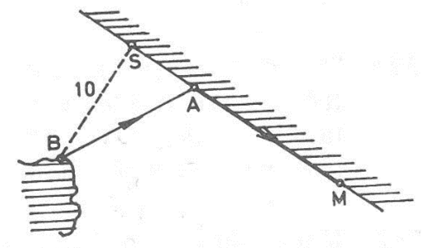
OSNOVE MATEMATIKE

Prvi kolokvij 18. 12. 2023.

ZADATAK 1 Putnik treba prijeći put od otoka Brača (B) do Makarske (M). Mjesto na Braču iz kojeg kreće na put udaljeno je od Splita (S) 10 km. Jadranska magistrala od Splita do Makarske prolazi neposredno uz obalu i približno je ravna s duljinom 30 km. Kut BSM je približno pravi kut. Putnik do točke A na obali putuje brodom brzinom 9 km·h^{-1}, a zatim od točke A do Makarske automobilom brzinom 80 km·h^{-1}.
(a) U kojoj točki A na magistrali se treba iskrcati s broda da put BAM prijeđe u najkraćem vremenu?
(b) Koliko traje takvo putovanje?



ZADATAK 2 Čestica se giba nejednoliko po pravcu, a ovisnost brzine o vremenu glasi:

$$v(t) = 2t^2 + 3t \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

Koliki je put prošla čestica od t = 2 s do t = 4 s?

ZADATAK 3 Zadan je vektor $\vec{a} = 3\vec{m} - 4\vec{n}$, gdje su $\vec{m}$ i $\vec{n}$ jedinični i međusobno ortogonalni vektori. Odredite vektor $\vec{b}$ u ravnini vektora $\vec{m}$ i $\vec{n}$ ako je $|\vec{b}| = 2|\vec{a}|$ i ako je $\vec{b}$ ortogonalan na $\vec{a}$.

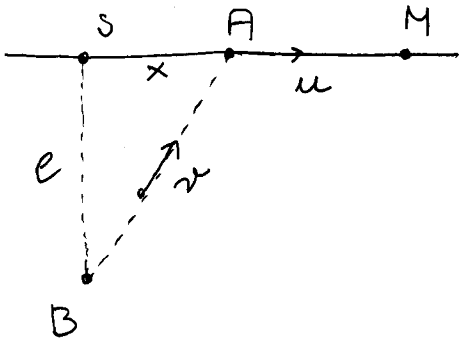
ZADATAK 4 Kako glasi jednadžba hiperbole ako ona prolazi točkama $T_1 = (5, 4)$ i $T_2 = (2, 1)$? Odredite duljine poluosi, žarišta te linearni i numerički ekscentricitet.

ZADATAK 5 Pokažite da je

$$r = \frac{1}{1 - \sin\phi}$$

polarna jednadžba parabole. Nađite poluparametar p. Skicirajte kako izgleda ova parabola; na primjer, odaberite kutove 0, $\pi/6$, $\pi/2$, $5\pi/6$, π.

$\boxed{1.}$



$d(B,S) = 10\text{ km} \equiv e$

$d(S,M) = 30\text{ km} \equiv s$

$d(S,A) = x$

$v = 9\text{ km h}^{-1}$

$u = 80\text{ km h}^{-1}$

Vrijeme od B do A

$$t_1 = \frac{d(B,A)}{v} = \frac{\sqrt{e^2+x^2}}{v}$$

Vrijeme od A do M

$$t_2 = \frac{d(A,M)}{u} = \frac{s-x}{u}$$

Ukupno vrijeme kao funkcija od x

$$t(x) = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{e^2+x^2}}{v} + \frac{s-x}{u}$$

