SVEUČILIŠTE U RIJECI, FAKULTET ZA FIZIKU

Diplomski studij Inženjerstvo i fizika materijala

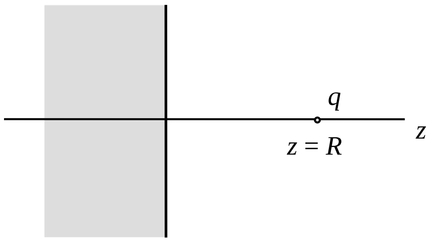
Ak. god. 2022./2023.

TEORIJSKA FIZIKA I PRIMJENE I

Prvi kolokvij 25. 11. 2022.

ZADATAK 1 Električno polje unutar beskonačno dugog cilindra radijusa R iznosi $\mathbf{E} = A\rho^2\mathbf{e}_\rho$, gdje je ρ udaljenost od osi cilindra u cilindričkim koordinatama, dok je A konstanta.
(a) Nađite prostornu gustoću naboja.
(b) Izračunajte električno polje izvan cilindra.

ZADATAK 2 Točkasti naboj q nalazi se na udaljenosti R od beskonačne vodljive ravnine koja je na potencijalu $\Phi = 0$.
(a) Nađite z-komponentu električnog polja u prostoru $z > 0$ upotrebom metode slika.
(b) Kolikom silom ravnina djeluje na naboj? Je li sila privlačna ili odbojna?



ZADATAK 3 Tanka sferna ljuska polumjera a je na potencijalu $V = V_0 \cos 2\theta$, gdje je V_0 konstanta. Odredite:
(a) potencijal unutar i izvan sfere
(b) gustoću naboja na ljusci.

ZADATAK 4 Feroelektrična kugla polumjera R kojoj se središte podudara s ishodištem koordinatnog sustava, ima polarizaciju $\mathbf{P} = k\mathbf{r} = kr\mathbf{e}_r$ gdje je k konstantna veličina. Nađite sav vezani naboj i provjerite da je njegova suma jednaka nuli.

1.

(a) Gustoću naboja izračunat ćemo pomoću

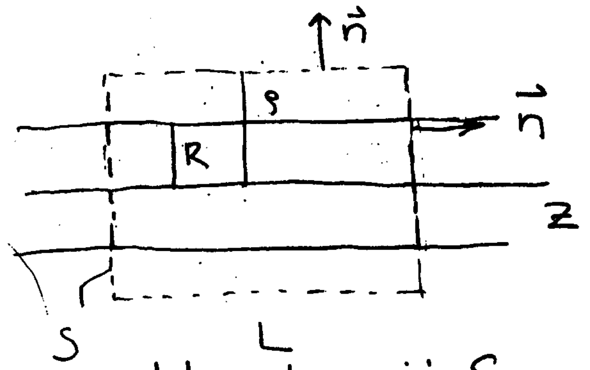
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho_e$$

Divergencija u cilindričnim koordinatama

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho E_\rho) + \frac{1}{\rho}\underbrace{\frac{\partial E_\phi}{\partial\phi}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial E_z}{\partial z}}_{=0}$$

$$\rho_e = \epsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \epsilon_0\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A\rho^2) = \epsilon_0\frac{1}{\rho}A\cdot 3\rho^2 = 3A\epsilon_0\rho \;;\; \rho\le R$$

(b)

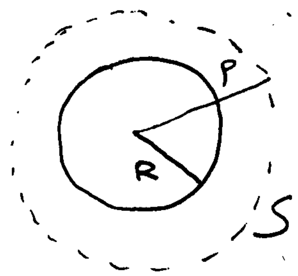


ploha integracije S

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0}Q$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{\text{baze}} + \int_{\text{plašt}}$$

Q je ukupni naboj ove razdiobe



$$Q = \int_V \rho_e\, dV = 3A\epsilon_0\int_0^R d\rho\,\rho\int_0^L dz\int_0^{2\pi}d\phi\,\rho$$

$$= 3\epsilon_0 A\, L\cdot 2\pi\cdot\frac{R^3}{3}$$

$$= 2\pi\epsilon_0 L A R^3$$

Električno polje ima radijalan smjer i ovisi samo o ρ što je posljedica azimutalne simetrije.

