohom D jednak

$$V = \frac{1}{3}\oint_D (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

gdje je su $\cos\alpha$, $\cos\beta$ i $\cos\gamma$ kosinusi smjera vanjske normale na plohu D.

Zadatak 12.17 Ako je $\mathbf{a}$ konstantan vektor, a D zatvorena ploha koja omeđuje područje P obujma V, pokažite da vrijedi

$$\oint_D (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \times \mathrm{d}\mathbf{S} = 2V\mathbf{a}$$

***Uputa*:** upotrijebite teorem o rotaciji.

Zadatak 12.18 Ako je $\mathbf{a}$ konstantan vektor, a D zatvorena ploha koja omeđuje područje P obujma V, pokažite da vrijedi

$$\oint_D (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \times \mathrm{d}\mathbf{S} = 2V\mathbf{a}$$

***Uputa*:** upotrijebite teorem o rotaciji.

Zadatak 12.19 (a) Neka su S_1 i S_2 zatvorene plohe takve da se S_2 u potpunosti nalazi unutar S_1 i neka je P područje između ploha. Po području P i plohama S_1 i S_2 koje omeđuju P zadano je vektorsko polje $\mathbf{F}$ klase C^1 takvo da vrijedi

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$$

Upotrebom teorema o divergenciji pokažite da vrijedi

$$\oint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \oint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}$$

(b) Za polje **F** iz uzmite

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{q}}{|\mathbf{r} - \mathbf{q}|^3}$$

i pomoću (a) pokažite da za po volji odabranu plohu S vrijedi

$$\oint_{S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \begin{cases} 0, & \mathbf{q} \text{ je izvan } S \\ 4\pi, & \mathbf{q} \text{ je unutar } S \end{cases}$$

***Uputa*:** ako je **q** unutar S, opišite sferu S_2 oko **q** tako da S_2 leži unutar S.

13 Tenzori

Zadatak 13.1 Magnetsko polje **B** (ili gustoća magnetskog toka) definira se pomoću Lorentzove sile

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v}\times\mathbf{B})$$

gdje je **v** brzina nabijene čestice naboja q. Načinjena su tri eksperimenta u kojima je:

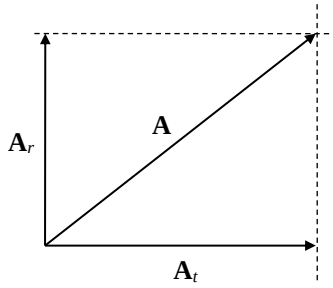
$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_x\,,\ \mathbf{F}/q = 2\mathbf{e}_z - 4\mathbf{e}_y$$
$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_y\,,\ \mathbf{F}/q = 4\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_z$$
$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_z\,,\ \mathbf{F}/q = \mathbf{e}_y - 2\mathbf{e}_x$$

Iz ovih rezultata nađite magnetsko polje **B**.

Zadatak 13.2 (a) Vektor **A** rastavljen je na dva međusobno ortogonalna vektora (slika): radijalnog $\mathbf{A}_r$ u smjeru vektora položaja **r**, te tangencijalnog $\mathbf{A}_t$. Pokažite da vrijedi:

$$\mathbf{A}_r = \mathbf{e}_r(\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_r)$$
$$\mathbf{A}_t = -\mathbf{e}_r\times(\mathbf{e}_r\times\mathbf{A})$$

gdje je $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$ jedinični vektor u smjeru vektora položaja **r**.



(b) Neka je **A** proizvoljan vektor i **e** jedinični vektor u nekom fiksnom smjeru. Pokažite da vrijedi

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}) - \mathbf{e}\times(\mathbf{e}\times\mathbf{A})$$

Zadatak 13.3 (a) Dokažite Lagrangeov vektorski identitet

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})$$

***Uputa*:** koristite definiciju vektorskog produkta pomoću Levi-Civitine gustoće i sljedeću relaciju

$$\sum_i \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$$

(b) Pokažite da je skalarni produkt invarijanta ortogonalnih transformacija.

Zadatak 13.4 Pokažite da vrijedi identitet

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = \left[\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{D})\right]\mathbf{C} - \left[\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\right]\mathbf{D}$$

***Uputa*:** smijete koristiti već gotove vektorske identitete ili radite s jednom komponentom.

Zadatak 13.5 Točke O, A, B i C imaju vektore položaja **0**, **a**, **b** i **c**. Označite s $\mathbf{g} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c}$ vektor položaja središta sfere na kojoj leže navedene točke.

(a) Pokažite da λ, μ i ν zadovoljavaju identitet

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})\lambda + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mu + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\nu = \frac{1}{2}a^2$$

kao i ostala dva slična identiteta.

(b) Promjenite ishodište koordinatnog sustava i nađite središte sfere na kojoj leže točke $\mathbf{p} = 3\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y - 2\mathbf{e}_z$, $\mathbf{q} = 4\mathbf{e}_x + 3\mathbf{e}_y - 3\mathbf{e}_z$, $\mathbf{r} = 7\mathbf{e}_x - 3\mathbf{e}_z$ i $\mathbf{s} = 6\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z$.

