

NAPREDNA ELEKTRODINAMIKA

Prvi kolokvij 2. 11. 2023.

ZADATAK 1 Sferne ljuska sastoji se od dvije koncentrične i vodljive sfere na polumjerima a i b ($a < b$). Sfera polumjera a je na potencijalu

$$\Phi(a, \theta, \phi) = V(\theta, \phi) = V_0 (\cos \phi \sin \theta + \cos \theta)$$

Sfera polumjera b je na potencijalu jednakom nuli. Upotrijebite Greenovu funkciju za sfernu ljusku da nađete potencijal između sfera.

Uputa: Greenova funkcija za sfernu ljusku omeđenu sferama $r = a$ i $r = b$ glasi

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)}{(2l+1) \left[1 - (a/b)^{2l+1} \right]} \left(r_{<}^l - \frac{a^{2l+1}}{r_{<}^{l+1}} \right) \left(\frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right)$$

Izrazite $\cos \phi \cos \theta$ i $\cos \theta$ u potencijalu $V(\theta, \phi)$ pomoću sfernih harmonika.

ZADATAK 2 (a) Počevši od izraza za Lorentzovu silu

$$\frac{d\mathbf{P}_{\text{mech}}}{dt} = \int_V (\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) d^3r$$

gdje je \mathbf{P}_{mech} ukupni impuls čestica u volumenu V , pokažite da je u dipolnoj aproksimaciji sila koja djeluje na neutralni atom u mirovanju jednaka

$$\frac{d\mathbf{P}_{\text{mech}}}{dt} = (\mathbf{d} \cdot \nabla) \mathbf{E} + \dot{\mathbf{d}} \times \mathbf{B}$$

gdje je \mathbf{d} atomski dipolni moment, a \mathbf{E} i \mathbf{B} su električno i magnetsko polje na položaju atoma.

(b) Za ravni val frekvencije ω koji se širi u nemagnetskom dielektriku niske gustoće s indeksom loma $n(\omega)$, pokažite da je brzina promjene mehaničkog impulsa po volumenu \mathbf{g}_{mech} povezana s elektromagnetskim impulsom \mathbf{g}_{em} ravnog vala kroz relaciju

$$\frac{d\mathbf{g}_{\text{mech}}}{dt} = \frac{1}{2} (n^2 - 1) \frac{d\mathbf{g}_{\text{em}}}{dt}$$

gdje je $\mathbf{g}_{\text{em}} = (1/c^2) \mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

Uputa: pod (a), koristite izraz za efektivnu gustoću naboja koja odgovara dipolu momenta $\mathbf{p}(t)$ na položaju \mathbf{r}_0

$$\rho_{\text{eff}}(\mathbf{r}) = -\mathbf{p} \cdot \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

te efektivnu gustoću struje

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \dot{\mathbf{p}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$