$$\vec{E} = E(\rho)\,\vec{e}_\rho$$

Za plohu integracije S odaberemo cilindričnu plohu duljine L i polumjera ρ. Naboj unutar plohe S je Q. Po bazama je

$$\vec{E}\cdot\vec{n} = E\,\vec{e}_\rho\cdot(\pm\vec{e}_z) = 0$$

Po plašču

$$\vec{E} \cdot \vec{n} = E\,\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\rho = E(\rho)$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n}\, dS = \int_{plašč} E(\rho)\, dS = E(\rho) \int dS = E(\rho) \cdot 2\pi L \cdot \rho$$

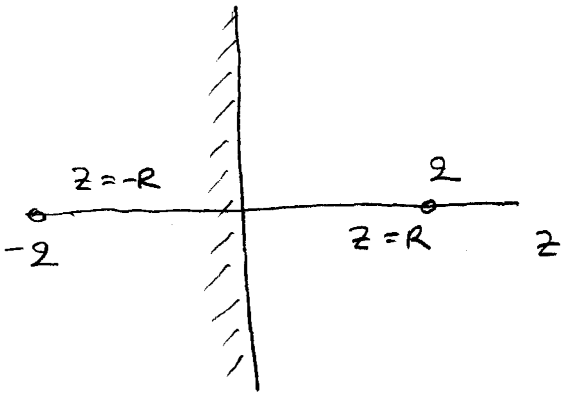
$$= \frac{1}{\epsilon_0} Q = 2\pi L A R^3$$

Polje izven distribucije

$$E = \frac{AR^3}{\rho} \; ; \quad \rho \geq R$$

$$\vec{E} = \frac{AR^3}{\rho}\, \vec{e}_\rho \; ; \quad \rho \geq R$$

2.



Potencijal u ovom problemu pronašli smo na vježbama

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-R)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+R)^2}}\right)$$

(a)

z - komponenta električnog polja

$$E_z = -\frac{\partial\Phi}{\partial z} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{2(z-R)}{(x^2+y^2+(z-R)^2)^{3/2}} - \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2(z+R)}{(x^2+y^2+(z+R)^2)^{3/2}}\right]$$

$$E_z = +\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{z-R}{(x^2+y^2+(z-R)^2)^{3/2}} - \frac{z+R}{(x^2+y^2+(z+R)^2)^{3/2}}\right]$$

(b) Silu na naboj izračunat ćemo kao silu između naboja slike i pravog naboja

$$F = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{1}{(2R)^2}$$

Sila je privlačna i ima samo smjer z, ostale komponente su nula zbog simetrije.

Ovaj smo rezultat mogli dobiti i pomoću polja u (a), s tim da uzmemo u obzir samo polje induciranog naboja

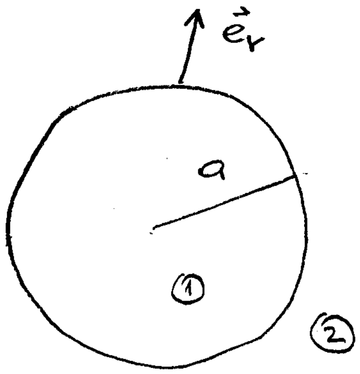
$$E_z = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{z+R}{(x^2+y^2+(z+R))^{3/2}}$$

Получаю

$$F_z = q E_z \Big|_{\substack{z=R \\ x=0 \\ y=0}} = -\frac{q^2}{4\pi} \cdot \frac{2R}{(2R)^3} = -\frac{q^2}{4\pi} \cdot \frac{1}{(2R)^2}$$

3.

