



# **Astronomija i astrofizika I**

# **DVOJNI SUSTAVI ZVIJEZDA**

# FUNDAMENTALNA SVOJSTVA ZVIJEZDA

**TEMPERATURA** → fotometrija (indeks boja)

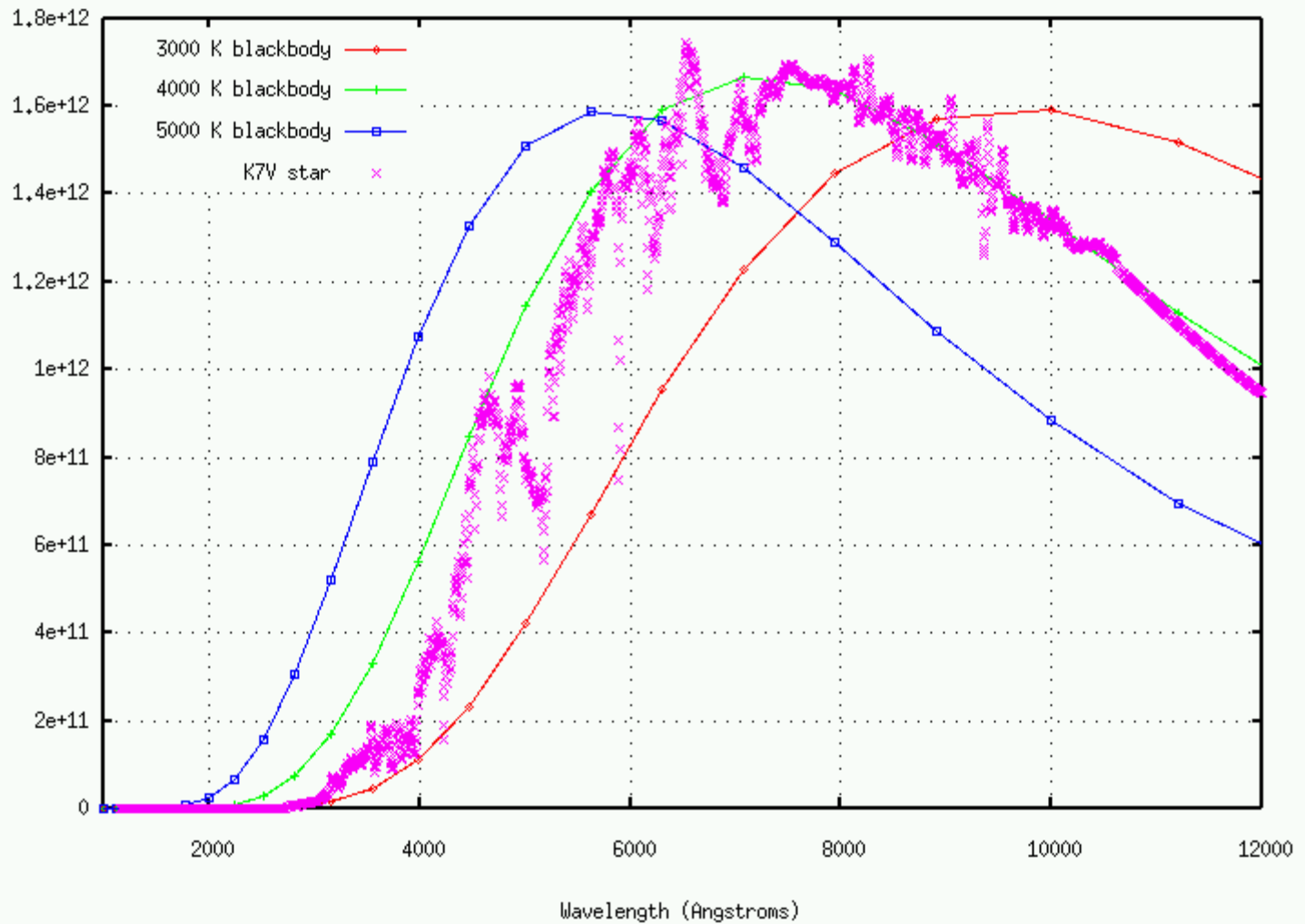
→ spektroskopija:

kontinuirani spektar – spektralna raspodjela energije (SED – spectral energy distribution): crno tijelo

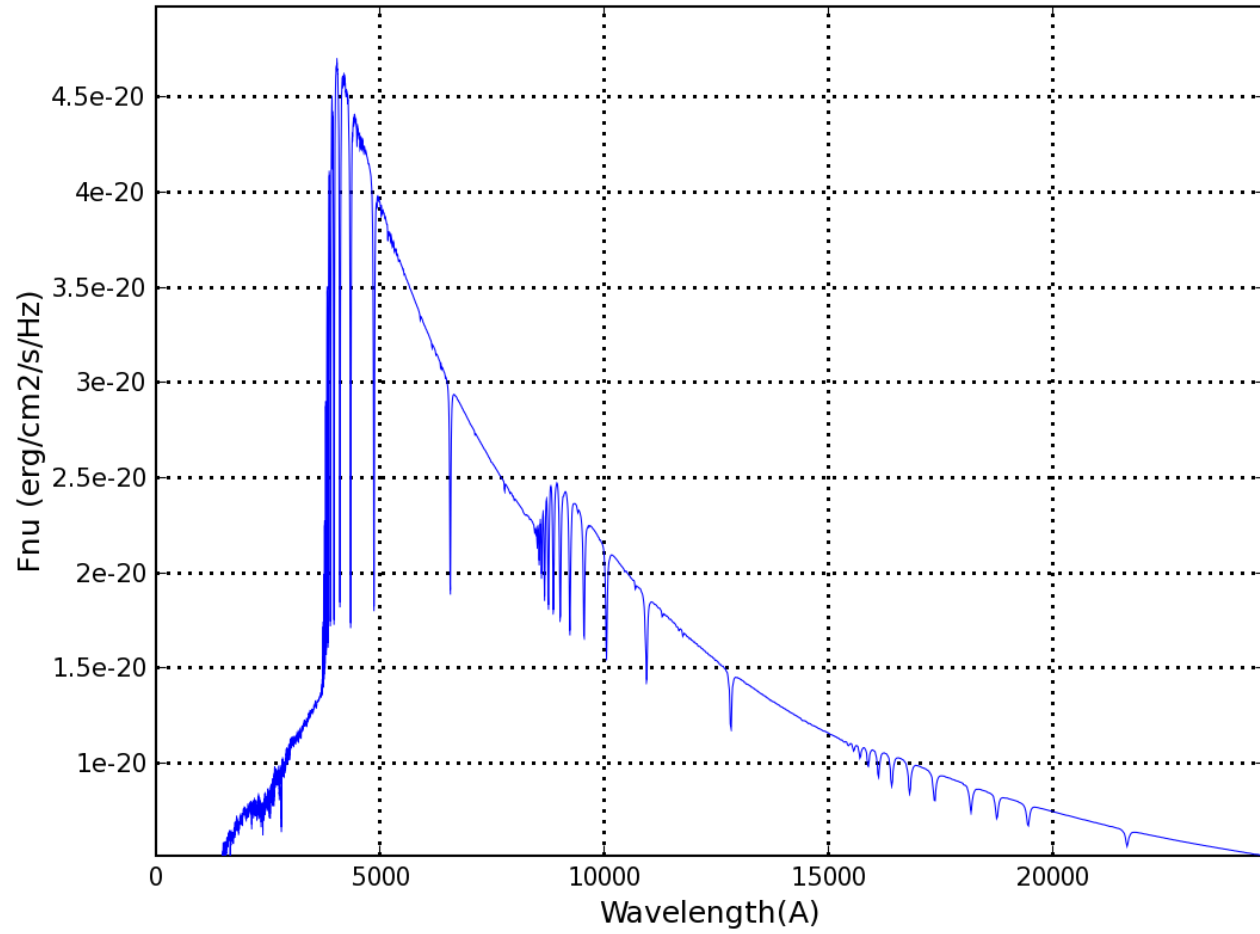
linijski spektar:

