Glavne osi i stacionarne točke energije vrtnje krutog tijela

Velimir Labinac[1], Marko Jusup[2], Branka Milotić[1], Tarzan Legović[2]
[1] Odjel za fiziku, Sveučilište u Rijeci, Omladinska 14, 51000 Rijeka
[2] Institut ''Ruđer Bošković'', Bijenička 54, 10002 Zagreb

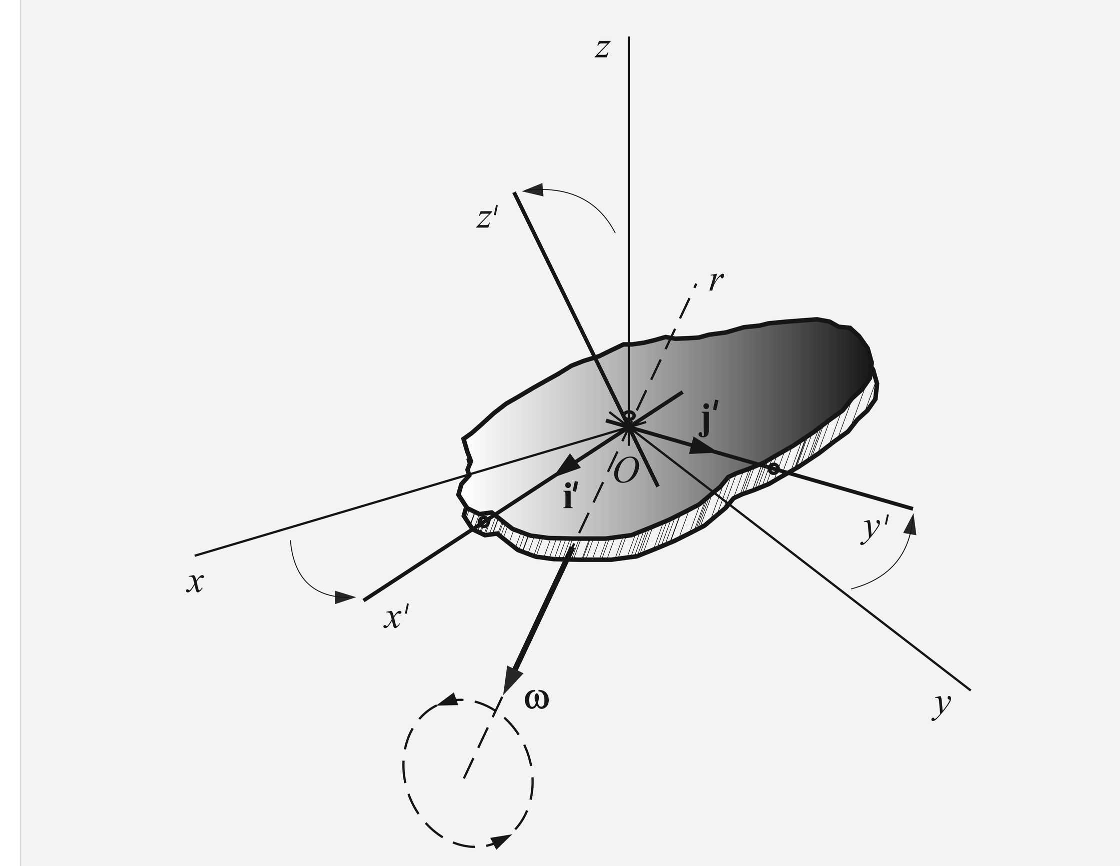
E-mail: velimir.labinac@ri.t-com.hr

SAŽETAK

Vrtnja krutog tijela je, zasigurno, jedna od najzahtjevnijih tematskih cjelina klasične mehanike u sveučilišnoj nastavi fizike. Od studenata se traži da povežu znanja iz linearne algebre, matematičke analize i osnova mehanike te ih primjene na razmatranje vrtnje u laboratorijskom i sustavu glavnih osi krutog tijela, na računske operacije s tenzorom tromosti, na vrtnju simetričnog zvrka, ...

Uobičajeni način na koji se glavne osi i glavni momenti tromosti uvode u nastavu klasične mehanike jest postupak dijagonalizacije tenzora tromosti. Iako efikasan, ovaj način ne pruža studentima dovoljnu motivaciju i ne daje fizikalni smisao , osim očitog razloga, a taj je jednostavniji račun.

