SVEUČILIŠTE U RIJECI, FAKULTET ZA FIZIKU

Dipl. stud. Fizika i matematika Dipl. stud. Fizika i informatika Dipl. stud. Fizika i filozofija

Ak. god. 2021./2022.

OSNOVE KVANTNE MEHANIKE

Treći kolokvij   9. 6. 2022.

ZADATAK 1   Upotrijebite varijacijski račun za procjenu energije osnovnog stanja čestice mase m koja se giba u jednodimenzijskom potencijalu $V(x) = V_0 x^4$. Za probnu funkciju upotrijebite:

$$\psi_p(x) = Ae^{-\alpha x^2/2}$$

gdje je A normalizacijska konstanta, a parametar $\alpha > 0$ je varijacijski parametar.
***Uputa*:** koristite integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{4\alpha^{5/2}}$$

ZADATAK 2   Izračunajte diferencijalni udarni presjek u prvoj Bornovoj aproksimaciji za raspršenje čestice mase m na privlačnom potencijalu oblika

$$V(r) = \begin{cases} -V_0\,, & r < a, \\ 0\,, & r > a. \end{cases}$$

gdje je $V_0 > 0$.

ZADATAK 3   Izračunajte energiju osnovnog stanja u prvom redu računa smetnje za nedegenerirana stanja za česticu mase m koja se giba u 1D beskonačnoj potencijalnoj jami širine L, gdje je jedan rub na $x = 0$, a drugi $x = L$ ako je uključena slaba smetnja oblika

$$H' = \lambda x^2$$

gdje je λ pozitivna i realna konstanta.

$\boxed{1.}$

Nađimo najprije normalizacijsku konstantu

$$\underbrace{|A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\alpha x^2}}_{|A|^2 \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}} = 1 \quad \Rightarrow |A|^2 = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$$

Varijacijski izraz

$$E(\alpha) = \langle H \rangle = \langle T \rangle + \langle V \rangle$$

$$\langle T \rangle = -\frac{\hbar^2 |A|^2}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\alpha x^2/2} \frac{d^2}{dx^2} e^{-\alpha x^2/2}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} e^{-\alpha x^2/2} = \frac{d}{dx}\left[e^{-\alpha x^2/2} \cdot (-\alpha x) \right]$$

$$= e^{-\alpha x^2/2} \cdot \alpha^2 x^2 - \alpha\, e^{-\alpha x^2/2}$$

$$\langle T \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\alpha x^2} \cdot \alpha^2 x^2 + \frac{\hbar^2}{2m} |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\alpha x^2} \cdot \alpha$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} |A|^2 \cdot \Big[\underbrace{\alpha^2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2 \cdot \alpha^{3/2}} - \alpha \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}}_{-\frac{1}{2}\sqrt{\pi\alpha}} \Big]$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \sqrt{\pi\alpha}$$

$$= \frac{\hbar^2 \alpha}{4m}$$

$$\langle V\rangle = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} V_0 x^4 \, dx = |A|^2 \cdot V_0 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} x^4 \, dx}_{\frac{3\sqrt{\pi}}{4\alpha^{5/2}}}$$

$$= \frac{3V_0}{4\alpha^2}$$

Varijacijski izraz postaje

$$E(\alpha) = \frac{\hbar^2 \alpha}{4m} + \frac{3V_0}{4\alpha^2}$$

Minimum

$$\frac{dE}{d\alpha} = \frac{\hbar^2}{4m} + \frac{3V_0}{4} \cdot (-2) \cdot \alpha^{-3} = 0$$

$$\frac{\hbar^2}{4m} = \frac{3V_0}{2} \alpha^{-3}$$

$$\alpha_0^3 = \frac{6V_0 m}{\hbar^2} \Rightarrow \alpha_0 = \left(\frac{6V_0 m}{\hbar^2}\right)^{1/3}$$

Procjena energije osnovnog stanja

$$E(\alpha_0) = \frac{\hbar^2}{4m} \cdot \left(\frac{6V_0 m}{\hbar^2}\right)^{1/3} + \frac{3V_0}{4} \cdot \left(\frac{\hbar^2}{6V_0 m}\right)^{2/3}$$

$$= \left(\frac{V_0 \hbar^4}{m^2}\right)^{1/3} \cdot \left(\frac{6^{1/3}}{4} + \underbrace{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6^{2/3}}}_{\frac{\cancel{3} \cdot 6^{1/3}}{4 \cdot \cancel{6}\, 2}}\right)$$

$$= \left(\frac{V_0 \hbar^4}{m^2}\right)^{1/3} \cdot \left(\frac{3 \cdot 6^{1/3}}{8}\right)$$

$\boxed{2.}$

Potencijal

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 \,; & r < a \\ 0 \,; & r > a \end{cases}$$

Bornova aproksimacija za amplitudu raspršenja glasi

$$f(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2 q} \int_0^\infty r \cdot V(r) \sin(qr)\, dr$$

$$= -\frac{2m}{\hbar^2 q} \cdot (-V_0) \underbrace{\int_0^a r \sin(qr)\, dr}_{\left. \frac{\sin qr}{q^2} - \frac{r \cos qr}{q} \right|_0^a}$$

$$f(\theta) = \frac{2mV_0}{\hbar^2 q} \cdot \left[\frac{\sin qa}{q^2} - \frac{a \cos(qa)}{q} \right]$$

Diferencijalni udarni presjek

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \frac{2m |V_0|^2 a^2}{\hbar^2 q^4} \left[\frac{\sin(qa)}{qa} - \cos(qa) \right]^{-2}$$

$\boxed{3.}$

Osnovno stanje za 1D beskonačnu potencijalnu jamu širine a

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right)$$

$$E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$$

Korekcija energije u prvom redu vremenski-neovisnog računa smetnje za nedegenerirana stanja.

$$E^{(1)} = \langle \psi_1 | H' | \psi_1 \rangle$$

$$= \lambda \frac{2}{a} \int_0^a \underbrace{dx\, x^2 \sin^2 \frac{\pi}{a} x}_{\frac{1}{2}\left[1-\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\right]}$$

$$\int_0^a dx\, x^2 \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\right) = \left\{ \frac{x^3}{3} - \left[\frac{2x \cdot a^2}{4\pi^2} \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right) - \left(\frac{x^2 \cdot a}{2\pi} - \frac{2 \cdot a^3}{(2\pi)^3}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \right] \right\}_0^a$$

$$= \frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2\pi^2}$$

$$E^{(1)} = \frac{\lambda}{a} \cdot \frac{a^3}{3}\left(1 - \frac{3}{2\pi^2}\right) = \frac{\lambda a^2}{3}\left(1 - \frac{3}{2\pi^2}\right)$$