SVEUČILIŠTE U RIJECI, ODJEL ZA FIZIKU

Preddiplomski studij Fizika **Ak. god. 2020./2021.**

OSNOVE MATEMATIKE

Pismeni ispit 5. 2. 2021.

1. Čestica se giba nejednoliko po pravcu, a ovisnost brzine o vremenu glasi:

$$v(t) = bt^4$$

gdje je konstanta $b = 1$ m·s^{-5} i $t \geq 0$. Koliki je put prošla čestica od $t = 0$ s do $t = 2$ s?

2. Ako za vektore $\vec{p}$, $\vec{q}$ i $\vec{r}$ vrijedi

$$\measuredangle(\vec{p},\vec{q}) = \measuredangle(\vec{r},\vec{p}\times\vec{q}) = \alpha \quad \text{i} \quad |\vec{p}|\cdot|\vec{q}|\cdot|\vec{r}| = 2$$

dokažite da je tada

$$(\vec{p}\times\vec{q})\cdot\vec{r} = \sin 2\alpha$$

3. Hiperbola

$$9x^2 - 16y^2 = 144$$

presječena je pramenom pravaca koji su paralelni s pravcem $y = x$. Pokažite da polovište svih tako dobivenih tetiva leži na jednom pravcu. Kako glasi jednadžba tog pravca?

4. Riješite jednadžbu

$$4\cdot 9^{x-1} = 3\sqrt{2^{2x+1}}$$

5. Dokažite da je

$$\tan\alpha + \tan(\alpha + 60°) + \tan(\alpha + 120°) = 3\tan 3\alpha$$

$\boxed{2.}$

$$s = \int_0^2 v(t)\,dt = 6 \int_0^2 t^4\,dt = \underset{\substack{\| \\ 1}}{6}\, \frac{t^5}{5}\Big/_0^2 = \frac{2^5}{5} - \frac{0^5}{5}$$

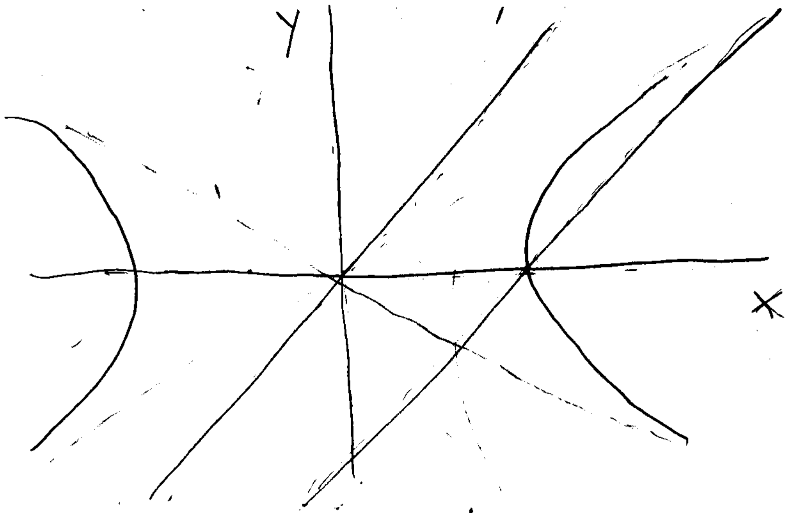
$$= \frac{32}{5}\ m = 6{,}4\ m$$

$\boxed{2.}$

$$(\vec{p}\times\vec{q})\cdot\vec{r} = |\vec{p}\times\vec{q}|\cdot|\vec{r}|\cos\alpha = \left(|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|\sin\alpha\right)|\vec{r}|\cos\alpha$$

$$= \underbrace{|\vec{p}||\vec{q}||\vec{r}|}_{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2\alpha = \sin 2\alpha$$

$\boxed{3.}$



Pramen pravaca paralelnih s $y = x$

$$y = x + a$$

Uvrstimo u elipsu

$$9x^2 - 16(x+a)^2 = 144$$

$$\underbrace{9x^2 - 16x^2} - 32ax - 16a^2 = 144$$

$$-7x^2 - 32ax - 16a^2 - 144 = 0$$

Rješenja:

$$x_{1,2} = \frac{1}{2 \cdot 7}\left(-32a \pm \sqrt{32^2 a^2 - 4 \cdot 7(16a^2 + 144)}\right)$$

$$= \frac{1}{14}\left(-32a \pm \sqrt{576(a^2 - 7)}\right)$$

$$= \frac{1}{14}\left(-32a \pm 24\sqrt{a^2 - 7}\right)$$

Napišemo li hiperbolu u obliku

$$\frac{x^2}{\frac{144}{9}} - \frac{y^2}{\frac{144}{16}} = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{144}{9} \Rightarrow a = \frac{12}{3} = 4$$