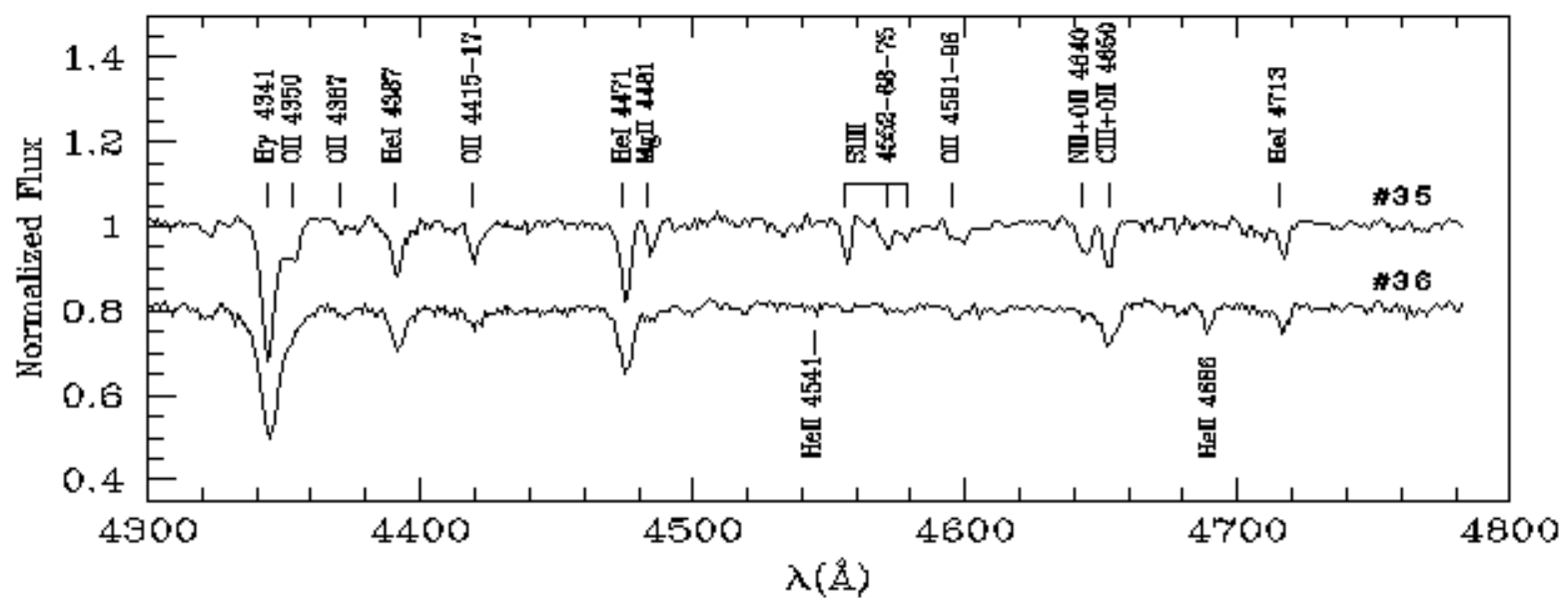
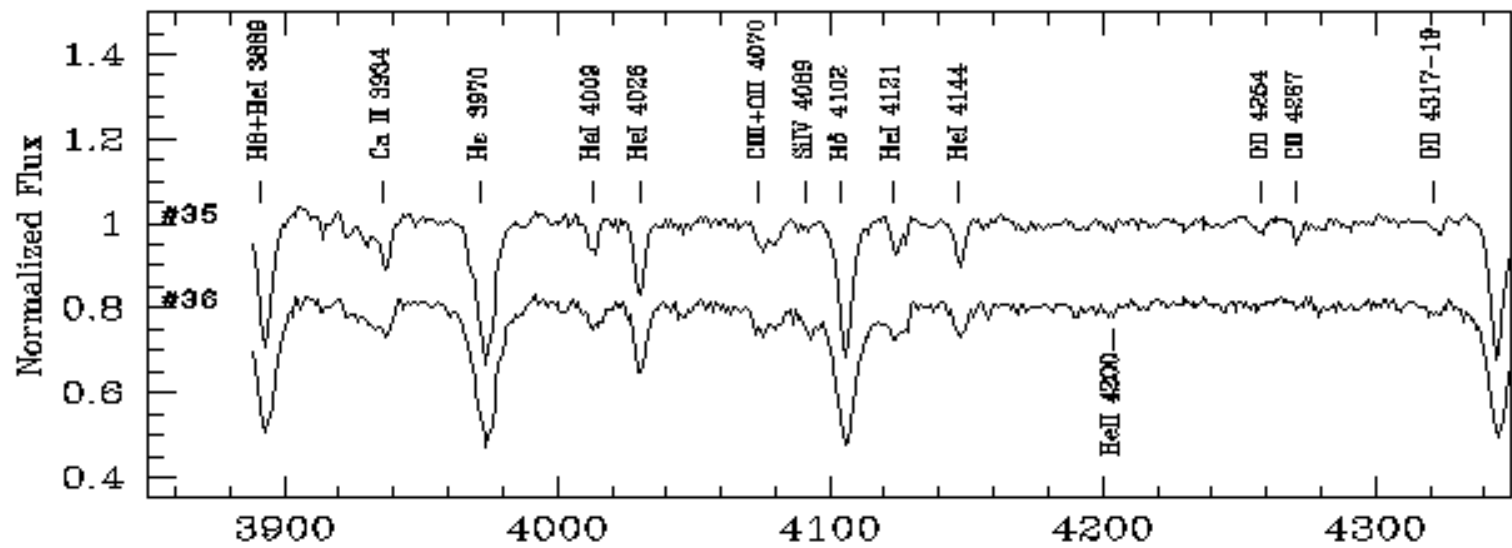
- širina i dubina linija,
- omjer površina linija istog elementa različitih stupnjeva ionizacije,
- prilagodba profila linije teorijskom modelu