Osmislili smo, zato, alternativni način obrade pojmova glavnih osi i glavnih momenata tromosti koji započinje pitanjem: oko koje osi moramo zavrtjeti nehomogeno i nesimetrično kruto tijelo do unaprijed zadane kutne brzine da obavimo najmanji rad. To nas pitanje nužno navodi na traženje minimuma kinetičke energije vrtnje, odnosno, na traženje stacionarnih točaka i ekstrema iste. Postupak smo ilustrirali na jednostavnom primjeru vrtnje tanke, nesimetrične i nehomogene ploče oko osi koji leži u ravnini ploče (2D model vrtnje). Kinetička energija vrtnje ploče dostiže svoj minimum ili maksimum ako se os vrtnje poklapa s jednom od glavnih osi ploče, a tada su minimalna ili maksimalna energije vrtnje upravo razmjerne glavnim momentima tromosti ploče.



Slika 11 Vrtnja tanke nesimetrične ploče oko osi koja leži u ravnini s pločom.

EKSTREMI KINETIČKE ENERGIJE VRTNJE

Kinetička energija vrtnje za tanku, nesimetričnu ploču sa slike 11 glasi:

$$T = \frac{1}{2} I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{xy}\omega_x\omega_y \qquad (1)$$

gdje su I_{xx} i I_{yy} momenti tromosti oko osi x i y, respektivno, I_{xy} je produkt tromosti, a ω_x i ω_y komponente kutne brzine ω.

Tražimo stacionarne točke izraza (1) uz uvjet

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 = \omega^2 = konst. \qquad (2)$$

Rezultat je

$$\omega_\pm = \frac{\omega}{\sqrt{2}}\left[1 \pm \frac{I_{xx} - I_{yy}}{\sqrt{4I_{xy}^2 + \left(I_{xx} - I_{yy}\right)^2}}\right]^{1/2} \qquad (3)$$

Uz pretpostavku $I_{xy} > 0$, fizikalno različiti parovi rješenja

$$\left\{(\omega_+, \omega_-), (-\omega_-, \omega_+)\right\} \qquad (4)$$

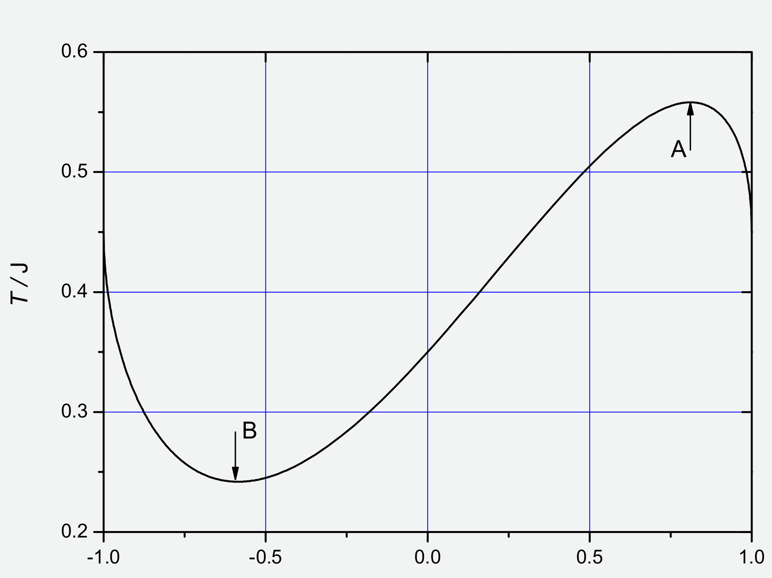
uvrštavanjem u (1) dat će kinetičke energije:

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{I_{xx} + I_{yy} + \sqrt{4I_{xy}^2 + \left(I_{xx} - I_{yy}\right)^2}}{2}\right)\omega^2 \qquad (5)$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{I_{xx} + I_{yy} - \sqrt{4I_{xy}^2 + \left(I_{xx} - I_{yy}\right)^2}}{2}\right)\omega^2 \qquad (6)$$

Izrazi u zagradama u kinetičkih energija (5) i (6) su glavni momenti tromosti, a parovi (4) daju smjerove glavnih osi tromosti.

Energije (5) i (6) predstavljaju maksimum i minimum izraza (1) uz uvjet (2). Na slici 12 prikazan je graf kinetičke energije (1) u kojeg je uvršten uvjet (2). Vrijednost energije u točki A odgovara izrazu (5), a u točka B izrazu (6).



Slika 12 Graf kinetičke energije vrtnje (1) za tanku, nehomogenu ploču na slici 11 pri čemu je korišten uvjet (2).

LITERATURA

[1] S. T. Thornton and J. B. Marion, Classical Dynamics of Particles and Systems, 5th ed. (Thomson Brooks/Cole, Belmont, CA, 2004).

