MODERNA FIZIKA II

Kolokvij 6. 6. 2023.

ZADATAK 1 Tlak p i gustoća energije u zračenja crnog tijela povezani su relacijom

$$p = \frac{u}{3}$$

koja se može izvesti iz jednadžbe stanja fotonskog plina i termodinamike. Izračunajte:
(a) tlak zbog zračenja crnog tijela koje dolazi iz jezgre Sunca gdje je temperatura oko $1{,}6 \cdot 10^7$ K.
(b) temperaturu potpuno ionizirane vodikove plazme masene gustoće $\rho = 0{,}1\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$, na kojoj je tlak zračenja crnog tijela jednak tlaku zbog gibanja čestica plazme. Na dovoljno visokim temperaturama možemo uzeti da plazma zadovoljava jednadžbu idealnog plina $p = nk_BT$.
***Uputa*:** pod (b), primijetite da je $n = 4n'$ u potpuno ioniziranoj plazmi, gdje je n gustoća zbog protona i elektrona, a n' gustoća molekula vodika H_2 . U masenu gustoću ulaze samo protoni jer elektroni imaju zanemarivu masu u odnosu na elektrone.

ZADATAK 2 (a) Atom s dvije energijske razine E_1 i E_2 ($E_1 < E_2$) postavljen je u rezonantnu šupljinu lasera i nalazi se u toplinskoj ravnoteži sa zračenjem crnog tijela unutar šupljine na temperaturi T.
(a) Promatrajmo višu energijsku razinu i pretpostavimo da je brzina promjene naseljenosti zbog stimulirane emisije jednaka brzini promjene nasljenosti zbog spontane emisije. Pokažite da je u tom slučaju ispunjen uvjet

$$k_BT = \frac{\hbar\omega_{21}}{\ln 2}$$

gdje je $\hbar\omega_{21} = E_2 - E_1$.
(b) Ako su ostvareni uvjeti pod (a), koliki je omjer populacija po stanju za višu N_2/g_2 i nižu razinu N_1/g_1?
***Uputa*:** pod (b), koristite lasersku jednadžbu za brzinu promjene populacije na višoj razini

$$\frac{dN_2}{dt} = N_1B_{12}\rho(\omega_{21}) - N_2B_{21}\rho(\omega_{21}) - N_2A_{21}$$

u stacionarnom stanju ($dN_2/dt = 0$).

ZADATAK 3 Proton kinetičke energije $T = 1{,}5$ MeV uhvaćen je u deuteron ^{2}H (deuteron je jezgra deuterija) pri čemu nastaje ^{3}He. Nađite energiju pobuđenja formirane jezgre u jedinicama MeV. Masa mirovanja za proton glasi $m_\mathrm{p} = 1{,}007276$ u, za deuteron $m_\mathrm{D} = 2{,}013553$ u, a za ^{3}He glasi $m_\mathrm{He} = 3{,}016029$ u.

ZADATAK 4 Točkasti radioaktivni izvor aktivnosti 18 mCi emitira dva γ-kvanta energija 0,80 MeV i 1,00 MeV po raspadu. Zanemarite apsorpciju kvanata u zraku te nađite minimalnu udaljenost od izvora pri kojoj je ekspozicijska doza zračenja po jediničnom vremenu P jednaka dozvoljenoj dozi za vrijeme 36-satnog radnog tjedna, $0{,}78\ \mu\mathrm{R \cdot s^{-1}}$. Koeficijent apsorpcije γ-kvanata za zrak pri energiji 0,80 MeV iznosi $\tau_z = 3{,}72 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{cm^{-1}}$, a za energije 1,00 MeV iznosi $\tau_z' = 3{,}57 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{cm^{-1}}$.
***Uputa*:** koristite jednadžbu (6.12) iz Pregleda formula. Pretvorba jedinica: 1 curie = 1 Ci = $3{,}7 \cdot 10^{10}$ Bq te 1 röntgen = 1 R = $6{,}77 \cdot 10^4\ \mathrm{MeV \cdot cm^{-3}}$ u zraku.