Spectrum of a cool star compared to blackbodies



# Vega Spectrum





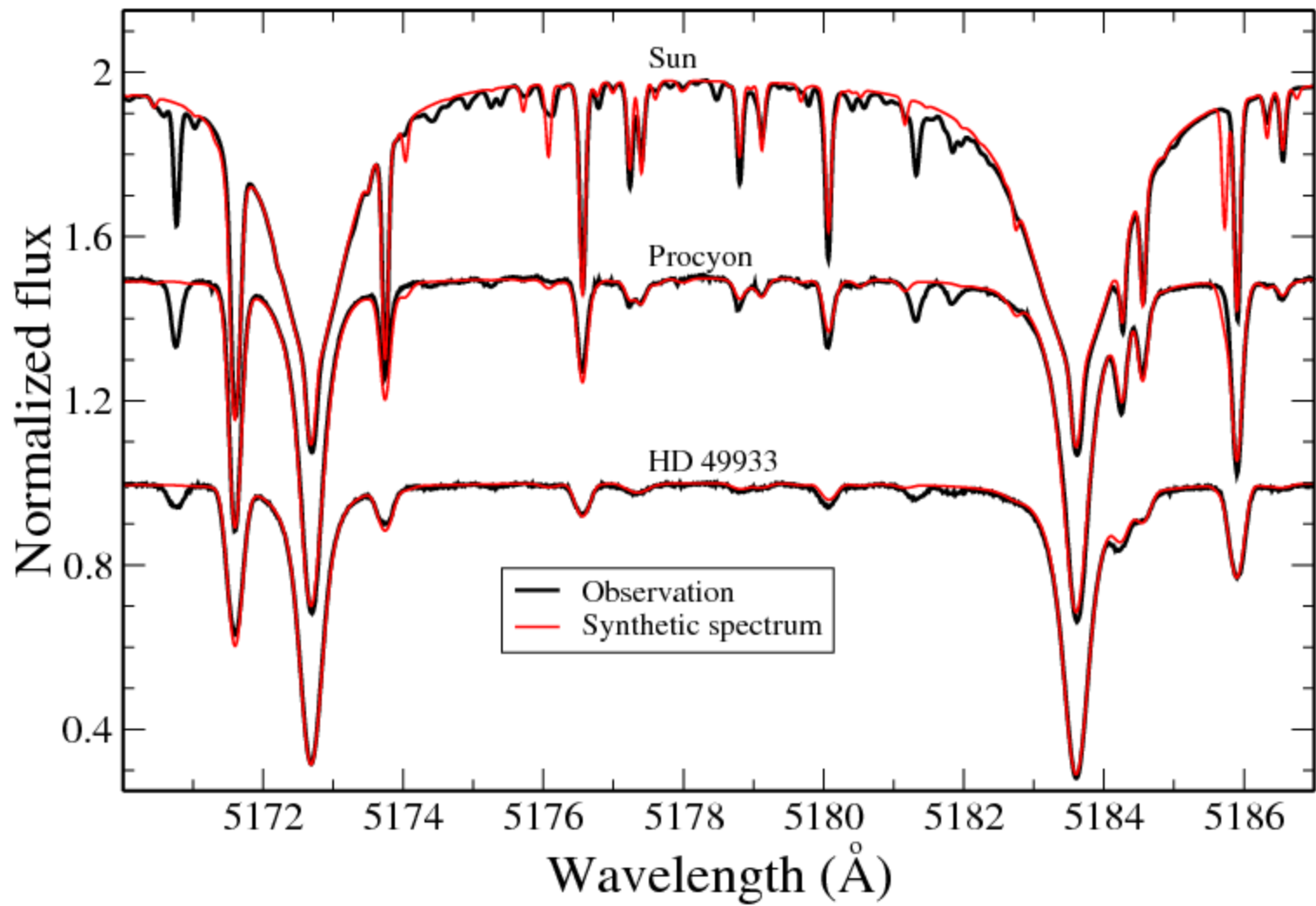
**LUMINOZITET** → fotometrija  
→ spektralna raspodjela energije (SED)  
→ zahtjeva poznavanje **UDALJENOSTI**

## **POVRŠINSKO UBRZANJE SILE TEŽE (g)**

→ spektroskopija: oblik spektralne linije,  
prilagodba profila spektralne linije  
teorijskom profilu

**POLUMJER** → optička i blisko-IR interferometrija (VLTi, Keck)  
→ posredno iz Štefan-Boltzmannovog zakona  
mjeranjem luminoziteta i efektivne  
temperature:

$$L = 4\pi\sigma R_*^2 T_*^4$$





# FUNDAMENTALNA SVOJSTVA ZVIJEZDA

## MASA??

- Masu nije moguće odrediti opažanjem elektromagnetskog zračenja (fotometrijom ili spektroskopijom)
- Masa u principu ne utječe na nastanak elektromagnetskog zračenja (osim posredno kroz gustoću i/ili ubrzanje sile teže)
- Jedini način za određivanje mase zvijezde → putem **GRAVITACIJSKOG MEĐUDJELOVANJA** u dvojnim i višestrukim zvjezdanim sustavima

# DVOJNI ZVJEZDANI SUSTAVI

- Primjena Keplerovih zakona na dvojne (ili višestruke) zvjezdane sustave
- Analiza orbitalnih parametara i svjetlosnih krivulja  $\Rightarrow$  određivanje mase, polumjera, efektivne temperature