Zadatak 13.6 Neka je **x** nepoznat vektor koji zadovoljava sljedeće relacije

$$\mathbf{a}\times\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{a}\cdot\mathbf{x} = \varphi$$

Vektori **a** i **b**, te skalar ϕ poznati su. Izrazite vektor **x** pomoću **a**, **b**, ϕ i $|\mathbf{a}|$.

Zadatak 13.7 Neka je **A** proizvoljan vektor i **e** jedinični vektor u nekom fiksnom smjeru. Pokažite da vrijedi

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}) - \mathbf{e}\times(\mathbf{e}\times\mathbf{A})$$

Zadatak 13.8 Ako su **a** i **r** vektori, pokažite da je tada $\partial a_i / \partial x_k$ tenzor drugog reda, gdje su a_i i x_k komponente navedenih vektora.

Zadatak 13.9 Pokažite da je skalarni produkt invarijanta ortogonalnih transformacija.

Zadatak 13.10 Zadana su dva tenzora A i B. Pokažite da vrijedi

$$\sum_{jk} A_{jk} B_{jk} = \sum_{lm} A'_{lm} B'_{lm}$$

gdje su crtani i necrtani matrični elementi povezani ortogonalnom transformacijom. Na primjer,

$$A'_{lm} = \sum_{jk} S_{lj} S_{mk} A_{jk}$$

gdje je S matrica ortogonalne transformacije.

Zadatak 13.11 Zadan je tenzor A koji je drugog ranga. Je li determinanta matrice za A invarijanta ortogonalnih transformacija?
***Uputa*:** koristite relaciju $\det(BC) = \det(B)\det(C)$.

Zadatak 13.12 Pokažite da vrijede izrazi

$$(AB)^T = B^T A^T, \quad (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

s tim da pretpostavite da inverzne matrice postoje.

Zadatak 13.13 (a) Pokažite da je umnožak dvije ortogonalne martice također ortogonalna matrica.
(b) Pokažite da ako je A ortogonalna matrica 3×3, njezina tri stupca tvore tri međusobno ortogonalna vektora.

Zadatak 13.14 Trag matrice definiran je kao zbroj matričnih elemenata po dijagonali. Na primjer, za matricu A, trag je

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_i A_{ii}$$

Pokažite da je trag invarijanta ortogonalnih transformacija.

Zadatak 13.15 Neka je A tenzor drugog ranga i odgovarajuća matrica A^{-1} postoji. Pokažite da je A^{-1} također tenzor drugog ranga (u odnosu na ortogonalne transformacije).

Zadatak 13.16 (a) Napišite matricu rotacije za kut θ oko osi z.
(b) Napišite matricu rotacije za kut θ oko osi y.
(c) Kolike su determinante za matrice pod (a) i (b)?
(d) Napišite matricu zrcaljenja na xy ravnini. Kolika je determinanta te matrice?

Zadatak 13.17 Relacije koje povezuju koordinate u dva Kartezijeva koordinatna sustava S i S' glase

$$x' = \frac{1}{\sqrt{6}}(x - y - 2z), \quad y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y), \quad z' = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - y + z)$$

(a) Je li zadana transformacija ortogonalna?
(b) Neka je skalarno polje zadano u sustavu S' relacijom

$$\Phi'(x', y', z') = x' - y' + 3z'$$

Nađite reprezentaciju skalarnog polja $\Phi(x, y, z)$ u sustavu S ako su koordinatni sustavi povezani transformacijom zadanom pod (a).
(c) Nađite reprezentaciju vektorskog polja **a** u S' ako su $a_x(x, y, z) = 2y - z$, $a_y(x, y, z) = x + z$, $a_z(x, y, z) = x^2 z + y$ komponente toga polja u sustavu S, a transformacija između koordinatnih sustava je dana pod (a).

LITERATURA

Arfken G. B., Weber H. J., Harris F. E., *Mathematical methods for physicists: A Comprehensive Guide*, 7th ed., Academic Press, London, 2012.

Demidovič B. P., i dr., *Zadaci i riješeni primjeri iz matematičke analize za tehničke fakultete*, Golden marketing, Zagreb, 2003.

Devidé V., i dr., *Riješeni zadaci iz više matematike*, svezak IV, Školska knjiga, Zagreb, 1990.

Hess S., *Tensors for Physics*, Springer, Berlin, 2015.

Kurepa S., *Matematička analiza III*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1989.

Mathews J., Walker R. L., *Mathematical Methods of Physics*, Addison-Wesley, Reading, 1970.

Miličić P. M., Uščumlić M. P., *Zbirka zadataka iz više matematike II*, Naučna knjiga, Beograd, 1986.

Riley K. F., Hobson M. P., *Mathematical Methods for Physics and Engeneering*, 3rd. ed., Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

Spiegel M. R., i dr., *Schaum's Outline - Vector analysis*, McGraw-Hill, New York, 2nd ed., 2009.