ZADATAK 5 Čestica Σ^+-hiperon s impulsom $p_\Sigma = 900$ MeV/c raspada se tijekom gibanja u pozitivni pion (π-mezon) i neutralnu česticu. Pion je izbačen s impulsom $p_\pi = 200$ MeV/c pod kutom $\theta = 60°$ u odnosu na početni smjer gibanja hiperona. Nađite:
(a) masu neutralne čestice. Možete li procijeniti o kojoj se čestici radi?
(b) Q-vrijednost ovog raspada.

1.

(a) $p = \frac{u}{3}$, $M = \frac{c}{4} u$ $\Bigg\}$

$T = 1{,}6 \cdot 10^7\,K$

$p = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sigma}{c} T^4$

$p = 1{,}65 \cdot 10^4\,GPa$ //

(b) Za idealni plin vrijedi

$$p = n k_B T$$

gdje n gustoća čestica, odnosno, gustoća u kojoj su 2 protona i 2 elektrona oko je vodik potpuno ioniziran. Gustoći ρ koja je zadana u zadatku doprinose samo protoni. Ako je broj molekula vodika N'

$$m = N' \cdot m_p \cdot 2$$

gdje je m_p masa protona, a 2 se javlja zbog 2 protona. Prema tome, nakon dijeljenja s V

$$\frac{m}{V} = \rho = 2 m_p \cdot \frac{N'}{V} = 2 m_p n'$$

Molekulana masa vodika je

$$M = 2 m_p \cdot N_A$$

Ukupna gustoća je

$$n = 4n' = 4 \cdot \frac{\rho}{2 m_p} = 4 \cdot \frac{\rho N_A}{M}$$

Prema tome, za $\rho = 100\,kgm^{-3}$

$$p = 4 \frac{\rho N_A}{M} k_B T = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sigma}{c} T^4$$

$$T = \sqrt[3]{3 \cdot \frac{\rho c N_A k_B}{M \sigma}} = 1{,}875 \cdot 10^7\,K$$ //

NAPOMENA: jednadžbu stanja za zračenje crnog tijela dobijamo iz

$$u = \frac{4}{c}\sigma T^4 \ ; \quad u = \frac{U}{V}$$

$$U = \frac{4\sigma}{c} V T^4 = a V T^4 \ , \quad a = \frac{4\sigma}{c}$$

Iz 1. jednadžbe za unutrašnju energiju

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$$

$$a T^4 = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$$

Pretpostavimo li rješenje u obliku

$$p = b(V)\cdot T^4$$

imamo

$$a T^4 = T\cdot 4\cdot b(V)\cdot T^3 - b T^4$$

$$a = 4b(V) - b = 3b$$

$$\Rightarrow b(V) = \frac{a}{3} = \frac{4\sigma}{3c} \quad \text{(ne ovisi o } V\text{)}$$

Odavde je

$$p = \frac{4\sigma}{3c} T^4 = \frac{u}{3}$$

Z3

(a) Iz uvjeta zadatka je

$$B_{21} N_2 \rho_B(\omega_{21}) = A_{21} N_2$$

$$\rho_B(\omega_{21}) = \frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{\hbar \omega_{21}^3}{\pi^2 c^3} \qquad (*)$$

Planckov zakon

$$\rho_B(\omega_{21}) = \frac{\hbar \omega_{21}^3}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{1}{e^{\hbar\omega_{21}/k_B T} - 1}$$

Iz (*) slijedi

$$\frac{1}{e^{\hbar\omega_{21}/k_B T} - 1} = 1$$

$$1 = e^{\hbar\omega_{21}/k_B T} - 1$$

$$e^{\hbar\omega_{21}/k_B T} = 2$$

slijedi

$$\boxed{k_B T = \frac{\hbar \omega_{21}}{\ln 2}}$$

(b)

