MATEMATIČKE METODE FIZIKE I

Pismeni ispit 18. 2. 2022.

ZADATAK 1 Funkciju $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - 4x - 3y - z + 4$ razvijte po Taylorovoj formuli u okolini točke (1, 1, 1).

ZADATAK 2 Temperatura točke (x, y, z) na sferi jediničnog polumjera, dana je jednadžbom

$$T(x, y, z) = 1 + xy + yz$$

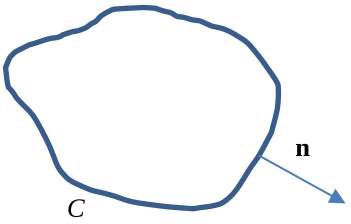
Upotrebom metode Lagrangeovih množitelja, nađite temperaturu najtoplije točke na sferi.

ZADATAK 3 Izračunajte volumen dijela prostora koji je omeđen paraboloidom $z = 3 - x^2 - y^2$ i ravninom $z = 0$.
***Uputa*:** koristite polarne koordinate.

ZADATAK 4 Za harmonijsku funkciju u, odnosno, funkciju koja zadovoljava Laplaceovu jednadžbu na nekom području D u ravnini xy vrijedi

$$\oint_C \nabla u \cdot \mathbf{n}\, ds = 0 \qquad (*)$$

gdje je C proizvoljna krivulja na D, a **n** vanjska normala na krivulju C.



Upotrijebite gornju jednakost i pokažite da vrijedi teorem srednje vrijednosti za harmonijsku funkciju u

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi R} \oint_C u(x, y)\, ds$$

gdje je C kružnica polumjera R sa središtem u točki (x_0, y_0) koja cijela leži u području D.
Uputa: primijetite da je **n**

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \left(\dot{y}\mathbf{e}_x - \dot{x}\mathbf{e}_y \right)$$

te da vrijedi

$$\nabla u \cdot \mathbf{n}\, ds = \frac{\partial u}{\partial r} r\, d\phi$$

ako su (r, ϕ) polarne koordinate na kružnici polumjera $r \le R$. Na kraju, integrirajte jednadžbu (*) po r od 0 do R.

ZADATAK 5 Provjerite teorem o divergenciji za vektorsko polje

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$$

ako je područje integracije valjak

$$x^2 + y^2 \le R^2$$

$$0 \le z \le H$$

***Uputa*:** vektor položaja u cilindričkim koordinatama glasi

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_z$$

Diferencijal površine po plaštu je

$$dS = R\, d\phi\, dz$$

$\boxed{Z3.4}$

Funkcija je polinom drugog reda pa će imati članove najviše drugog reda.

$$f(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0) + \frac{1}{1!}\left[(x-x_0) f'_x + (y-y_0) f'_y + (z-z_0) f'_z \right]$$
$$+ \frac{1}{2!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y} + (z-z_0)\frac{\partial}{\partial z}\right] f_{(x_0,y_0)}$$

Računamo derivacije

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1) = (2x+2y-4)\Big/_{(1,1,1)} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1) = (2y+2x-z-3)\Big/_{(1,1,1)} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) = (2z-y-1)\Big/_{(1,1,1)} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1,1) = 2 \qquad f(1,1,1) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(1,1,1) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(1,1,1) = -1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2$$

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2!}\Big((x-1)^2 \cdot 2 + (y-1)^2 \cdot 2 + (z-1)^2 2$$

$$+ 2(y-1)(z-1)\cdot(-1)\Big)$$

$$= (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 + 2(x-1)(y-1) - (y-1)(z-1)$$

$\boxed{4.7}$

Jednadžba veze je

$$x^2+y^2+z^2=1 \implies g(x,y,z) = 1-x^2-y^2-z^2=0$$

Formiramo funkciju:

$$f(x,y,z) = T(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)$$

$$f(x,y,z) = 1+xy+yz+\lambda(1-x^2-y^2-z^2)$$

Stacionarne točke

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y - 2\lambda x = 0 \implies x = \frac{y}{2\lambda}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x+z-2\lambda y = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = y - 2\lambda z = 0 \implies z = \frac{y}{2\lambda}$$