Tražimo minimum ove funkcije: Stacionarna točka

$$\frac{dt}{dx} = 0$$

$$\frac{1}{v}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{e^2+x^2}} - \frac{1}{u} = 0$$

$$\frac{x^2}{e^2+x^2} = \frac{v^2}{u^2}$$

$$x^2 = \left(\frac{v}{u}\right)^2(e^2+x^2)$$

$$x^2\left(1-\left(\frac{v}{u}\right)^2\right) = \left(\frac{v}{u}\right)^2 e^2$$

$$x_0 = \frac{v\cdot e}{u}\cdot\frac{u}{\sqrt{u^2-v^2}}$$

$$= e\cdot\frac{v}{\sqrt{u^2-v^2}}$$

Prema tome,

$$x_0 = d(S,A) = 10 \cdot \frac{9}{\sqrt{80^2 - 9^2}} = 1{,}13\,\mathrm{km}$$

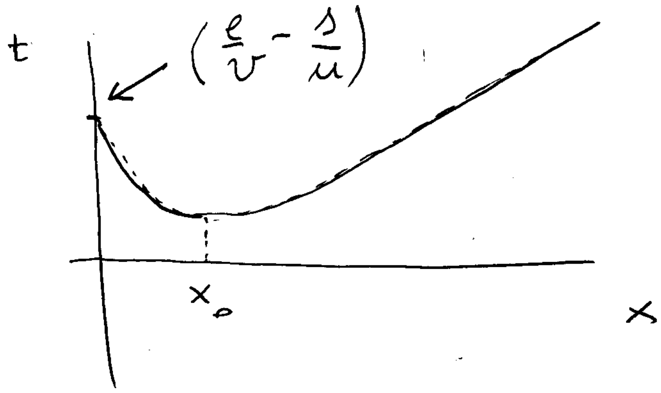
Je li to točka minimuma? Za $x \gg l, s$ imamo

$$t \sim \frac{x}{v} - \frac{x}{u} = \left(\frac{u-v}{uv}\right)x$$

što je pravac. Ako je $x \ll l, s$

$$t \sim \frac{l}{v} + \frac{s-x}{u} = \left(\frac{l}{v} + \frac{s}{u}\right) - \frac{1}{u}x$$

Opet pravac, ali s negativnim koeficijentom smjera. Prema tome



Očito, za x_0 dobijemo minimalno vrijeme.

Uvrstimo u $t(x)$

$$t(x_0) = \frac{\sqrt{l^2 + x_0^2}}{v} + \frac{s - x_0}{u} = \frac{\sqrt{10^2 + 1{,}13^2}}{9} + \frac{30 - 1{,}13}{80}$$

$$= 1{,}48\,h = 1\,h\ 29\,\mathrm{min}$$

$\boxed{2.}$

Prijeđeni put od 2s do 4s iznosi

$$s = \int_2^4 (2t^2+3t)\,dt = 2\cdot\frac{t^3}{3}\Big/_2^4 + 3\cdot\frac{t^2}{2}\Big/_2^4$$

$$= \frac{2}{3}(4^3-2^3) + \frac{3}{2}\cdot(4^2-2^2)$$

$$= \frac{2}{3}(64-8) + \frac{3}{2}\cdot(16-4)$$

$$= \frac{2}{3}\cdot 56 + \frac{3}{2}\cdot 12 = \frac{112}{3} + 18 = \frac{166}{3}\text{ cm}$$

$$= 55{,}33\text{ cm}$$

$\boxed{3.}$ Označimo traženi vektor $\vec{b}$ kao

$$\vec{b} = b_1 \vec{m} + b_2 \vec{n}$$

Prvi uvjet je da je $\vec{b}$ ortogonalan na $\vec{a}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow 3b_1 - 4b_2 = 0 \Rightarrow b_2 = \frac{3}{4} b_1$$

