RAZUMIJEVANJE I MATEMATIČKA RAZRADA METODE SLIKA U FIZICI

Velimir Labinac[1], Marko Jusup[2], Tarzan Legović[2]

[1] *Odjel za fiziku, Sveučilište u Rijeci, Omladinska 14, 51000 Rijeka*

[2] *Institut "Ruđer Bošković", Bijenička 54, 10002 Zagreb*

Sažetak

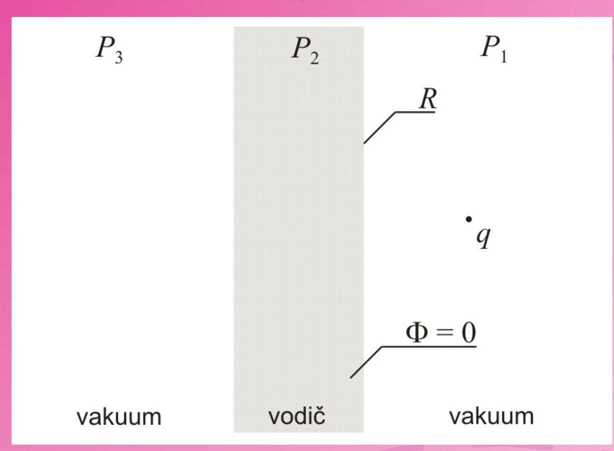
Metoda slika (MS) je postupak za proračun potencijala u rubnim zadaćama kod kojih rubne plohe najčešće imaju oblik ravnine, sfere ili cilindra. Unatoč jednostavnosti i intuitivnosti MS, studenti nerijetko iskazuju nerazumijevanje kao i poteškoće u primjeni.

U tom kontekstu, razmotrili smo probleme s kojima se studenti susreću vezano uz MS. Uzeli smo u obzir područja u kojem se MS najčešće koristi, te smo uzroke problema ilustrirali primjerima iz elektrostatike i magnetostatike.

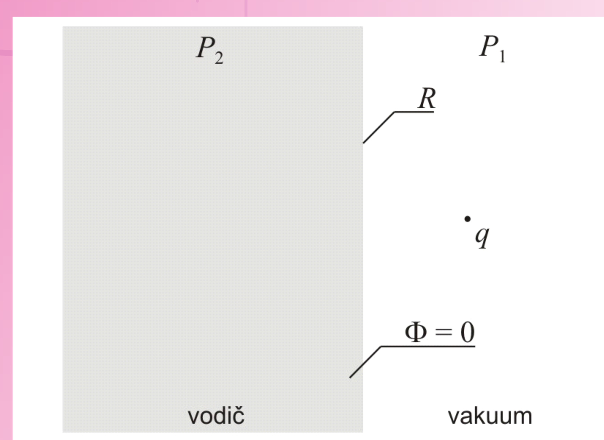
Pritom smo uobičajene primjere riješili na dva načina: metodom slika i razvojem potencijala u red po specijalnim funkcijama, što je rezultiralo usporednim prikazom koji jasno ističe prednosti MS. Ponudili smo mogući način za bolje tumačenje MS koji je, ustvari, matematička razrada rubne zadaće Poissonove jednadžbe. Razmotrili smo i mogućnosti korištenja MS pri rješavanju problema iz optike, akustike, termodinamike i hidrodinamike.

Primjer iz elektrostatike

Postavimo točkasti naboj q u blizinu uzemljene, metalne i pravokutne ploče. Ako je udaljenost naboja do ploče mnogo manja od udaljenosti naboja do rubova ploče, smijemo ploču konačnih dimenzija zamijeniti beskonačnom. Time smo prostor podijelili na tri dijela: P_1, P_2 i P_3 (Sl. 1).



Slika 1 Naboj pored metalne ploče u vakuumu.



Slika 2 Pojednostavljeni problem naboja i vodiča.

Računat ćemo električni potencijal $\Phi(\mathbf{r})$ u dijelu prostora P_1 koji sadrži naboj q. Potencijal u P_2 je poznat i iznosi $\Phi = 0$. Naime, električno polje unutar vodiča jednako je nuli, a potencijal ima konstantnu vrijednost. U zadatku kojeg rješavamo vodič je uzemljen, pa je po cijeloj njegovoj unutrašnjosti i rubovima vrijednost potencijala jednaka nuli [1].

Potencijal u području P_1 jednoznačno je određen Poissonovom jednadžbom

$$\nabla^2\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1}$$

i rubnim uvjetom $\Phi = 0$ po ravnini R koja razdvaja područje P_1 od P_2 [2]. U jednadžbi (1) je permitivnost vakuuma $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ F m^{-1}, a gustoća naboja $\rho(\mathbf{r})$ za točkasti naboj q iznosi

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r}-\mathbf{d}) \tag{2}$$

gdje je $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{d})$ Diracova delta funkcija [2], $\mathbf{r}$ vektor položaja točke u kojoj računamo ρ, a $\mathbf{d}$ vektor položaja naboja q. Za $\mathbf{r} \neq \mathbf{d}$ Poissonova jednadžba postaje Laplaceova $\nabla^2\Phi = 0$.