Vidimo da je $x=z$. Uvrstimo u drugu jednadžbu

$$\frac{y}{2\lambda} + \frac{y}{2\lambda} - 2\lambda y = 0 \implies y\left(\frac{2}{2\lambda} - 2\lambda\right) = 0$$

Imamo: $y=0$ i $\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

Ako je $y=0$, tada su $x=z=0$ i točka nije na ~~sferi~~

Za $\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ imamo:

$$x = y\cdot\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$z = y\cdot\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Uvrstimo u jednadžbu veze

$$y^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

dok su x i z

$$x = \pm \frac{1}{2}$$

$$z = \pm \frac{1}{2}$$

Četiri moguće točke za ekstremnu temperaturu su

$$\left(\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\left(-\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$$

Uvrstimo li ih u temperaturu, vidimo da je maksimum

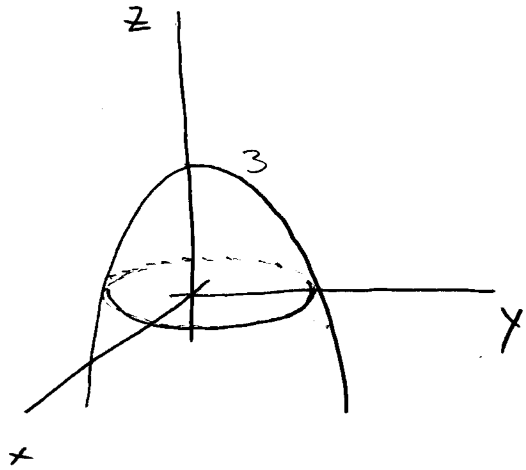
$$T = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

za točke

$$\pm\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$$

Druge dvije točke daju minimalnu temperaturu.

3.



Projekcija ove plohe na ravninu xy daje ($z=0$)

$$x^2+y^2=3$$

To je kružnica (odnosno, krug, za $x^2+y^2\le 3$) polumjera $R=\sqrt{3}$.

Volumen ćemo pronaći pomoću

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

gdje je D krug polumjera $\sqrt{3}$. Imamo

$$x = r\cdot\cos\phi$$

$$y = r\cdot\sin\phi$$

$$f(x,y) = z = 3-x^2-y^2 = 3-r^2$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\sqrt{3}} dr\cdot r\left(3-r^2\right) = 2\pi\cdot\left[3\cdot\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]\Big|_0^{\sqrt{3}}$$

$$= 2\pi\cdot\left[3\cdot\frac{3}{2}-\frac{9}{4}\right]$$

$$= 2\pi\cdot\frac{9}{4} = \frac{9\pi}{2}$$

$\boxed{4.}$

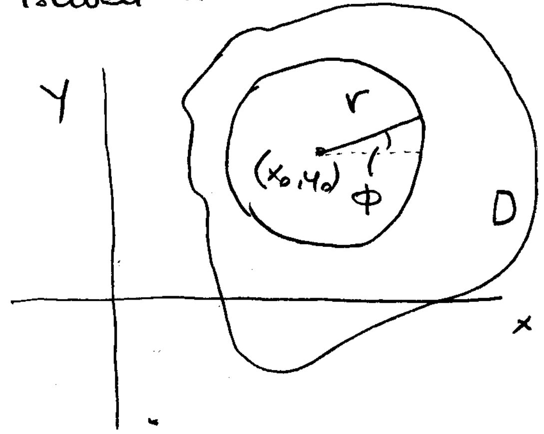
Jednakost

$$\oint_C \vec{\nabla} u \cdot \vec{n}\, ds = 0$$

pokazali smo na zadatku koji je bio na ispitnom roku.
Uzmimo najprije da je C kružnica polumjera r sa središtem u točki (x_0, y_0). Parametarske jednadžbe kružnice su

$$x(\phi) = x_0 + r\cos\phi$$
$$y(\phi) = y_0 + r\sin\phi$$

gdje su r i ϕ polarne koordinate u sustavu u kojem je kružnica u ishodištu.