Drugi uvjet je da vrijedi

$$|\vec{b}|^2 = 4|\vec{a}|^2$$

$$b_1^2 + b_2^2 = 4 \cdot (9+16) = 100$$

Iz drugog uvjeta

$$b_1^2 + \underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^2}_{\frac{9}{16}} b_1^2 = 100$$

$$\frac{25}{16} b_1^2 = 100 \quad / : 25$$

$$b_1^2 = 4 \cdot 16 = 64$$

$$b_1 = \pm 8$$

$$b_2 = \frac{3}{4}(\pm 8) = \pm 6$$

Rješenje:

$$\vec{b}_1 = 8\vec{m} + 6\vec{n}$$

$$\vec{b}_2 = -8\vec{m} - 6\vec{n}$$

Jednadžba hiperbole glasi

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad / \, a^2 b^2$$

ili

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

Uvrstimo točke

1. $25b^2 - 16a^2 = a^2b^2$

2. $4b^2 - a^2 = a^2b^2$

Oduzmemo li ove jednadžbe

$$21b^2 - 15a^2 = 0$$

$$b^2 = \frac{5}{7}a^2$$

Uvrstimo u 2.

$$4\,\frac{5}{7}a^2 - a^2 = a^2b^2$$

$$\frac{13}{7}a^2 = a^2b^2 \Rightarrow b = \sqrt{\frac{13}{7}}$$

$$a = \sqrt{\frac{13}{5}}$$

Poluosi su $\sqrt{\frac{13}{5}}$ i $\sqrt{\frac{13}{7}}$. Jednadžba hiperbole glasi:

$$\frac{13}{7}x^2 - \frac{13}{5}y^2 = \frac{13}{7}\cdot\frac{13}{5} \quad / \cdot \frac{35}{13}$$

$$5x^2 - 7y^2 = 13$$

Linearni ekscentricitet hiperbole

$$e^2 = a^2 + b^2 = \frac{13}{5} + \frac{13}{7} = \frac{91+65}{35}$$

$$= \frac{156}{35}$$

$$e = \sqrt{\frac{156}{35}} \;;\quad \epsilon = \frac{e}{a} = \sqrt{\frac{156}{35}}\cdot\sqrt{\frac{5}{13}} = \sqrt{\frac{12}{7}}$$

$\boxed{5.}$

Zadanu polarnu jednadžbu krivulje možemo pisati u obliku

$$r = \frac{1}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)}$$

Odavdje usporedbom s

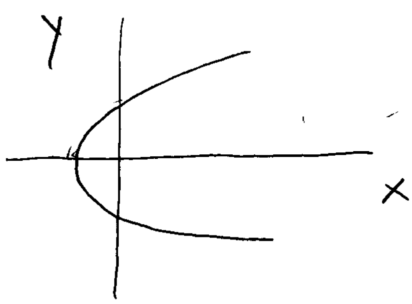
$$r(\phi) = \frac{p}{1 - \epsilon \cos(\phi - \phi_0)}$$

možemo pročitati da je

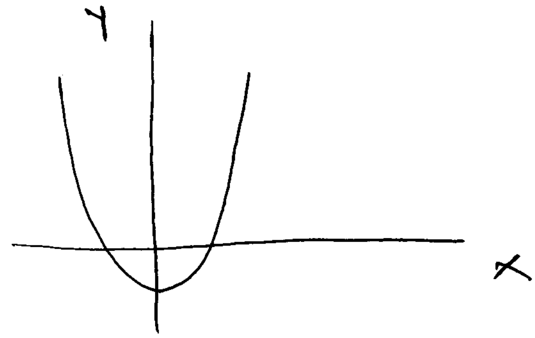
$$p = 1$$

$$\epsilon = 1 \quad (\text{parabola})$$

Također primjećujemo da parabola rotirana za kut $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$



$\phi_0 = 0$



$\phi_0 = \frac{\pi}{2}$

U to se možemo uvjeriti uvrstimo li zadane kutove

$\phi = 0 \Rightarrow r = 1$

$\phi = \pi/6 \Rightarrow r = 2$

$\phi = \pi/2 \Rightarrow r \to \infty$

$\phi = 5\pi/6 \Rightarrow r = 2$

$\phi = \pi \Rightarrow r = 1$

$\phi = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow r = \frac{1}{2}$