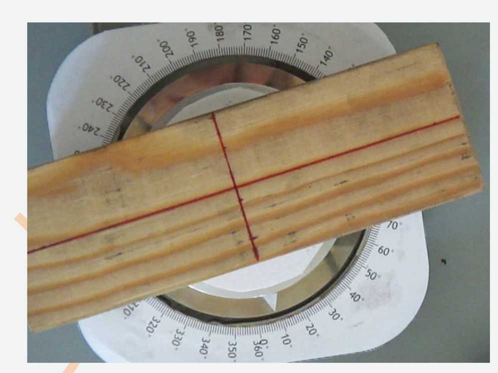
[2] V. Labinac, M. Jusup and T. Legović, "Stationary points of rigid body kinetic energy and principal axes of rotation," Am. J. Phys. (u recenziji).

POKUS

Kod svakoga krutog tijela možemo pronaći tri međusobno okomite osi za koje je matematički opis vrtnje najjednostavniji, a nazivaju se glavnim osima krutoga tijela. Kruto tijelo ''najlakše'' je zavrtjeti oko glavne osi. Drugim riječima, rad kojeg obavimo da zavrtimo kruto tijelo do određene kutne brzine bit će najmanji kada tijelo zavrtimo oko jedne od glavnih osiju. Slično, kod svakoga krutog tijela možemo pronaći glavnu os oko koje je ''najteže'' zavrtjeti tijelo do određene kutne brzine.

Kod simetričnih tijela, na primjer kvadra načinjenog od homogene tvari, glavne osi vrtnje podudaraju se s njegovim geometrijskim osima. U pokusu koji izvodimo i opisujemo, koristili smo drveni kvadar te ispitali oko koje osi ga je ''najlakše'', odnosno, najteže zavrtjeti. U tu svrhu postavili smo kvadar na kružnu ploču na koju je namotana nit, prebačena preko kolotura i povezana s utegom. Kvadar smo postavili u tri različita položaja tako da se os vrtnje podudara s geometrijskim osima kvadra. Video-kamerom snimali smo vrtnju ploče te smo iz snimljenog filma očitali kut i vrijeme. Iz dobivenih podataka izračunali smo kutnu akceleraciju. Podaci pokazuju očekivano: kvadar postiže unaprijed zadanu vrijednost kutne brzine uz najmanji utrošak energije onda kada se vrti oko osi s najmanjim momentom tromosti.

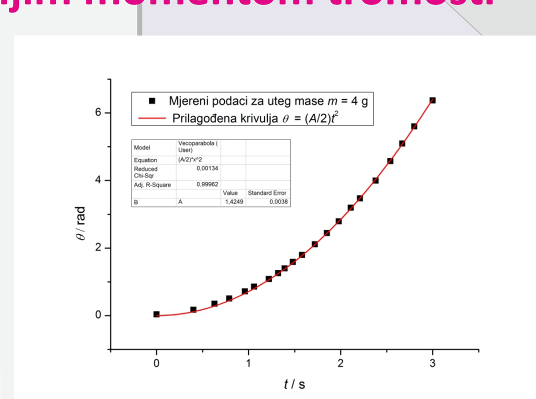
Slika 1 Postav uređaja za mjerenje kuta i vremena.



Slika 2

Vrtnja oko osi s najmanjim momentom tromosti

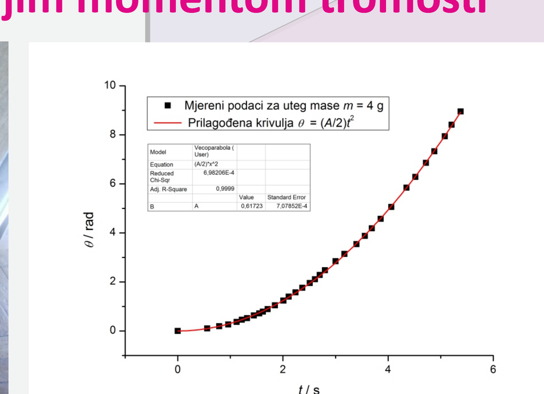
Slika 5



Slika 6 Iz prilagodbe, kutno ubrzanje je 1,42 s^{-2}.

Vrtnja oko osi sa srednjim momentom tromosti

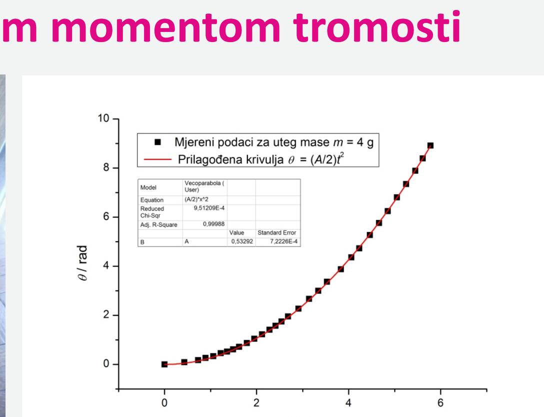
Slika 7



Slika 8 Iz prilagodbe, kutno ubrzanje je 0,62 s^{-2}.

