SVEUČILIŠTE U RIJECI, FAKULTET ZA FIZIKU

Dipl. stud. Fizika i matematika Dipl. stud. Fizika i informatika Dipl. stud. Fizika i filozofija

Ak. god. 2021./2022.

OSNOVE KVANTNE MEHANIKE

Drugi kolokvij   19. 5. 2022.

ZADATAK 1 Promotrite sustav od dva elektrona koji su u kvantnom stanju sa suprotno orijentiranim z-komponentama spina. Izračunajte prosječnu vrijednost spina $\mathbf{S}^2$ u navedenom kvantnom stanju.

ZADATAK 2 (a) Izračunajte energije aksijalno simetričnog rotatora čiji je hamiltonijan zadan izrazom

$$H = \frac{L_x^2 + L_y^2}{2I_1} + \frac{L_z^2}{2I_2}$$

gdje su I_1 i I_2 momenti inercije rotatora.
(b) Kolika je degeneracija?
(c) Stavimo rotator u magnetsko polje $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$. Pretpostavimo da se u prvoj aproksimaciji rotator može opisati modelom magnetskog dipola $\boldsymbol{\mu}_L = (q/2m)\mathbf{L}$, gdje je q naboj, a m masa rotatora. Kolike su su sada energije i dokida li se degeneracija? Pojasnite na primjeru $l = 1$.
***Uputa*:** pod (a), prisjetite se da je $\mathbf{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$.

ZADATAK 3 Elektron u vodikovom atomu je u kvantnom stanju s glavnim kvantnim brojem $n = 2$ i orbitalnim kvantnim brojem $l = 1$. Izračunajte vjerojatnost da elektron nađemo dalje od jezgre nego što dopušta klasična mehanika, odnosno, u klasično nedozvoljenom području.
***Uputa*:** radijalna valna funkcija za stanje $n = 2$, $l = 1$ glasi

$$R_{21}(r) = \frac{1}{2\sqrt{6}} a_0^{-3/2} \left(\frac{r}{a_0} \right) e^{-r/2a_0}$$

ZADATAK 4 Razmotrite sustav od tri neinteragirajuće čestice koje se gibaju u 1D beskonačnoj potencijalnoj jami

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a \\ \infty, & \text{drugo} \end{cases}$$

(a) Odredite energiju osnovnog i prvog pobuđenog stanja za ovaj sustav ako se radi o identičnim fermionima spina 1/2.
(b) Usporedite energije pod (a) s odgovarajućim energijama čestica spina 0, ali iste mase koje možemo razlikovati.
(c) Napišite valne funkcije za osnovno i prvo pobuđeno stanje za čestice pod (a).

$\boxed{1.}$

Sustav je početno u stanju $|+-\rangle$, odnosno,

$$|m_1 = 1/2, m_2 = -1/2\rangle$$

Iz tablica, $1/2 \times 1/2$ imamo

$$|m_1 = 1/2, m_2 = -1/2\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, |j=1, m=0\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, |j=0, m=0\rangle$$

Vektori s desne strane daju jednakosti za operator za $\vec{S}^2$

$$\langle +-|\vec{S}^2|+-\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle j=1, m=0| + \langle j=0, m=0|\right)$$
$$\vec{S}^2\left(|j=1, m=0\rangle + |j=0, m=0\rangle\right)$$

$$\vec{S}^2 |j=1, m=0\rangle = j(j+1)\hbar^2 |j=1, m=0\rangle$$
$$= 2\hbar^2 |j=1, m=0$$

$$\vec{S}^2 |j=0, m=0\rangle = 0$$

Ostaje,

$$\langle +-|\vec{S}^2|+-\rangle = \frac{1}{2}\cdot 2\hbar^2 \left(\langle j=1, m=0| + \langle j=0, m=0|\right) \cdot |j=1, m=0\rangle$$

$$= \hbar^2 \cdot \Big(\underbrace{\langle j=1, m=0 | j=1, m=0\rangle}_{=1} + \underbrace{\langle j=0, m=0 | j=1, m=0\rangle}_{=0}$$

$$= \hbar^2$$

2.

