SVEUČILIŠTE U RIJECI, FAKULTET ZA FIZIKU

Diplomski studij Inženjerstvo i fizika materijala

Ak. god. 2022./2023.

TEORIJSKA FIZIKA I PRIMJENE I

Drugi kolokvij 3. 3. 2023.

ZADATAK 1 Po kružnoj petlji polumjera R protječe struja I. Petlja je stavljena u xy ravninu tako da se središte petlje poklapa s ishodištem. Izračunajte magnetski vektorski potencijal za petlju po osi x.

ZADATAK 2 Struja I protječe beskonačnom ravnom žicom polumjera a.
(a) Ako je žica načinjena od materijala susceptibilnosti χ_m i struja je jednoliko raspodijeljena po presjeku vodiča, koliko je magnetsko polje na udaljenosti ρ od geometrijske osi vodiča?
(b) Nađite sve struje vezanog naboja kroz žicu. Kolika je ukupna struja vezanog naboja?

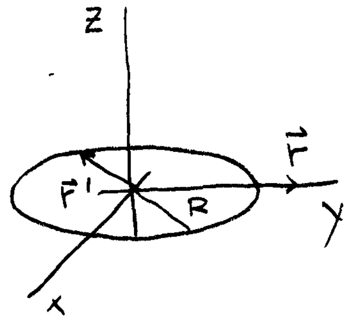
ZADATAK 3 Vodič oblika kvadratne petlje, duljine stranice a, postavljen je u prvi kvadrant xy ravnine tako da je jedan vrh petlje u ishodištu, a stranice leže na koordinatnim osima. U području s petljom postoji magnetsko polje $\mathbf{B}(y, t) = ky^2t^2\mathbf{e}_z$, gdje je k konstanta. Nađite elektromotornu silu koja se inducira u vodiču.

ZADATAK 4 Struja I protječe kroz žicu čiji je oblik zadan parametarskim jednadžbama

$$x(\lambda) = \frac{1+\lambda^4}{\left(1+\lambda^2\right)^2}, \quad y(\lambda) = \frac{2\lambda}{\left(1+\lambda^2\right)^{3/2}}, \quad z(\lambda) = \frac{2\lambda^3}{\left(1+\lambda^2\right)^2}$$

gdje parametar λ ima vrijednost $-\infty < \lambda < \infty$.
(a) Pokažite da se žica nalazi na sferi polumjera 1.
(b) Pokažite da je retardirani vektorski potencijal u ishodištu jednak retardiranom vektorskom potencijalu na beskonačnoj udaljenosti od žice. Kolika je ta vrijednost potencijala?

$\boxed{1.}$



$$\vec{r} = x\,\vec{e}_x$$

$$\vec{r}\,' = R\,\vec{e}_\varrho = R\,(\cos\phi'\,\vec{e}_x + \sin\phi'\,\vec{e}_y)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint \frac{I\,d\vec{l}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$|\vec{r}-\vec{r}\,'| = \sqrt{(x - R\cos\phi')^2 + R^2\sin^2\phi'}$$

$$= \sqrt{x^2 - 2R\cos\phi'\cdot x + \underbrace{R^2\cos^2\phi' + R^2\sin^2\phi'}_{R^2}}$$

$$= \sqrt{x^2 + R^2 - 2Rx\cos\phi'}$$

$$\vec{A}(x) = \frac{\mu_0 I R}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(-\sin\phi'\,\vec{e}_x + \cos\phi'\,\vec{e}_y)\,d\phi'}{(x^2 + R^2 - 2Rx\cos\phi')^{1/2}}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\phi'\,d\phi'}{(x^2+R^2-2Rx\cos\phi')^{1/2}} = [\,u = \phi' - \pi\,]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(u+\pi)\,du}{(x^2+R^2-2Rx\cos(u+\pi))^{1/2}} = -\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin u\,du}{(x^2+R^2+2Rx\cos u)^{1/2}}$$

$$= 0$$

jer je podintegralna funkcija neparna!

Ostaje

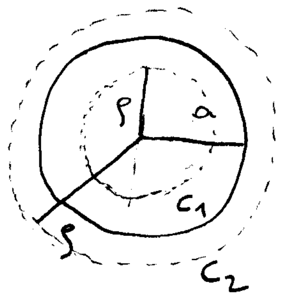
$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\phi' \, d\phi'}{(x^2+R^2-2Rx\cos\phi')^{1/2}}$$

Ovaj se integral može "riješiti", no rezultat nećemo stavljati u ovom obliku. Dakle,

$$\vec{A}(x) = \frac{\mu_0 I R \vec{e}_y}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\phi' \, d\phi'}{(x^2+R^2-2Rx\cos\phi')^{1/2}}$$

$\boxed{2.}$

(a)



Amperov zakon

$$\rho < a \; ; \quad \oint_{C_1} \underset{\sim}{\vec{H}\cdot d\vec{l}} = I(\rho)$$

$$H \cdot 2\pi\rho = I(\rho)$$

$I(\rho)$ je struja koja prolazi unutar kružnice C_1. Imamo

$$J = \frac{I}{a^2\pi} = \frac{I(\rho)}{\rho^2\pi} \Rightarrow I(\rho) = I\left(\frac{\rho}{a}\right)^2$$