(a)



Rješavamo Laplaceovu jednadžbu unutar i izvan sfere

$$\vec{\nabla}^2 \Phi = 0$$

Pretpostavljeno rješenje glasi:

$$\Phi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta) \; ; \; r \leq a$$

$$\Phi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} D_n r^{-(n+1)} P_n(\cos\theta) \; ; \; r \geq a$$

Rubni uvjeti: na $r=a$

$$\Phi(r=a) = V_0 \cos 2\theta = \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n P_n(\cos\theta)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} D_n a^{-(n+1)} P_n(\cos\theta)$$

Napišimo $\cos 2\theta$ pomoću Legendreovih polinoma

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2 \cdot \left(\frac{2}{3} P_2(\cos\theta) + \frac{1}{3} \right) - 1$$

$$= \frac{4}{3} P_2(\cos\theta) - \frac{1}{3} P_0$$

Usporedimo lijeve i desne strane jednadžbe. Koeficijenti uz Legendreove polinome su

$$n=0; \quad -\frac{V_0}{3} = A_0 = D_0 a^{-1}$$

$$n=2; \quad \frac{4}{3} V_0 = A_2 a^2 = D_2 a^{-3}$$

$$n \neq 0; \quad 0 = A_n = D_n$$

Imamo:

$$A_0 = -\frac{V_0}{3}\,; \quad D_0 = -\frac{V_0 a}{3}$$

$$A_2 = \frac{4}{3} V_0 a^{-2}\,; \quad D_2 = \frac{4}{3} V_0 a^{3}$$

Rješenja za potencijale su

$$\Phi_1(r,\theta) = -\frac{1}{3} V_0 + \frac{4}{3} V_0 \left(\frac{r}{a}\right)^2 P_2(\cos\theta)$$

$$\Phi_2(r,\theta) = -\frac{1}{3} V_0 \left(\frac{a}{r}\right) + \frac{4}{3} V_0 \left(\frac{a}{r}\right)^3 P_2(\cos\theta)$$

(b)

$$\vec{E}_1 = -\vec{\nabla}\Phi_1 \qquad \left.(\vec{E}_2 - \vec{E}_1)\cdot\vec{n}\right|_{r=a} = \frac{1}{\epsilon_0}\sigma \quad (*)$$

$$\vec{E}_2 = -\vec{\nabla}\Phi_2$$

$$\vec{n} = \vec{e}_r$$

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{n} = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = -\frac{8}{3} V_0 \frac{r}{a^2} P_2(\cos\theta)$$

$$\vec{E}_2 \cdot \vec{n} = -\frac{\partial \Phi_2}{\partial r} = -\frac{1}{3} V_0 a r^{-2} + 4 V_0 \frac{r^2}{a^3} P_2(\cos\theta)$$

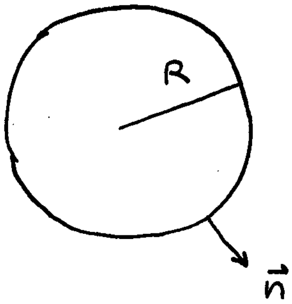
Uvrstimo u rubni uvjet (*)

$$-\frac{1}{3} V_0 \cdot a^{-1} + 4 V_0 a^{-1} P_2(\cos\theta) - \left(-\frac{8}{3} V_0 a^{-1} P_2(\cos\theta)\right) = \frac{1}{\epsilon_0}\sigma$$

Odavdje,

$$\sigma = \epsilon_0 V_0 a^{-1} \cdot \left[\frac{20}{3} P_2(\cos\theta) - \frac{1}{3}\right]$$

$\boxed{4.}$



$$\vec{P} = kr\vec{e}_r$$

$$\rho_{pol} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$$

Divergencija u sfernim koordinatama: zanima nas dio koji ovisi samo o r.

$$\rho_{pol} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 kr) = -\frac{1}{r^2}3kr^2$$

$$= -3k$$

Plošna gustoća vezanog naboja; normala $\vec{n} = \vec{e}_r$

$$\sigma_{pol}\Big|_{r=R} = \vec{P}\cdot\vec{n}\Big|_{r=R} = kr(\vec{e}_r\cdot\vec{e}_r)\Big|_{r=R} = kR$$

Ukupni vezani naboj je

$$\int \rho_{pol}\, dV + \oint \sigma_{pol}\, dS =$$

$$= -3k\int dV + kR\oint dS = -3k\cdot\frac{4\pi R^3}{3} + kR\cdot 4R^2\pi$$

$$= 0$$