Barem **50%** svih zvijezda nalazi se u dvojnim ili višestrukim sustavima

- Orbite u dvojnim ili višestrukim zatvorenim konzervativnim sustavima pod utjecajem centralne sile  $\rightarrow$  **ELIPSE**
- Gravitacijsko međudjelovanje  $\rightarrow$  centralna sila ovisna o udaljenosti:

$$F \propto \frac{1}{r^2}$$

Posljedica svojstava gravitacijske sile  $\Rightarrow$  **VIRIJALNI TEOREM:**

$$\langle U \rangle = -2\langle K \rangle$$

$$\langle E \rangle = -\langle K \rangle = \frac{1}{2}\langle U \rangle < 0 \quad (\text{zatvoreni konzervativni sustav})$$

Rješenje problema dvaju tijela pod utjecajem gravitacijske sile  $\Rightarrow$  eliptične orbite s centrom mase u jednom od žarišta

Rješenje problema n-tijela nije analitičko  $\rightarrow$  numerička rješenja

Rješenja primjenjiva na različitim skalama:

- Gibanje planeta i asteroida u planetarnom sustavu
- Gibanje zvijezda u višestrukim zvjezdanim sustavima
- Gibanje zvijezda u galaksijama (problem mnoštva tijela)

# KEPLEROVI ZAKONI

## Prvi Keplerov zakon:

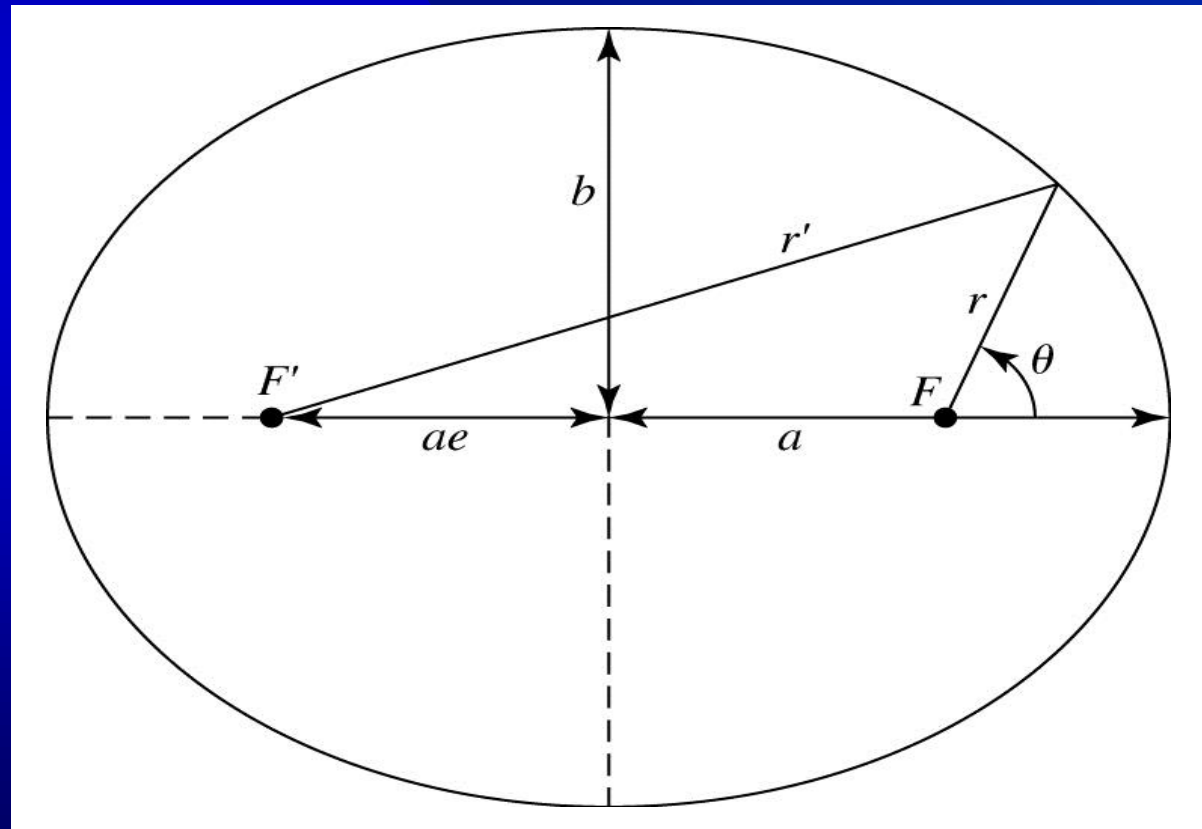
Planete se gibaju oko Sunca po elipsi u čijem se žarištu nalazi Sunce

$$r + r' = 2a$$

$$b^2 = a^2(1 - e^2)$$

$e \rightarrow$  ekscentricitet orbite ( $0 \leq e < 1$ )