(i) $\nu_{21} = 50 \text{ MHz} = 50 \cdot 10^6 \text{ Hz}$

$$T = \frac{h \nu_{21}}{k_B \ln 2} = 3{,}46 \cdot 10^{-3} \text{ K}$$

$$E = 2{,}98 \cdot 10^{-7} \text{ eV}$$

(ii) $\nu_{21} = 1 \text{ GHz} = 10^9 \text{ Hz}$

$$T = 6{,}92 \cdot 10^{-2} \text{ K}$$

$$E = 5{,}97 \cdot 10^{-6} \text{ eV}$$

(iii) $\lambda = 500\,nm = 5\cdot 10^{-7}$

$$T = \frac{h}{k_B \ln 2} \cdot \frac{c}{\lambda} = 41\,514\ K$$

$$E = 3{,}58\ eV$$

(iv) $h\nu = 1\ KeV = 10^{3}\ eV = 1{,}6\cdot 10^{-16}\ J$

$$T = \frac{h\nu}{k_B \ln 2} = 1{,}67\cdot 10^{7}\ K$$

$$E = 1442{,}7\ eV$$

(c)

$$\frac{dN_2}{dt} = N_1 B_{12}\, \rho_B(\omega_{21}) - 2 N_2 A_{21}$$

ako su ostvareni uvjeti pod (a)

Znamo da vrijedi

$$g_1 B_{12} = g_2 B_{21}$$

pa je u stacionarnom stanju $(dN_2/dt = 0)$

$$N_1 \cdot \frac{g_2}{g_1} B_{21}\, \rho(\omega_{21}) - 2 N_2 A_{21} = 0$$

Iz

$$B_{21}\, \rho_B(\omega_{21}) = A_{21}$$

imamo

$$N_1 \frac{g_2}{g_1} = 2 N_2$$

Odavdje,

$$\boxed{\frac{N_2/g_2}{N_1/g_1} = \frac{1}{2}}$$

$\boxed{5.4}$

$K = 1{,}5$ MeV (kinetička energija protona)

Nuklearnu reakciju možemo prikazati kao

$$p + {}^2H \rightarrow {}^3He$$

Oznake:

m_p masa protona; $K_p = K$ kinetička energija; $\vec{p}_p$ impuls

m_D masa deuterona; $K_D = 0$; $\vec{p}_D = 0$

m_{He} masa helija; K_{He} kinetička energija; p_{He} impuls

Zakon očuvanja impulsa

$$p_p = p_{He}$$

jer se gibaju po pravcu. Zakon očuvanja energije

$$K + m_p c^2 + m_D c^2 = m_{He} c^2 + K_{He} + \Delta E$$

gdje je ΔE energija pobuđenja. Odavdje je

$$\Delta E = K + Q - K_{He}$$

gdje Q- vrijednost

$$Q = (m_p + m_D - m_{He}) c^2$$

Zbog

$$\left.\begin{aligned} K_{He} &= \frac{p_{He}^2}{2m_{He}} = \frac{p_p^2}{2m_{He}} \\ K &= \frac{p_p^2}{2m_p} \end{aligned}\right\} \quad K_{He} = \frac{m_p}{m_{He}} K$$

Odavdje

$$\Delta E = T\left(1 - \frac{m_p}{m_{He}}\right) + Q$$

$$\frac{m_p}{m_{He}} \simeq \frac{1}{3}$$

$$\Delta E = \frac{2}{3} T + Q$$

Računamo Q-vrijednost ove reakcije

$$Q = (m_p + m_D - m_{He})\, c^2$$

$$= (1{,}007\,276 + 2{,}013\,553 - 3{,}016\,029)\, u\, c^2$$

$$= 7{,}16 \cdot 10^{-13}\, J$$

$$= 4{,}47 \cdot 10^{6}\, eV = 4{,}47\ MeV$$

$$\Delta E = \frac{2}{3} \cdot 1{,}5 + 4{,}47 = 5{,}47\ MeV$$

$\boxed{4.}$

$A = 18\ mCi = 18 \cdot 10^{-3} \cdot 3{,}77 \cdot 10^{10}\ Bq$

$E = 0{,}8\ MeV$

$E' = 1\ MeV$

$P_D = 0{,}78\ \mu R s^{-1} = 0{,}76 \cdot 10^{-6} \cdot 6{,}77 \cdot 10^{4}\ MeV\ cm^{-3}$