$$\Rightarrow b^2 = \frac{144}{16} \Rightarrow b = \frac{12}{4} = 3$$

Vidimo da su asimptote

$$y = \pm \frac{3}{4} x$$

i moraju imati koeficijent smjera od promene pravca

$y = x + a$. Iz rešenja presecišta vidimo da

$$a > \sqrt{7}$$

Polovišta su

$$x_p = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

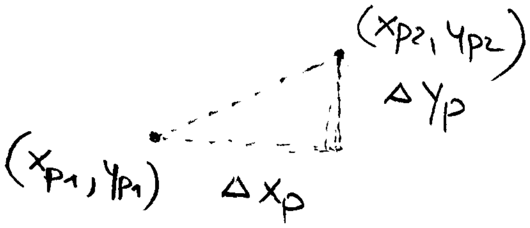
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{14} \cdot (-64a) = -\frac{16}{7}$$

$$y_p = x_p + a = -\frac{16}{7} a + a = -\frac{9}{7}$$

jer polovište također leži na pravcu. Razlika dva polovišta

$$\left.\begin{aligned} \Delta x_p &= -\frac{16}{7} \Delta a \\ \Delta y_p &= -\frac{9}{7} \Delta a \end{aligned}\right\} \quad \frac{\Delta y_p}{\Delta x_p} = \frac{9}{16}$$

Vidimo da je $\Delta y_p / \Delta x_p$ = konstanta, odnosno, leži na pravcu



Jednadžba

$$y - y_p = \frac{9}{16}(x - x_p) =$$

$$y + \frac{9}{7} = \frac{9}{16}\left(x + \frac{16}{7}\right)$$

$$\boxed{y = \frac{9}{16} x}$$

11.5 Eksponencijalne i logaritamske jednadžbe

Kod rješavanja jednadžbi s eksponencijalnim i logaritamskim funkcijama treba pripaziti je li rješenje u suprotnosti s dvije činjenice:

a) baza a za obje funkcije je $a > 0$ i $a \neq 1$

b) područje definicije logaritamske funkcije je R^+

PRIMJER 3

Riješite jednadžbe

$$4 \cdot 9^{x-1} = 3\sqrt{2^{2x+1}}$$

1. način: napišimo jednadžbu u obliku

$$2^2 \cdot 3^{2(x-1)} = 2^{\frac{2x+1}{2}} \cdot 3^1$$

Logično je zahtijevati da eksponenti uz iste baze na desnoj i lijevoj strani jednadžbe budu jednaki [jedinstvenost rastava na proste faktore]

$$2 = x + \frac{1}{2}$$

$$2x - 2 = 1$$

Obje jednadžbe imaju jedno rješenje: $\boxed{x = \frac{3}{2}}$

2. način: obje strane jednadžbe su pozitivne; logaritmirajmo s bazom 2

$$\log_2 4 + \log_2 9^{x-1} = \log_2 3 + \log_2 2^{(2x+1)/2}$$

$$2\underbrace{\log_2 2}_{=1} + (x-1)\log_2 9 = \log_2 3 + \frac{2x+1}{2}\underbrace{\log_2 2}_{=1}$$

$$2 + 2(x-1)\log_2 3 = \log_2 3 + x + \frac{1}{2}$$

$\boxed{5.}$

Raspišimo najprije $\tan 3\alpha$

$$\tan 3\alpha = \tan(2\alpha + \alpha) = \frac{\tan\alpha + \tan 2\alpha}{1 - \tan\alpha \tan 2\alpha}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

Imamo,

$$\tan 3\alpha = \frac{\tan\alpha + \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}}{1 - \tan\alpha \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}} = \frac{\tan\alpha - \tan^3\alpha + 2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha - 2\tan^2\alpha}$$

$$= \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}$$

Sada ćemo raspisati glavni izraz

$$\tan\alpha + \tan(\alpha + 60^\circ) + \tan(\alpha + 120^\circ) = \tan\alpha$$

$$+ \frac{\tan\alpha + \tan 60^\circ}{1 - \tan\alpha \tan 60^\circ} + \frac{\tan\alpha + \tan 120^\circ}{1 - \tan\alpha \tan 120^\circ}$$

$$= \tan\alpha + \frac{\tan\alpha + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}\tan\alpha} + \frac{\tan\alpha - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}\tan\alpha}$$

$$= \frac{\tan\alpha(1 - 3\tan^2\alpha) + (\tan\alpha + \sqrt{3})(1 + \sqrt{3}\tan\alpha) + (\tan\alpha - \sqrt{3})(1 - \sqrt{3}\tan\alpha)}{1 - 3\tan^2\alpha}$$

$$= \frac{3\tan\alpha - 3\tan^2\alpha + 6\tan\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha} \doteq 3\,\frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

$$= 3\tan 3\alpha$$