Iz navedene tvrdnje o jednoznačnosti rješenja za potencijal možemo zaključiti da mogući naboji i potencijali u P_3 uopće ne utječu na potencijal u P_1 sve dok je vodič u P_2 na potencijalu $\Phi = 0$. Ravninu koja razdvaja područja P_2 i P_3, zato, smijemo pomaknuti u beskonačnost (Sl. 2).

Metalna ploča spojena je veoma tankom žicom na udaljeno spremište velike količine naboja (na "zemlju") pa će naboj q privući na vodič dodatni naboj suprotnog predznaka. Uzmemo li da je q pozitivan, dovedeni inducirani naboj negativnog predznaka rasporedit će se isključivo po rubovima vodiča, odnosno, po ravnini R. Unutrašnjost vodiča ne sadrži dodatni naboj (iako sadrži elektrone i ione koji pripadaju vodiču) jer se dovedeni višak naboja brzo rasporedi po površini vodiča [3].

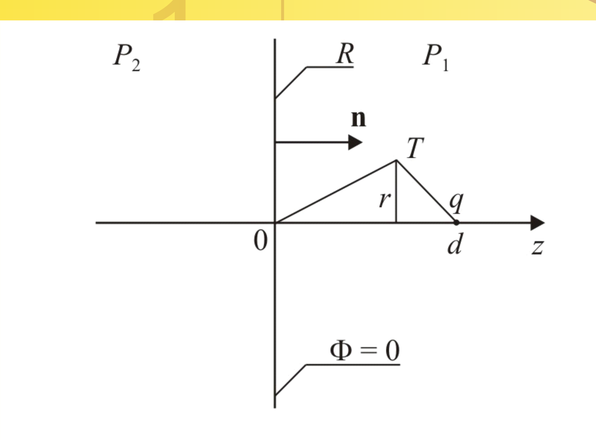
Ukupni električni potencijal Φ u području P_1 je superpozicija električnog potencijala $\Phi_q(\mathbf{r})$ i električnog potencijala $\Phi_\sigma(\mathbf{r})$ plošne gustoće induciranog naboja $\sigma(\mathbf{r})$ po ravnini R. Na drugoj strani, za izračun gustoće naboja σ potrebno je najprije naći ukupno električno polje $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi$ u području P_1 te koristiti rubni uvjet

$$\sigma = \varepsilon_0 \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\big|_R = -\varepsilon_0 \nabla\Phi\cdot\mathbf{n}\big|_R \tag{3}$$

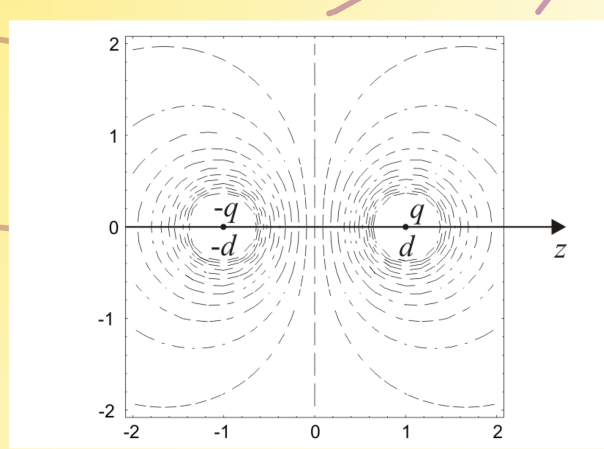
gdje je $\mathbf{n}$ normala na ravninu R usmjerena od P_2 prema P_1 [2]. Kako pronaći izlaz iz ovog zatvorenog kruga?

Rješavanje pomoću metode slika

Postavimo koordinatni sustav tako da se naboj q nalazi na osi z koja je okomita na ravninu R. Udaljenost naboja od ravnine je d, a ravnina R poklapa se s ravninom $z = 0$ (Sl. 3).



Slika 1 Uz matematičku formulaciju problema točkastog naboja blizu vodiča.



Slika 2 Ekvipotencijalne krivulje za naboje $+q$ i $-q$ po formuli (4). Koordinate $x = 0$, $r = y$ i z nacrtane su u jedinicama od d, a potencijal u jedinicama od $q/(4\pi\varepsilon_0 d)$.

Rješenje ove rubne zadaće pronaći ćemo metodom slika na sljedeći način: zamijenimo postojeći problem s novim, u kojemu se u poluprostoru $z < 0$ umjesto vodiča nalazi točkasti naboj $q' = -q$ na osi z. Naboj q' naziva se slika ili naboj slike za "pravi" naboj q i smješten je simetrično za q prema ravnini $z = 0$ na položaj $z' = -d$ (Sl. 4).

Zamjenu problema možemo opravdati činjenicom da je površina vodiča ekvipotencijalna ploha te je u našem slučaju ona ravninska i na potencijalu nula, kao i ekvipotencijalna ploha između naboja $+q$ i $-q$ (Sl. 4). Uz isti rubni uvjet, Poissonova jednadžba u oba problema daje isto rješenje za potencijal o čemu govori teorem o jedinstvenosti rješenja.