$\tau_z = 3{,}72 \cdot 10^{-5}\ cm^{-1}\ (0{,}8\ MeV)$

$\tau_z' = 3{,}57 \cdot 10^{-5}\ cm^{-1}\ (1{,}0\ MeV)$

$$P_D = \frac{A}{4\pi r_0^2}\left(\tau_z \cdot E + \tau_z' \cdot E'\right)$$

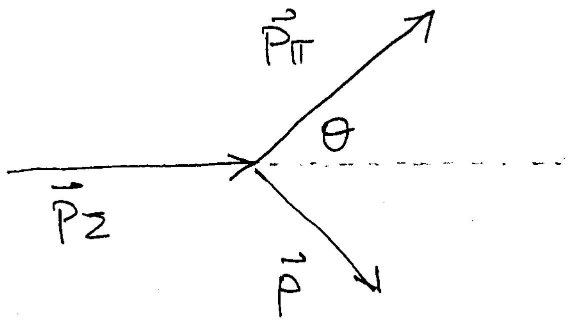
$$r_0 = \sqrt{\frac{A}{4\pi P_D}\left(\tau_z E + \tau_z' \cdot E'\right)} = \underline{\underline{2{,}59\ m}}$$

5.

$p_\Sigma = 900$ MeV/c $\qquad m_\Sigma c^2 = 1189$ MeV

$p_\pi = 200$ MeV/c $\qquad m_\pi c^2 = 140$ MeV

$\theta = 60°$ $\qquad$ iz tablica!



Zakon očuvanja impulsa

$$x: \quad p_\Sigma = p_\pi \cos\theta + p_x$$

$$y: \quad 0 = p_\pi \sin\theta + p_y$$

Odavde:

$$p_x = p_\Sigma - p_\pi \cos\theta$$

$$p_y = - p_\pi \sin\theta$$

i

$$\vec{p}^{\,2} = p_x^2 + p_y^2 = (p_\Sigma - p_\pi \cos\theta)^2 + p_\pi^2 \sin^2\theta$$

Zakon očuvanja energije

$$E_\Sigma = E_\pi + E$$

gdje je

$$E_\Sigma = \sqrt{p_\Sigma^2 c^2 + m_\Sigma^2 c^4}$$

$$E_\pi = \sqrt{p_\pi^2 c^2 + m_\pi^2 c^4}$$

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

Imamo

$$(E_\Sigma - E_\pi)^2 = E^2$$

$$\left(\sqrt{p_\Sigma^2c^2 + m_\Sigma^2c^4} - \sqrt{p_\pi^2c^2 + m_\pi^2c^4}\right)^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

Ovo možemo još malo srediti:

$$\underline{p_\Sigma^2}c^2 + m_\Sigma^2c^4 + \underline{p_\pi^2}c^2 + m_\pi^2c^4 - 2\sqrt{(p_\Sigma^2c^2 + m_\Sigma^2c^4)} \cdot \sqrt{(p_\pi^2c^2 + m_\pi^2c^4)}$$

$$= \underbrace{(p_\Sigma - p_\pi\cos\theta)^2}_{p_\Sigma^2 - 2p_\Sigma p_\pi\cos\theta + p_\pi^2\cos^2\theta} c^2 + p_\pi^2\sin^2\theta\, c^2 + m^2c^4$$

$$= (\underline{p_\Sigma^2} + \underline{p_\pi^2} - 2p_\Sigma p_\pi\cos\theta)c^2 + m^2c^4$$

Imamo:

$$m_\Sigma^2c^4 + m_\pi^2c^4 - 2\sqrt{(p_\Sigma^2c^2 + m_\Sigma^2c^4)(p_\pi^2c^2 + m_\pi^2c^4)}$$

$$= m^2c^4 - 2p_\Sigma p_\pi\cos\theta\, c^2 \qquad (*)$$

Iz (*) je

$$m^2c^4 = m_\Sigma^2c^4 + m_\pi^2c^4 + 2p_\Sigma p_\pi\cos\theta\, c^2 - 2\sqrt{(p_\Sigma^2c^2 + m_\Sigma^2c^4)(p_\pi^2c^2 + m_\pi^2c^4)}$$

$$m^2c^4 = 1189^2 + 140^2 + 2\cdot 900\cdot 200 \cos 60°$$
$$- 2\sqrt{(900^2+1189^2)(200^2+140^2)}$$
$$= 885217{,}2\ (\mathrm{MeV})^2$$

$mc^2 = 940{,}86$ MeV neutron!

(b)

Q-vrijednost

$$Q = (m_Z - m_\pi - m)c^2$$
$$= 108{,}14 \text{ MeV}$$