(a) Napišimo hamiltonijan u obliku

$$H = \frac{1}{2J_1}\left(\vec{L}^2 - L_z^2\right) + \frac{1}{2J_2} L_z^2$$
$$= \frac{\vec{L}^2}{2J_1} + \frac{L_z^2}{2}\left(\frac{1}{J_2} - \frac{1}{J_1}\right)$$

Svojstvene funkcije su sferni harmonici $Y_e^m(\theta,\phi)$

$$H Y_e^m = \frac{1}{2J_1}\vec{L}^2 Y_e^m + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{J_2} - \frac{1}{J_1}\right) L_z^2 Y_e^m$$
$$= \frac{1}{2J_1}\cdot e(e+1)\hbar^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{J_2} - \frac{1}{J_1}\right) m^2\hbar^2$$
$$= E Y_e^m$$

Energije su jednake

$$E_{em} = \frac{1}{2J_1} e(e+1)\hbar^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{J_2} - \frac{1}{J_1}\right) m^2\hbar^2$$

(b) Za fiksni e, vrijednosti koje poprima m su

$$-e, -e+1, \dots, 0, 1, \dots, e$$

Ima ih ukupno $2e+1$ vrijednost. No, zbog m^2 koji se javlja u energiji

$$-e, e$$
$$-e+1, e-1$$
$$\vdots$$

imaju istu energiju. Prema tome, degeneracija je 2 jer e i m, te e i $-m$ imaju iste energije.

(c)

Hamiltonijan je sada

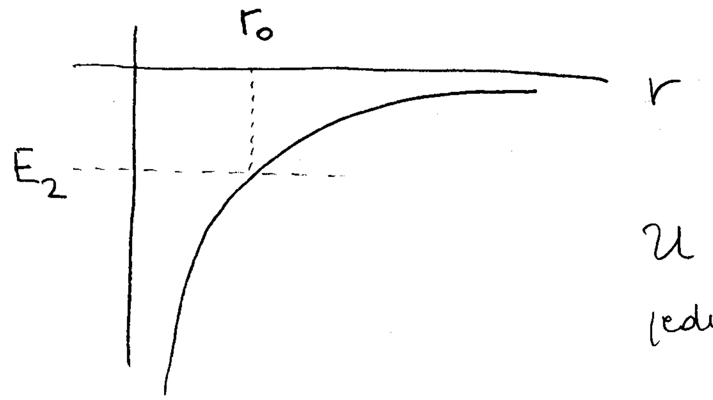
$$H = \frac{1}{2J_1}\vec{L}^2 + \frac{1}{2J_2} L_z^2 \left(\frac{1}{J_2} - \frac{1}{J_1}\right) - \underbrace{\vec{\mu}\cdot\vec{B}}_{\frac{2}{2m_0} L_z B}$$

Svojstvene funkcije su sferni harmonici, a energije

$$E_{lm} = \frac{1}{2J_1} l(l+1)\hbar^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{J_2} - \frac{1}{J_1}\right) m^2\hbar^2 - \frac{2}{2m_0} Bm$$

Vidimo da se sada degeneracija dokida jer m i $-m$ imaju različite energije

$\boxed{3.}$



U točki r_0 ukupna energija jednaka je potencijalnoj energiji

$$E_2 = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{1}{r_0}$$

gdje je

$$E_2 = -\frac{m_e}{2\hbar^2}\cdot\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2\cdot\frac{1}{4} \quad , \; n=2$$

Odavdje,

$$r_0 = 8\cdot\underbrace{\frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{e^2 m_e}}_{a_0} = 8a_0 .$$

a_0 je Bohrov polumjer.

