OSNOVE MATEMATIKE

Drugi kolokvij 2. 2. 2024.

ZADATAK 1 Pokažite da su izjave semantički jednake pomoću tablica istinitosti:

(a) $(A \Rightarrow B) \equiv (\neg B \Rightarrow \neg A)$

(b) $\neg(A \Rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$

ZADATAK 2 (a) Da li je točno

$$A \setminus B = C \Rightarrow A = B \bigcup C \ ?$$

(b) Da li je točno

$$A = B \bigcup C \Rightarrow A \setminus B = C \ ?$$

ZADATAK 3 Riješite sustav jednadžbi

$$x^{x-y} = y^{x+y}$$

$$\sqrt{x} \cdot y = 1$$

ZADATAK 4 Izračunajte

$$\log_{x/y} x$$

ako je

$$\log_{xy} x = 2$$

ZADATAK 5 Dokažite da vrijedi

$$\cos^3 \alpha \sin 3\alpha + \sin^3 \alpha \cos 3\alpha = \frac{3}{4} \sin 4\alpha$$

1.

(a)

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$A \Rightarrow B$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1

✓ ✓

(b)

A	B	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg(A \Rightarrow B)$	$A \wedge \neg B$
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0

✓ ✓

$\boxed{2.}$

(a) Treba provjeriti točnost izjave

$$A \setminus B = C \Rightarrow A = B \cup C$$

Neka je $x \in A$. Ako je $x \in A \setminus B = C$, tada $x \in C$ pa je $x \in B \cup C$, odnosno, $A \subset B \cup C$. Ako $x \notin A \setminus B$, tada je $x \in A \cap B \neq 0$ (jer je $x \in A$!) te vrijedi da je $x \in B$ i $x \in B \cup C$. Zaključak: $A \subset B \cup C$.

Neka je $x \in B \cup C$. Tada vrijedi $(x \in B) \vee (x \in C)$. Ako je $x \in B$, tada je $x \notin A \setminus B = C$, dakle, $x \notin C$ i $B \cap C \neq \phi$. Ako je $x \in A \cap B \neq \phi$, tada je $x \in A$ i $B \cup C \subset A$. Ako je $x \notin A \cap B$, tada $x \notin A$ i $x \in B$, te općenito <u>ne vrijedi</u> da je $B \cap C \subset A$. Ako je $x \in C$, tada $x \in A \setminus B$, i $x \in A$ i $x \notin B$. Prema tome, $B \cup C \subset A$.

Za $A \cap B \neq \phi$ gornja izjava, općenito, nije točna.

S druge strane, ako je $A \cap B = \phi$, tada $A \setminus B = A$, odnosno, $A = C$. Ako je $(B \neq \phi) \wedge (B \neq A)$ tada

$$A \subset B \cup A = B \cup C$$

ali općenito ne vrijedi da je

$$A = B \cup C$$

Sve skupa, tvrdnja $A \setminus B = C \Rightarrow A = B \cup C$ nije točna!

(b) Treba provjeriti točnost izjave

$$A = B \cup C \Rightarrow A \setminus B = C$$

Neka je $x \in A \setminus B$. Tada je $x \in A$ i $x \notin B$. Budući je $A = B \cup C$, tada $x \in C$. Slijedi $A \setminus B \subset C$.

Neka je $x \in C$. Tada je zbog $A = B \cup C$, $x \in A$. Jer je $A \cap B \neq \emptyset$ zbog $B \subset A$, tada može biti da je i $x \in B$. U tom slučaju $x \notin A \setminus B$ pa općenito, ne možemo tvrditi da je gornja tvrdnja točna.

$\boxed{3.}$

$$x^{x-y} = y^{x+y}$$
$$\sqrt{x}\, y = 1$$

Brojevi x i y su baze eksponencijalne funkcije pa vrijedi

$$(x>0) \wedge (y>0)$$

Iz druge jednadžbe je

$$y = x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow x = y^{-2}$$

uvrstimo u prvu

$$x^{x-x^{-\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{1}{2}(x+x^{-\frac{1}{2}})}$$

Budući su baze jednake slijedi

$$x - x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\left(x + x^{-\frac{1}{2}}\right)$$
$$2x - 2x^{-\frac{1}{2}} = -x - x^{-\frac{1}{2}}$$
$$x^{-\frac{1}{2}} - 3x = 0$$

Vratimo se na varijablu y

$$y - 3y^{-2} = 0$$
$$\frac{1}{y^2}\left(y^3 - 3\right) = 0$$

Budući je $y>0$, $y \neq 0$, rješenje glasi

$$y = \sqrt[3]{3}$$

a tada je

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$$

Jedno rješenje je

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}} , \sqrt[3]{3} \right)$$

Postoji još i $(1,1)$. Dakle, ukupno je rješenje

$$\left\{ (1,1), \left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}} , \sqrt[3]{3} \right) \right\}$$

Z 11

$$\log_{\frac{x}{y}} x = a \Rightarrow x = \left(\frac{x}{y}\right)^a$$

$$\log_{xy} x = 2 \Rightarrow x = (xy)^2 = x^2 y^2$$

$$\Rightarrow 1 = x y^2$$

$$x = \frac{1}{y^2}$$

Uvrstimo u $x = \left(\frac{x}{y}\right)^a$

$$y^{-2} = \left(y^{-3}\right)^a = y^{-3a}$$

Odavdje,

$$-2 = -3a \Rightarrow \boxed{a = \frac{2}{3}}$$

$\boxed{5.}$

$$\cos^3\alpha \sin 3\alpha + \sin^3\alpha \cos 3\alpha = \cos^2\alpha\,(\cos\alpha \sin 3\alpha) + \sin^2\alpha\,(\sin\alpha \cos 3\alpha)$$

$$= (1-\sin^2\alpha)\cos\alpha \sin 3\alpha + (1-\cos^2\alpha)\sin\alpha\cos 3\alpha$$

$$= -\sin^2\alpha\cos\alpha\sin 3\alpha - \cos^2\alpha\sin\alpha\cos 3\alpha + \underbrace{\cos\alpha\sin 3\alpha + \sin\alpha\cos 3\alpha}_{\sin 4\alpha}$$

$$= -\underbrace{\sin\alpha\cos\alpha}_{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}\left[\underbrace{\sin\alpha\sin 3\alpha + \cos\alpha\cos 3\alpha}_{\cos(3\alpha-\alpha)=\cos 2\alpha}\right] + \sin 4\alpha$$

$$= -\frac{1}{2}\underbrace{\sin 2\alpha\cos 2\alpha}_{\frac{1}{2}\sin 4\alpha} + \sin 4\alpha = -\frac{1}{4}\sin 4\alpha + \sin 4\alpha$$

$$= \frac{3}{4}\sin 4\alpha$$