MATEMATIČKE METODE FIZIKE II

Drugi kolokvij 04.07.2014.

1. (a) Pokažite da su funkcije $f(z) = c$ i $f(z) = z$, gdje je c kompleksna konstanta, analitičke u cijeloj kompleksnoj ravnini.
(b) Zadane su analitičke funkcije $f_1(x,y) = u_1(x,y) + i\, v_1(x,y)$ te $f_2(x,y) = u_2(x,y) + i\, v_2(x,y)$ na nekom području u kompleksnoj ravnini. Pokažite da su tada i $f_1 + f_2$ i $f_1 \cdot f_2$ analitičke funkcije na istom području kompleksne ravnine.
(c) Pomoću (a) i (b) te matematičke indukcije, pokažite da je kompleksni polinom

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

analitička funkcija u cijeloj kompleksnoj ravnini.

2. Riješite jednadžbu

$$\cos z = 2$$

3. Odredite imaginarni dio analitičke funkcije $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ gdje je $u = \Phi(x^2 + y^2)$.
***Uputa*:** najprije nađite realni dio od $f(z)$, a nakon toga upotrijebite C-R uvjete.

4. Napišite Laurentov red oko $z = 0$ za navedenu funkciju i pri tom navedite o kakvom se singularitetu u točki $z = 0$ radi:

$$f(z) = \mathrm{e}^{z^2} / z^3$$

5. Izračunajte realni integral pomoću teorema o reziduumima

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}\, \mathrm{d}x$$

gdje su a, $b > 0$.