Rješenje za potencijal u poluprostoru $z > 0$ prema oznakama na Sl. 3 i Sl. 4 glasi

$$\Phi(r,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{r^2+(z-d)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2+(z-z')^2}}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+(z-d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2+(z+d)^2}}\right) \tag{4}$$

gdje je $r = (x^2+y^2)^{1/2}$, pa (4) zadovoljava Poissonovu jednadžbu i rubni uvjet $\Phi|_{z=0} = 0$.

Pomoću dobivenog izraza za potencijal (4), može se izračunati električno polje, plošna gustoća naboja po ravnini $z = 0$, sila između naboja q i ravnine te druge veličine.

No, većini studenata ovo sažeto objašnjenje, iako korektno, nije dovoljno da shvate MS. Pitanja koja studenti postavljaju i komentari koje daju su:

- Kako ću znati na koje položaje treba postaviti slike naboja?
- Kako ću znati koliko je slika potrebno?
- Kako ću rješavati probleme u kojima je rubna ploha složena, na primjer, od ravninske i sferne plohe?
- Kako ću upotrijebiti MS za dielektrike kojima rubne plohe nisu na konstatnim potencijalima?
- Metoda slika uopće mi nije jasna, ne vidim kako bih je naučio i njome riješio neki novi problem. Metoda se zasniva na intuiciji, a ne na provjerenim matematičkim tehnikama.

Na jedan dio pitanja, moguće je ponuditi zadovoljavajući odgovor: fizičari su riješili isti problem drugim, kompliciranijim tehnikama i onda uvidjeli da se postupak može pojednostaviti pomoću MS. Jedna od tehnika koja može poslužiti u svrhu "dokaza" je i razvoj potencijala u red po potpunom skupu ortogonalnih funkcija (specijalnih funkcija).

Rješavanje pomoću razvoja u red po specijalnim funkcijama

Odabir koordinata u kojima se rješava Poissonova ili Laplaceova jednadžba ovisi o obliku rubnih ploha. Pretpostavljamo da ćemo na taj način računski lakše zadovoljiti rubne uvjete ako je jednadžba rubne plohe zadana konstantnom vrijednošću koordinate (na primjer, $z = 0$ u zadatku kojeg rješavamo).

Kao rješenje Poissonove ili Laplaceove jednadžbe u različitim koordinatama, pojavit će se drugačije specijalne funkcije. Na primjer, kod sfernih koordinata javljaju se Kugline funkcije, a kod cilindričkih, Besselove funkcije.

Za problem točkastog naboja blizu beskonačne, uzemljene i vodljive ravne površine upotrijebit ćemo cilindričke koordinate (r, ϕ, z) i Besselove funkcije [4]. Točkasti naboj smjestili smo na os z, pa problem posjeduje azimutalnu simetriju. Potencijal, tada, ne ovisi o koordinati ϕ.

Ukupni potencijal u poluprostoru $z > 0$ tražimo kao superpoziciju potencijala točkastog naboja Φ_q i potencijala plošne gustoće induciranog naboja po ravnini Φ_σ. Oba potencijala razvijamo u red po Besselovim funkcijama $J_0(kr)$ koje tvore potpun i ortogonalan skup funkcija kod azimutalno-simetričnih problema [4]

$$\Phi(r,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{r^2+(z-d)^2}} + \Phi_\sigma = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty J_0(kr)\,\mathrm{e}^{-k|z-d|}\,\mathrm{d}k + \int_0^\infty A(k)J_0(kr)\,\mathrm{e}^{-kz}\,\mathrm{d}k \tag{5}$$

gdje su $A(k)$ funkcije ovisne o varijabli integracije k, a određuju se iz rubnog uvjeta $\Phi|_{z=0} = 0$

$$\begin{aligned}\Phi(r,0) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty J_0(kr)\mathrm{e}^{-kd}\,\mathrm{d}k + \int_0^\infty A(k)J_0(kr)\mathrm{d}k = \int_0^\infty J_0(kr)\left\{\frac{q\,\mathrm{e}^{-kd}}{4\pi\varepsilon_0} + A(k)\right\}\mathrm{d}k = 0\\ &\Rightarrow A(k) = -\frac{q\,\mathrm{e}^{-kd}}{4\pi\varepsilon_0}\end{aligned} \tag{6}$$

Posljednji korak u jednakosti (6) posljedica je linearne nezavisnosti Besselovih funkcija $J_0(kr)$. Uz dobivene funkcije $A(k)$, izraz za potencijal Φ_σ u poluprostoru $z > 0$ postaje

$$\Phi_\sigma = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty J_0(kr)\,\mathrm{e}^{-k(z+d)}\,\mathrm{d}k = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{r^2+(z+d)^2}} \tag{7}$$

što odgovara potencijalu naboja slike q'. Ukupni je potencijal identičan rezultatu dobivenom pomoću MS čime smo valjanost te metode pokazali točnim matematičkim računom.