

# NAPREDNA ELEKTRODINAMIKA

Drugi kolokvij 7. 12. 2023.

**ZADATAK 1** Kao posljedicu zakona očuvanja impulsa za sustav naboja i polja, može se izvesti formula za silu na volumen  $V$

$$\mathbf{F} = \int_V \left( \nabla \cdot \ddot{\mathbf{T}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} \right) d^3r$$

Upotrijebit ćemo ovu formulu da pronađemo vremenski prosjek sile na svaku stranicu rezonantne šupljine oblika kvadra. Šupljina je definirana nejednakostima  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq a$  i  $0 \leq z \leq h$ , a stranice šupljine su savršeni vodiči. Pretpostavite da unutar šupljine polje titra u pobuđenom modu u kojem je

$$E_x = E_y = B_z = 0$$

$$E_z = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{-i\omega t}$$

- Uvrstite polje u valnu jednadžbu za polje  $\mathbf{E}$  i nađite frekvenciju  $\omega$  ovog moda.
- Pomoću Faradayevog zakona, pronađite magnetsko polje  $\mathbf{B}$ .
- Kakve su sile na stranice  $x = 0$  i  $x = a$ , na primjer, ako ukupna sila na šupljinu mora biti jednaka nuli?
- Pokažite da je vremenski prosjek derivacije Poyntingova vektora  $\langle \partial \mathbf{S} / \partial t \rangle = 0$  te transformirajte izraz za vremenski prosjek sile pomoću teorema o divergenciji u plošni integral.
- Iskoristite rezultat pod (d) i pronađite prosjek sile na stranice  $x = 0$ ,  $y = 0$  i  $z = 0$ .

**ZADATAK 2** Počevši od izraza za ukupnu energiju proizvoljne superpozicije ravnih elektromagnetskih valova u vakuumu, pokažite da je ukupan broj fotona  $N$  dan integralom

$$N = \frac{\epsilon_0}{4\pi^2 \hbar c} \int_V d^3r \int_V d^3r' \left[ \frac{\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', t) + c^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right]$$

Broj fotona za svaki ravni val valnog vektora  $\mathbf{k}$  i polarizacije  $\mathbf{e}_\lambda$  definiran je kao energija tog vala podijeljena s  $\hbar c k$ .

**Uputa:** izrazi za ravne valove dani su formulama 7.8 i 7.11 u knjizi od Jacksona

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{B} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t}$$

$$\mathcal{B} = \sqrt{\mu \epsilon} \mathbf{n} \times \mathcal{E}$$

gdje je  $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$ , a gustoća energije EM polja glasi

$$u = \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \right)$$