$e = 1 \Rightarrow$  kružna orbita



## Položaj na orbiti:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \quad (0 \leq e < 1)$$

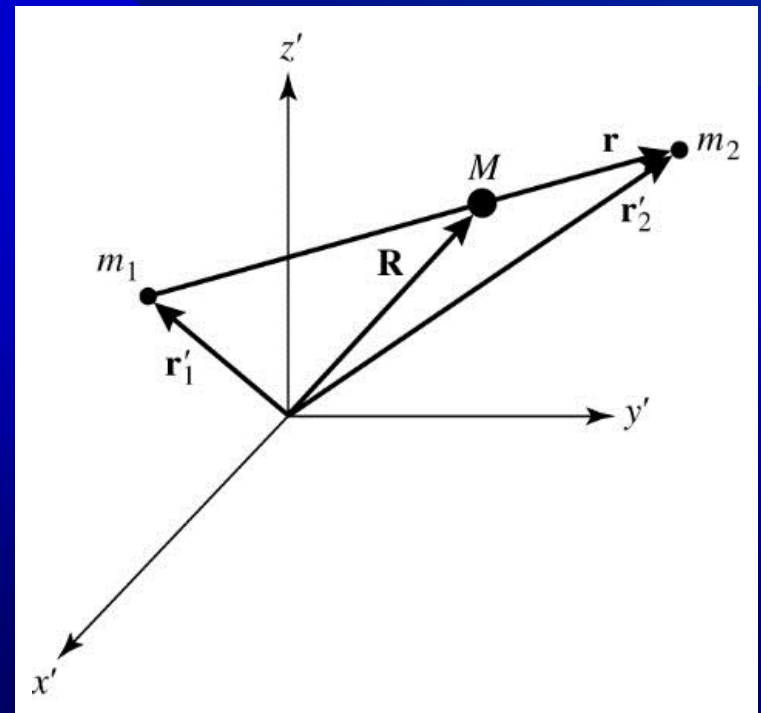
## SUSTAV CENTRA MASE

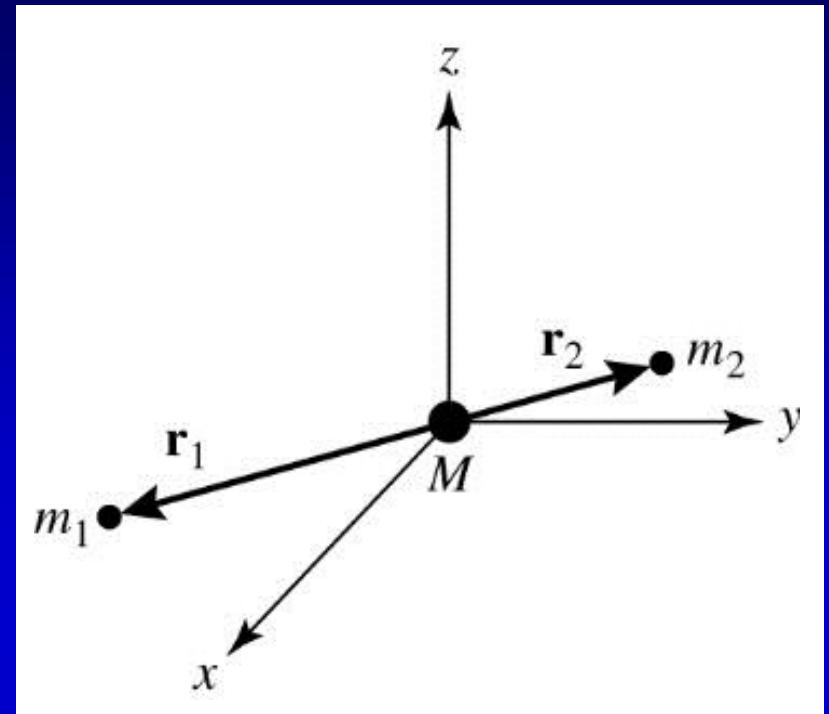
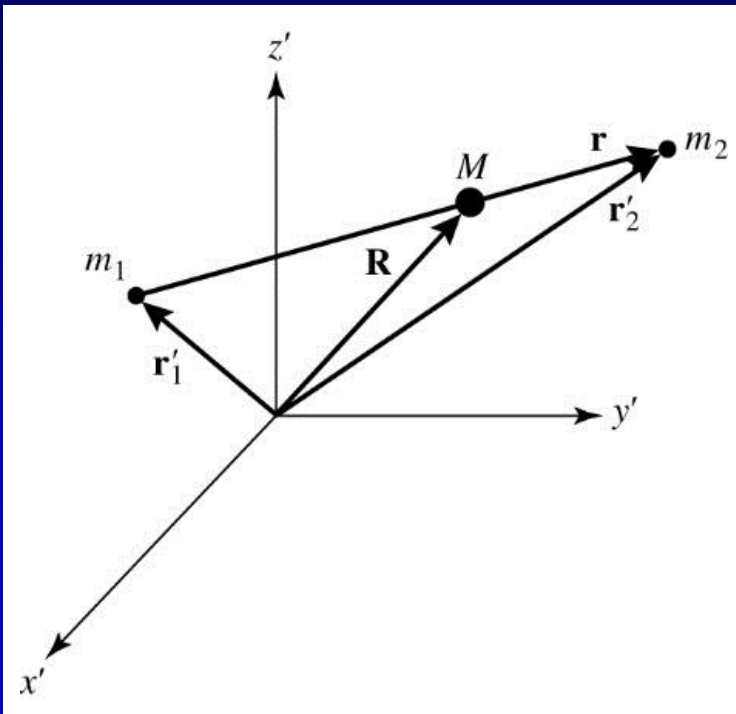
Dvije zvijezde u orbiti oko zajedničkog centra mase:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}'_1 + m_2 \vec{r}'_2}{m_1 + m_2} \equiv \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}'_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

$$\vec{r} = \vec{r}'_2 - \vec{r}'_1$$

Centar mase ne ubrzava ako nema vanjskih sila → **inercijalni** referentni koordinatni sustav





Pojednostavljenje problema N-tijela  $\Rightarrow$  ishodište koordinatnog sustava nalazi se u centru mase koji miruje  $\Rightarrow \vec{R} = 0$

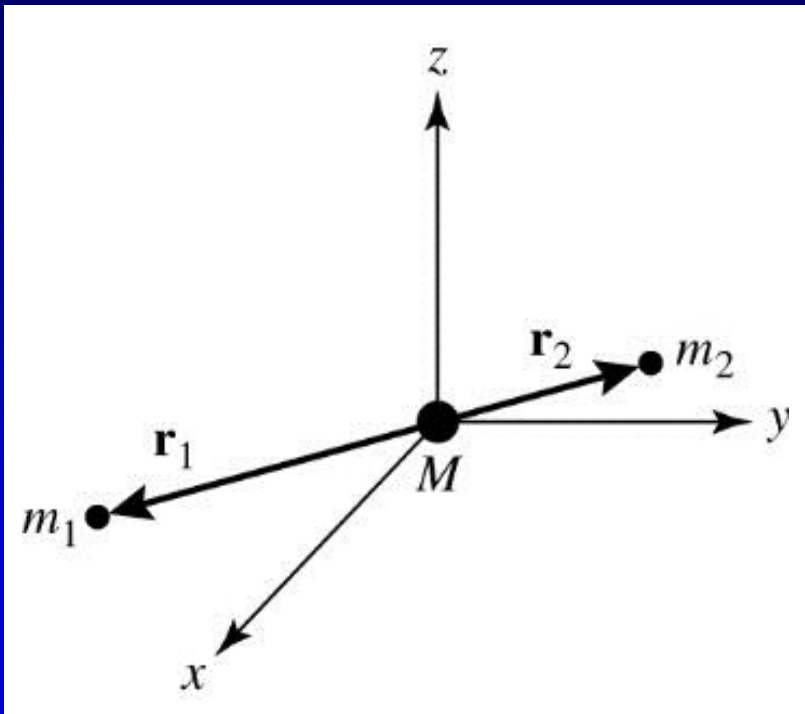
$$\frac{m_1 \vec{r}'_1 + m_2 \vec{r}'_2}{m_1 + m_2} = 0$$

$$\vec{r}'_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

$$\vec{r}'_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

## Reducirana masa sustava:

$$\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$
$$\vec{r}_1 = -\frac{\mu}{m_1} \vec{r}$$
$$\vec{r}_2 = \frac{\mu}{m_2} \vec{r}$$