Vjerojatnost

$$P = \int|\psi|^2 d^3r = \int_{r_0}^{\infty}\frac{dr\,r^2}{4\cdot 6}\,a_0^{-3}\cdot\left(\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-r/a_0}\cdot\underbrace{\int d\Omega\, Y_2^{1*}Y_2^1}_{=1}$$

$$= \frac{1}{24\cdot a_0^5}\int_{r_0}^{\infty} dr\,r^4 e^{-r/a_0}$$

Neodređeni integral

$$\int dr\,r^4 e^{-r/a_0} = -a_0 e^{-r/a_0}\cdot\left[24a_0^4 + 24a_0^3 r + 12a_0^2 r^2 + 4a_0 r^3 + r^4\right] + C$$

Uvrstimo granice: za $r\to\infty$, integral je nula. Za $r=r_0$

$$P = \frac{1}{24a_0^5}a_0 e^{-r_0/a_0}\cdot\left[24a_0^4 + 24a_0^3 r_0 + 12a_0^2 r_0^2 + 4a_0 r_0^3 + r_0^4\right]$$

Vjerojatnost postaje

$$P = \frac{1}{24a_0^4} e^{-8} \cdot \left[24a_0^4 + 24 \cdot a_0^3 \cdot 8 \cdot a_0 + 12a_0^2 \cdot 64a_0^2 + 4a_0 \cdot 512a_0^3 + 4096 \cdot a_0^4 \right]$$

$$= e^{-8} \cdot 297 = 0{,}0996 \simeq 0{,}1$$

Otprilike 10%

In[1]:= $\int r^4 * \mathrm{Exp}[-r / a]\, dr$

Out[1]= $-a\, e^{-\frac{r}{a}} \left(24\, a^4 + 24\, a^3\, r + 12\, a^2\, r^2 + 4\, a\, r^3 + r^4\right)$

$\boxed{4.}$

Energija čestice u beskonačnoj potencijalnoj jami

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2a^2} n^2$$

Valna funkcija je oblika

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$$

(a) Osnovno stanje za sustav fermiona: $n_1 = 1$; $n_2 = 1$; $n_3 = 2$

↑ E_2

↑↓ E_1

$$E_0 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2a^2} \left(\underbrace{1^2 + 1^2 + 2^2}_{6} \right) = \frac{6\hbar^2 \pi}{2 \cdot a^2}$$

Prvo pobuđeno stanje

↑↓ E_2

↑ E_1

$$E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2a^2} \left(1^2 + 2^2 + 2^2 \right) = \frac{9\hbar^2 \pi^2}{2a^2}$$

(b) Osnovno stanje za čestice spina 0 koje možemo razlikovati

E_2

••• E_1

$$E_0 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2a^2} \left(1^2 + 1^2 + 1^2 \right) = \frac{3\hbar^2 \pi}{2a^2}$$

Prvo pobuđeno stanje

• E_2

•• E_1

$$E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2a^2} \left(1^2 + 1^2 + 2^2 \right) = \frac{6\hbar^2 \pi^2}{2a^2}$$

(c)

Valna funkcija za osnovno stanje; postoje 4 različite konfiguracije za spinove; jedna moguća konfiguracija je

$$\psi_0(z_1,z_2,z_3) = \frac{1}{\sqrt{3!}} \begin{vmatrix} \psi_1(x_1)\chi_+ & \psi_1(x_2)\chi_+ & \psi_1(x_3)\chi_+ \\ \psi_1(x_1)\chi_- & \psi_1(x_2)\chi_- & \psi_1(x_3)\chi_- \\ \psi_2(x_1)\chi_+ & \psi_2(x_2)\chi_+ & \psi_2(x_3)\chi_- \end{vmatrix}$$

$z=(x,s)$

Pobuđeno stanje; postoje opet 4 različite konfiguracije

$$\psi_1(z_1,z_2,z_3) = \frac{1}{\sqrt{3!}} \begin{vmatrix} \psi_1(x_1)\chi_+ & \psi_1(x_2)\chi_- & \psi_1(x_3)\chi_- \\ \psi_2(x_1)\chi_+ & \psi_2(x_2)\chi_+ & \psi_2(x_3)\chi_+ \\ \psi_2(x_1)\chi_- & \psi_2(x_2)\chi_- & \psi_2(x_3)\chi_- \end{vmatrix}$$

Ovo je jedna mogućnost!