

# NAPREDNA KVANTNA MEHANIKA

Pismeni ispit 18. 2. 2022.

**ZADATAK 1** Čestica mase  $m$  giba se u 1D pod utjecajem potencijala  $V(x) = -\gamma x$ . U trenutku  $t = 0$  čestica je u stanju  $|a\rangle$  koje je normalizirano.

(a) Napišite Heisenbergove jednadžbe gibanja za impuls  $p(t)$  i koordinatu  $x(t)$  te ih riješite. Pretpostavite da su vrijednosti operatora u  $t = 0$  jednake  $x_0$  i  $p_0$ .

(b) Izračunajte prosječne vrijednosti  $\langle a|p(t)|a\rangle$  i  $\langle a|x(t)|a\rangle$  ako su prosječne vrijednosti ovih operatora u  $t = 0$  jednake  $\langle x_0\rangle$  i  $\langle p_0\rangle$ .

(c) Izračunajte neodređenosti  $\sigma_x(t)$  i  $\sigma_p(t)$  i usporedite ih s onima za slobodnu česticu ( $\gamma \rightarrow 0$ ).

**ZADATAK 2** Neka je  $f(\rho)$  analitička funkcija operatora gustoće  $\rho$ . Pokažite da je za općenito mješovito stanje, izraz

$$[f(\rho)] = \text{tr}(\rho f)$$

konstantan u vremenu tako da iskoristite činjenicu da se operator gustoće mijenja u vremenu kao

$$\rho(t) = U(t, t_0)\rho(t_0)U^\dagger(t, t_0)$$

**ZADATAK 3** Razmotrimo raspršenje čestice na odbojnom potencijalu

$$V(r) = \begin{cases} V_0, & r < a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

Upotrijebite amplitudu raspršenja u eikonalnoj aproksimaciji te optički teorem

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{4\pi}{k} \text{Im}[f(\theta = 0)]$$

da izračunate totalni udarni presjek za raspršenje na potencijalu  $V(r)$ .

**ZADATAK 4** Hamiltonijan za sustav bozona ima oblik

$$H = \sum_{\mathbf{k}} T(\mathbf{k}) a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \lambda \sum_{\mathbf{l}} \sum_{\mathbf{m}} V(\mathbf{l} + \mathbf{m}) a_{\mathbf{l}}^\dagger a_{-\mathbf{l}} a_{\mathbf{m}} a_{-\mathbf{m}}$$

gdje je  $\lambda$  konstanta, a  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{l}$  i  $\mathbf{m}$  su valni vektori. Pokažite da je operator broja čestica

$$N = \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}$$

konstanta gibanja.