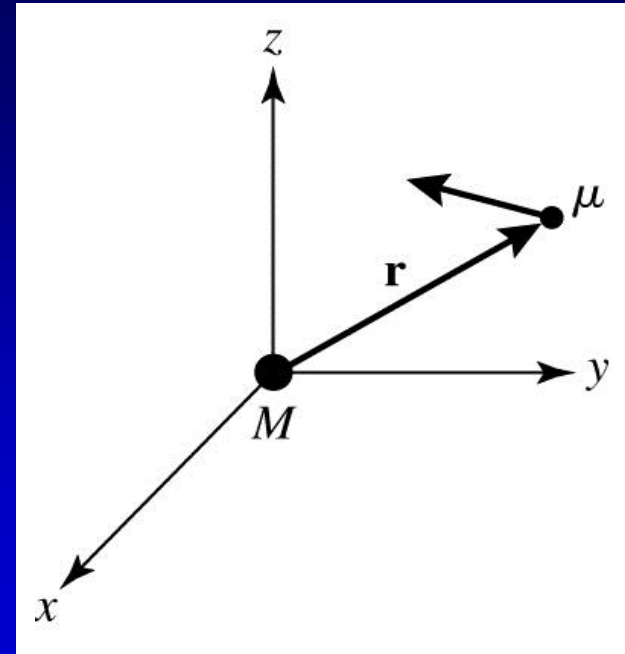
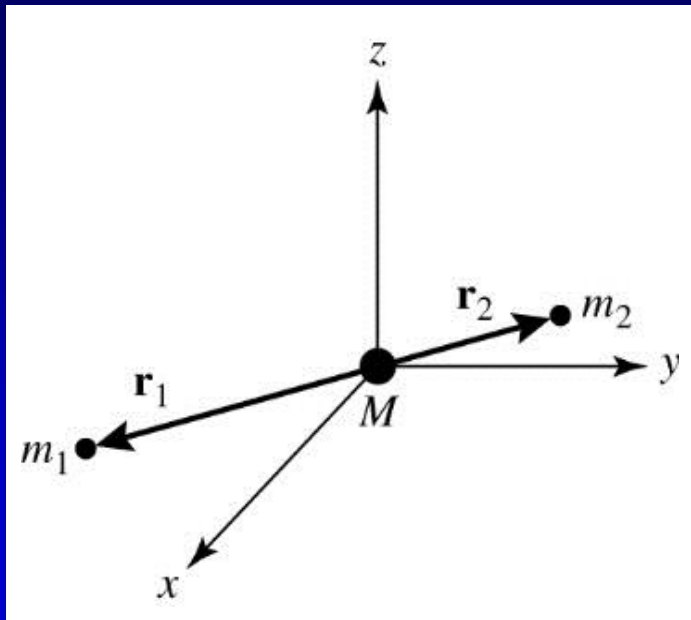
## Energija sustava:

$$E = \frac{1}{2} m_1 |\vec{v}_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\vec{v}_2|^2 - G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

$$E = \frac{1}{2} \mu v^2 - G \frac{M \mu}{r}$$

gdje je  $v = |\vec{v}|$ ;  $\vec{v} \equiv d\vec{r}/dt$ ;  $r = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$

$M$  je ukupna masa sustava:  $M = m_1 + m_2$



## Kutna količina gibanja:

$$\vec{L} = m_1 \vec{r}_1 \times \vec{v}_1 + m_2 \vec{r}_2 \times \vec{v}_2$$

$$\vec{L} = \mu \vec{r} \times \vec{v} = \vec{r} \times \vec{p}$$

gdje je  $\vec{p} \equiv \mu \vec{v}$

**Problem dva tijela masa  $m_1$  i  $m_2$  sveden je na problem gibanja jednog tijela mase  $\mu$  oko nepomične mase  $M$  u ishodištu koordinatnog sustava na udaljenosti  $r$**



**Kutna količina gibanja sustava za centralnu silu kakva je gravitacijska je očuvana:**

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

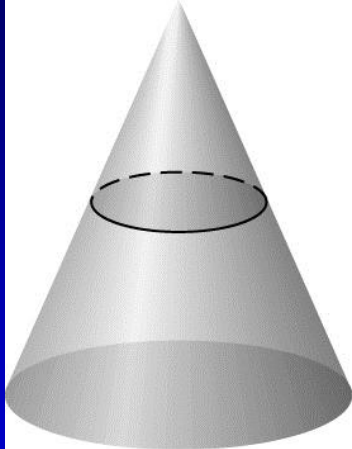
Posljedica  $\Rightarrow$  orbita reducirane mase oko centra mase u polju gravitacijske sile je **čunjosječnica**:

$$r = \frac{L^2 / \mu^2}{GM(1 + e \cos \theta)}$$

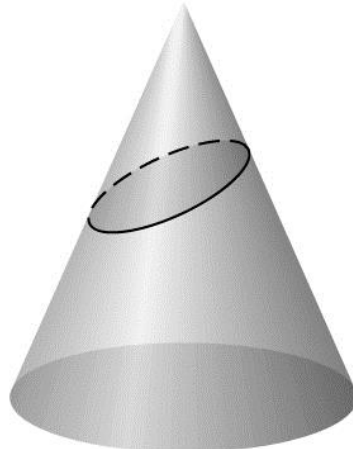
**Vezani sustav** (ukupna energije sustava manja je od nule)  
 $\Rightarrow$  **ELIPTIČNA PUTANJA**

Ukupna energija sustava jednaka nuli  $\Rightarrow$  **PARABOLIČNA PUTANJA**

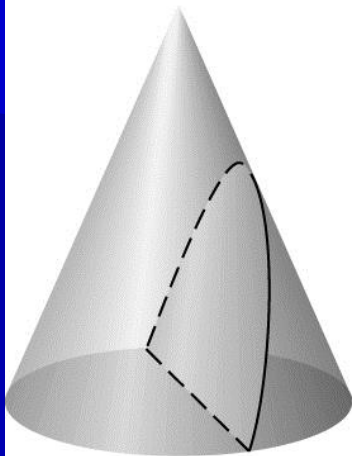
Otvoreni sustav (ukupna energija sustava veća od nule)  $\Rightarrow$  **HIPERBOLIČNA PUTANJA**