Prema tome, za $\rho < a$

$$H \cdot 2\pi\rho = I\,\frac{\rho^2}{a^2} \Rightarrow H_1 = \frac{I}{2\pi a^2}\cdot\rho$$

Za $\rho > a$ kružnica C_2 obuhvaća cijelu struju I pa je

$$H_2 = \frac{I}{2\pi}\cdot\frac{1}{\rho}$$

Magnetno polje B je

$$\vec{B}_1 = \mu\vec{H}_1 = \frac{\mu_0(1+\chi_m)I}{2\pi a^2}\,\rho\,\vec{e}_\phi \quad ; \quad \rho < a$$

$$\vec{B}_2 = \mu_0\vec{H}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot\frac{1}{\rho}\,\vec{e}_\phi \; ; \quad \rho > a$$

(b) Magnetizacija $(\rho < a)$ je

$$\vec{M} = \chi_m\vec{H}_1 = \frac{\chi_m I}{2\pi a^2}\,\rho\,\vec{e}_\phi$$

Gustoća struje vezanog naboja

$$\vec{J}_m = \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

$$= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho M_\phi\right) = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\chi_m J}{2\pi a^2} \cdot 2\rho \, \vec{e}_z$$

$$= \frac{\chi_m J}{\pi a^2} \vec{e}_z$$

Plošna gustoća struje vezanog naboja

$$\vec{K}_m = \vec{M} \times \vec{n} \, , \quad \vec{n} = \vec{e}_\rho$$

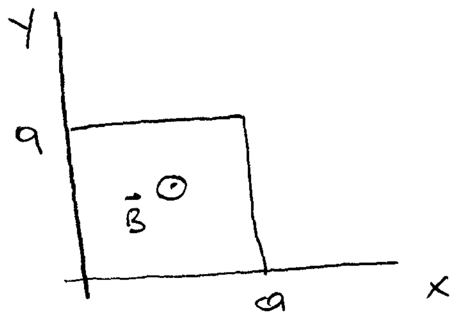
$$= \frac{\chi_m J}{2\pi a^2} \cdot a \, \underbrace{\vec{e}_\phi \times \vec{e}_\rho}_{-\vec{e}_z} = -\frac{\chi_m J}{2\pi a} \vec{e}_z$$

Izračunamo struju vezanog naboja

$$J = \int \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int \vec{K} \cdot d\vec{e}_1 = \frac{\chi_m J}{\pi a^2} \cdot a^2 \pi - \frac{\chi_m J}{2\pi a} \cdot 2\pi a$$

$$= 0$$

$\boxed{3.}$



Tok magnetskog polja kroz kvadratni okvir

$$\Phi = \int \underbrace{\vec{B}\cdot d\vec{S}}_{B\,dS} = \int_0^a dx \int_0^a dy\, B$$

$$= k t^2 a \cdot \int_0^a dy\, y^2$$

$$= k t^2 a \,\frac{a^3}{3} = \frac{k a^4}{3} t^2$$

Faradayev zakon : $\mathcal{E} = -\dfrac{d\Phi}{dt} = -\dfrac{2 k a^4}{3}\cdot t$

4.

(a) Treba pokazati da je

$$x^2+y^2+z^2=1$$

$$\frac{(1+\lambda^4)^2}{(1+\lambda^2)^2}+\frac{4\lambda^2}{(1+\lambda^2)^3}+\frac{4\lambda^6}{(1+\lambda^2)^4}=$$

$$=\frac{1}{(1+\lambda^2)^4}\left[(1+\lambda^4)^2+4\lambda^2(1+\lambda^2)+4\lambda^6\right]$$

$$=\frac{1}{(1+\lambda^2)^4}\left[1+2\lambda^4+\lambda^8+4\lambda^2+4\lambda^4+4\lambda^6\right]$$

$$(1+\lambda^2)^4=(1+2\lambda^2+\lambda^4)^2=\lambda^8+4\lambda^4+1+4\lambda^2+2\lambda^4+4\lambda^6$$

$$=\frac{1}{(1+\lambda^2)^4}(1+\lambda^2)^4=1$$

(b)

$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I(t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,d\vec{\ell}'$$

Tražimo li vektorski potencijal u ishodištu $\vec{r}=0$. Imamo

$$t_r=t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}=t-\frac{|r'|}{c}$$

No, $|\vec{r}'|=1$ jer se žica nalazi na sferi. Prema tome

$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I\left(t-\frac{1}{c}\right)}{1}\,d\vec{\ell}'=\frac{\mu_0}{4\pi}I\int d\vec{\ell}'$$

Za $r \to \pm\infty$ imamo

$$x \to 1;\ y \to 0;\ z \to 0$$

pa je žica zatvorena. Imamo

$$\oint d\vec{\ell} = 0 \Rightarrow \vec{A}(0) = 0$$

Za $|\vec{r}| \to \infty$ je potencijal jednak nuli jer se radi o lokaliziranoj raspodjeli struja; $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \to \frac{1}{r}$

$$\vec{A} \propto \frac{1}{r} \to 0$$

U ishodištu i u beskonačnosti je vrijednost vektorskog potencijala jednaka nuli.