

NAPREDNA KVANTNA MEHANIKA

Prvi kolokvij 23. 11. 2023.

ZADATAK 1 Neki autori definiraju da je operator A *realan* ako je svaki matrični element $\langle b' | A | b'' \rangle$ u nekoj reprezentaciji $\{|b'\rangle\}$ realan broj. Je li taj koncept neovisan o reprezentaciji, odnosno, da li matrični elementi ostaju realni ukoliko promijenimo reprezentaciju? Provjerite vaš odgovor pomoću matrica operatora projekcije spina S_x i S_z za spin $1/2$.

ZADATAK 2 Razmotrite elektron u atomu na kojeg djeluje potencijal oblika konačne sferne potencijalne jame

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & r < r_0 \\ 0, & r > r_0 \end{cases}$$

gdje je $V_0 > 0$. Neka je elektron u osnovnom stanju ovakvog atoma.

(a) Nađite rješenje radijalne jednadžbe za sfernu jamu u kojoj je elektron u osnovnom stanju ($l = 0$). Pri tome uvedite

$$k_1^2 \equiv \frac{2m(V_0 - |E_0|)}{\hbar^2}, \quad k_2^2 \equiv \frac{2m|E_0|}{\hbar^2}$$

gdje je $E_0 = -|E_0|$ poznata energija osnovnog stanja i vrijedi $0 < |E_0| < V_0$.

(b) Uključimo malu $H' = \text{const}$. neovisnu o vremenu t i vektoru položaja \mathbf{r} . Upotrijebite Fermijevo zlatno pravilo i izračunajte vjerojatnost po jediničnom vremenu da elektron izađe slobodan iz jame.

ZADATAK 3 Čestica mase m giba se po jednoj od dvije putanje u vremenu i prostoru koje povezuju dvije točke A i B s koordinatama $(x_A, t_A) = (0, 0)$ i $(x_B, t_B) = (D, T)$. Jedna od putanja je kvadratna po vremenu, $x_1(t) = at^2/2$, gdje je a konstanta. Druga putanja je linearna po vremenu, $x_2(t) = vt$, gdje je v konstanta. Pretpostavimo da je *točna* klasična putanja $x_1(t)$.

(a) Iskoristite vaše znanje iz elementarne mehanike da izrazite konstante a i v pomoću D i T .

(b) Upotrijebite Newtonov zakon da pokažete da je potencijalna energija

$$V(x) = -\frac{2mD}{T^2}x$$

(c) Za svaku od putanja $x_1(t)$ i $x_2(t)$ izrazite klasičnu akciju

$$S[x(t)] = \int_0^T \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) \right) dt$$

pomoću m , D i T .

(d) Potvrdite da je $S_1 \equiv S[x_1(t)] < S_2 \equiv S[x_2(t)]$ te nađite $\Delta S = S_2 - S_1$.

(e) Izračunajte numerički $\Delta S/\hbar$ za česticu koja prijeđe put od 1 mm za vrijeme 1 ms u dva slučaja: u prvom se radi o nanočestici sastavljenoj od 100 atoma ugljika, a u drugom slučaju je riječ o elektronu. U kojem slučaju se može reći da je gibanje kvantno-mehaničko i zašto?