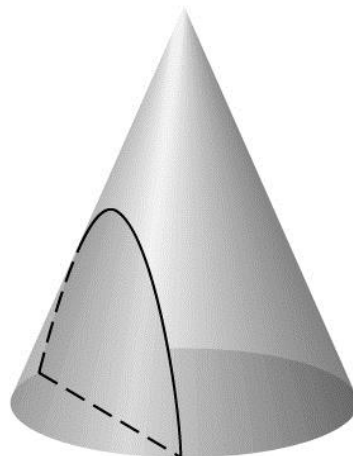
Circle



Ellipse



Parabola



Hyperbola

(a)

Parabola  
 $e = 1.0$   
 $a = 1.0$

Hyperbola  
 $e = 1.4$   
 $a = 2.5$

Ellipse  
 $e = 0.6$   
 $a = 2.5$

Circle  
 $e = 0.0$   
 $a = 1.0$

●  
Focus

(b)

**Kutna količina gibanja:**

$$L = \mu \sqrt{GMa(1 - e^2)}$$

**Prvi Keplerov zakon:**

**Dva objekta u dvojnomo sustavu gibaju se po eliptičnoj putanji oko centra mase, pri čemu se centar mase nalazi u jednom od dva žarišta svake elipse**

## Drugi Keplerov zakon:

Radijus-vektor Sunce-planet u jednakim vremenskim intervalima prebrisuje jednake površine

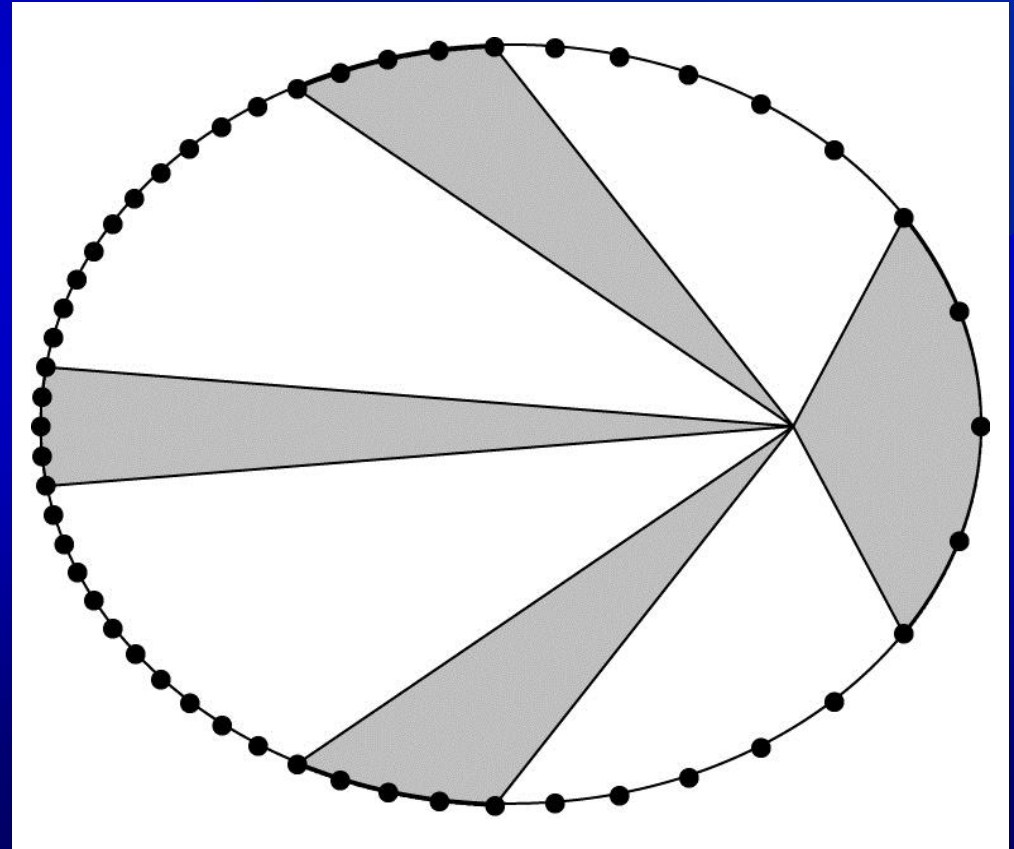
$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \frac{L}{\mu}$$

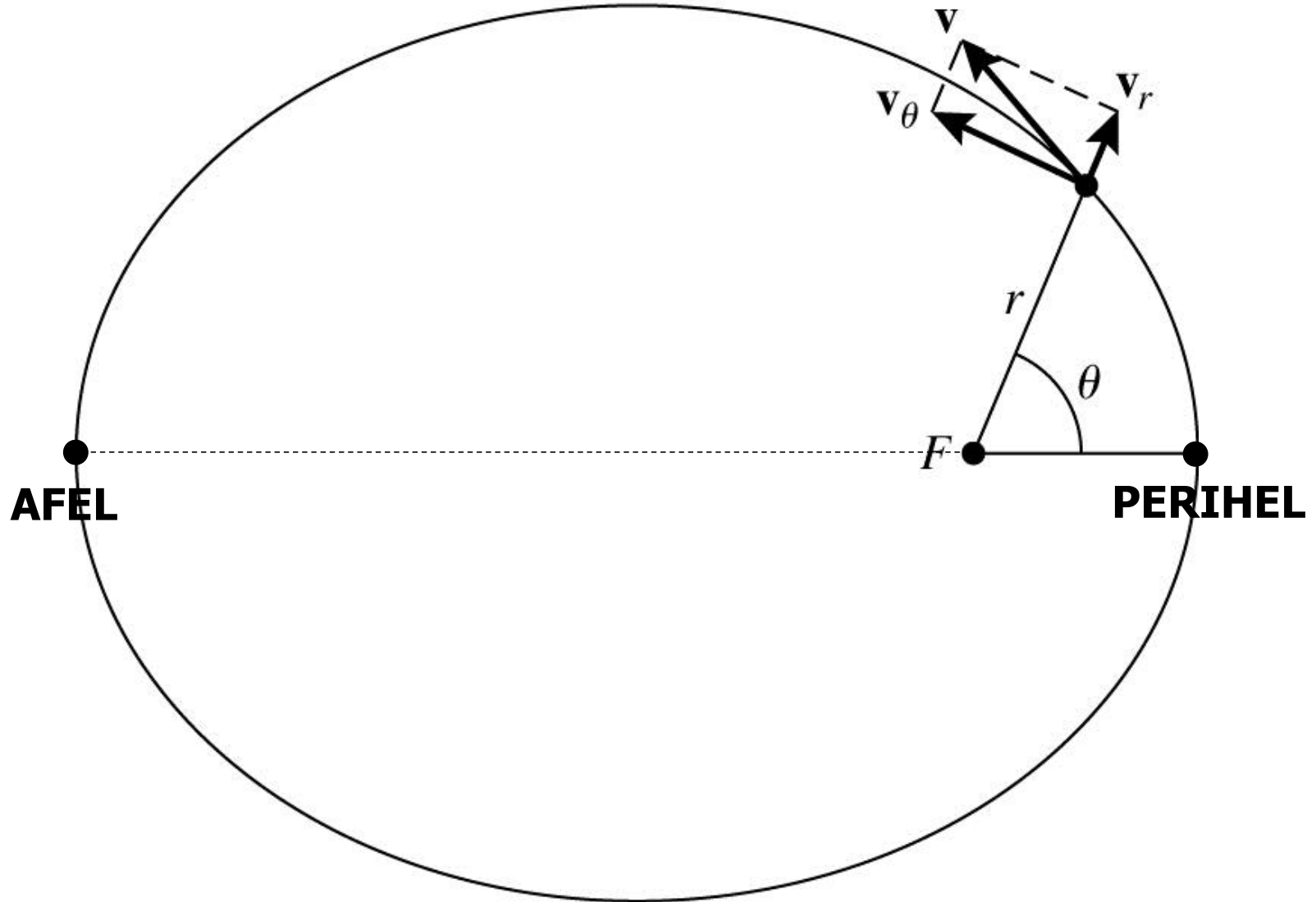
$A$  – površina prebrisana radijus-vektorom