Vrtnja oko osi s najvećim momentom tromosti

Slika 9



Slika 10 Iz prilagodbe, kutno ubrzanje je 0,53 s^{-2}.

METODA

Kruto tijelo postavimo na kružnu ploču tako da se os vrtnje, geometrijska os kružne ploče i os koja prolazi centrom mase tijela međusobno podudaraju. Na osovinu kružne ploče namotana je nit, prebačena preko kolotura i pričvršćena za uteg mase m (slika 4). Zbog djelovanja sile teže uteg će se početi gibati jednoliko ubrzano, a kružna ploča s tijelom ubrzano vrtjeti. Kutno ubrzanje za vrtnju sustava odredit ćemo pomoću zakona očuvanja energije

$$\frac{1}{2}(I_1 + I_0)\omega^2 + W_t = m\,g\,h$$

i formule $\omega^2 = 2\,\alpha\,\theta$.

I_1 - moment tromosti tijela oko osi vrtnje
I_0 - moment tromosti kružne ploče
ω - kutna brzina
W_t - rad sile trenja; pretpostavit ćemo da je $W_t = F_t\,h$, gdje je F_t sila trenja
m - masa utega
h - razlika visina koju uteg prijeđe prilikom spuštanja

REZULTATI

Mjerili smo ovisnost kuta o vremenu pri vrtnji drvenog kvadra oko njegovih triju geometrijskih osi. Vrtnju smo snimili video-kamerom i s filma precizno očitali kut θ i vrijeme t. Teorijsku krivulju

$$\theta = \frac{\alpha}{2}t^2$$

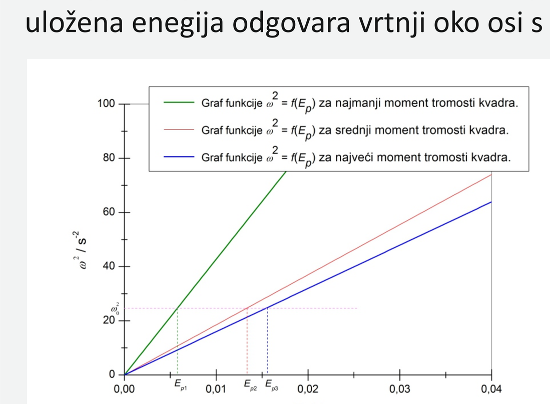
prilagodili smo dobivenim podacima te pomoću softwareskog paketa Originlab izračunali kutno ubrzanje α. Podaci i prilagođene krivulje prikazani su na slikama 6, 8 i 10.

ZAKLJUČAK

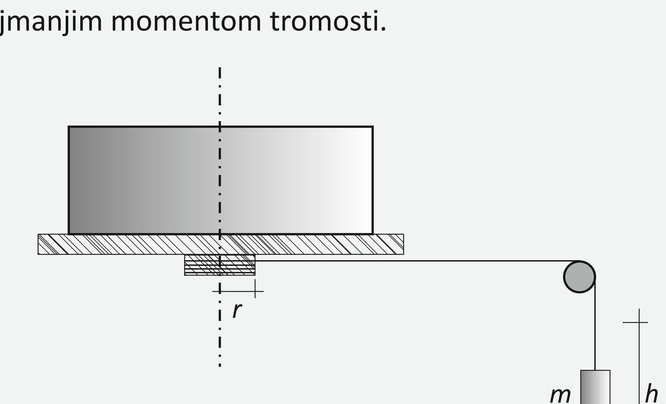
Grafovi funkcija

$$\omega^2 = \frac{2\,\alpha}{m\,g\,r}E_p$$

za različite vrijednosti kutnog ubrzanja koje odgovara različitim momentima tromosti drvenog kvadra prikazani su na slici 3. Na slici je označena proizvoljna kutna brzina i razlike potencijalnih energija utega koje su potrebne da se tijelo zavrti oko geometrijskih osi. Vidimo da najmanja uložena enegija odgovara vrtnji oko osi s najmanjim momentom tromosti.



Slika 3 Kvadrat kutne brzine kao funkcija pot. energije.



Slika 4 Shema mjernog uređaja.

Institut Ruđer Bošković
SVEUČILIŠTE U RIJECI
UNIVERSITY OF RIJEKA
ODJEL ZA FIZIKU
DEPARTMENT OF PHYSICS