Imamo

$$\vec{\nabla} u \cdot \vec{n}\, ds = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} \right) \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\, d\phi$$

gdje se derivacije $\dot{x}$ i $\dot{y}$ odnose na derivacije po parametru ϕ.
Uvrstimo li informacije o krivulji u gornju jednadžbu, imamo

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos\phi - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot (-\sin\phi) \right) \cdot r\, d\phi$$

No zagrada je, uz $u(x,y) = u(x_0 + r\cos\phi, y_0 + r\sin\phi)$

$$\frac{\partial}{\partial r} u(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos\phi + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \sin\phi$$

prema derivaciji složene funkcije. Prema tome,

$$\vec{\nabla} u \cdot \vec{n}\, ds = \frac{\partial u}{\partial r}\, r\, d\phi$$

pa je

$$\oint_C \vec{\nabla} u \cdot \vec{n}\, ds = \int_0^{2\pi} d\phi \, \frac{\partial u}{\partial r}\, r = 0$$

Ovo možemo napisati u obliku

$$\frac{d}{dr} \int_0^{2\pi} d\phi \, u(x_0 + r\cos\phi, y_0 + r\sin\phi) = 0$$

odnosno, nakon integracije po r

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R dr \, \frac{du}{dr} = \int_0^{2\pi} d\phi \left[u(x_0 + R\cos\phi, y_0 + R\sin\phi) \right.$$

$$\left. - \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi \, u(x_0, y_0)}_{2\pi u(x_0, y_0)} \right]$$

Odavde,

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \, u(x_0 + R\cos\phi, y_0 + R\sin\phi)$$

$$= \frac{1}{2\pi R} \oint_C u(x,y)\, ds$$

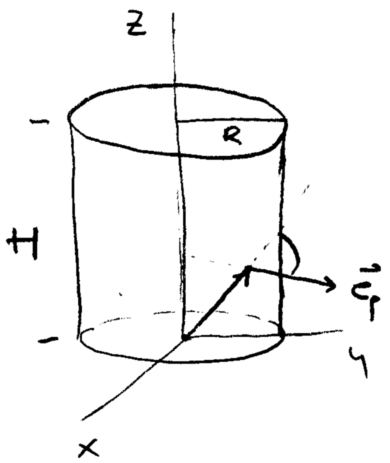
$\boxed{12.4}$ $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r}$

Izračunajmo najprije

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{r}\, dV = 3\int dV = 3HR^2\pi$$

$$\oint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_{PLAŠT} + \int_{BAZE}$$

$$\int_{PLAŠT} \vec{r}\cdot d\vec{S} =$$



$$d\vec{S} = R\, d\phi\, dz\, \vec{e}_\rho$$
$$\vec{r} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z$$

$$\vec{r}\cdot d\vec{S} = R^2 d\phi\, dz$$

$$\int_{PLAŠT} R^2 d\phi\, dz = 2\pi R^2 H$$

$$\int_{\substack{\text{GORNJA BAZA}\\ z=H}} \vec{r}\cdot d\vec{S} = \int_{G.B} (\rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z)\cdot(\rho\, d\rho\, d\phi\, \vec{e}_z)$$

$$= H\int_{G.B} \rho\, d\rho\, d\phi = H\,\frac{R^2}{2}\cdot 2\pi = HR^2\pi$$

$$\int_{\substack{\text{DONJA BAZA}\\ z=0}} z\rho\, d\rho\, d\phi = 0$$

Sve skupa : $\oint_S \vec{r}\cdot d\vec{S} = 3HR^2\pi$