- Posljedica očuvanja kutne količine gibanja u zatvorenom sustavu središnje sile:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \mathbf{0}$$

Carroll, B.W., Ostlie, D.A., 2006, 'Introduction to Modern Astrophysics', Pearson





## Perihel:

$$r_p = a(1 - e)$$
$$v_p^2 = \frac{GM}{a} \left( \frac{1 + e}{1 - e} \right)$$

## Afel:

$$r_a = a(1 + e)$$
$$v_a^2 = \frac{GM}{a} \left( \frac{1 - e}{1 + e} \right)$$
$$\frac{v_p}{v_a} = \frac{1 + e}{1 - e}$$

## Energija sustava:

$$E = -G \frac{M\mu}{2a} = -G \frac{m_1 m_2}{2a}$$

## Brzina:

$$v^2 = G(m_1 + m_2) \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

## Treći Keplerov zakon:

(Harmonijski zakon)

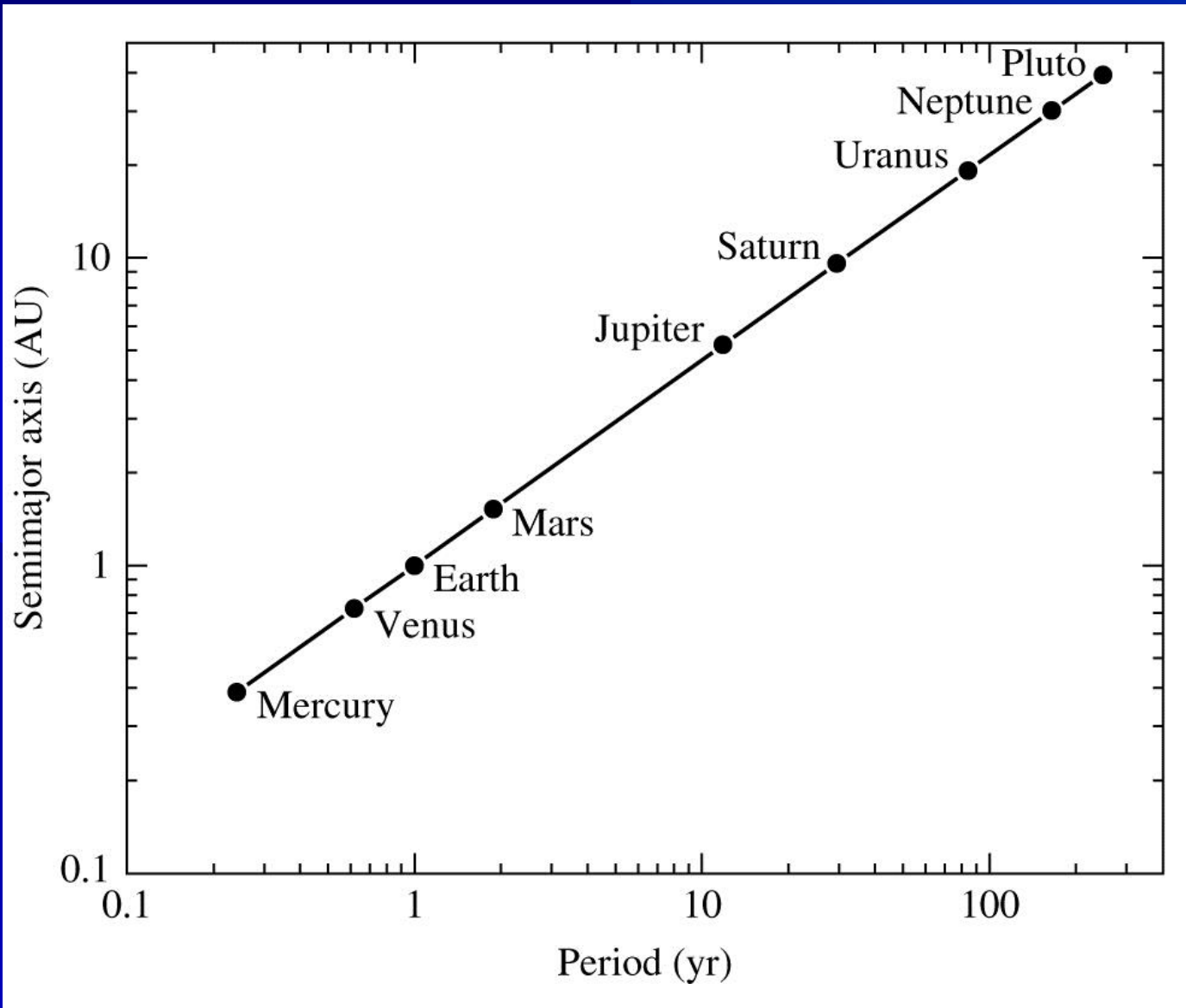
Kvadrat perioda ophoda planete proporcionalan je kubu srednje udaljenosti planete od Sunca

$$p^2 = \frac{4\pi^2}{GM_{\text{Sun}}} a^3$$

Poprćenje na proizvoljne mase dvojnog sustava:

$$p^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3$$

# Treći Keplerov zakon





# **VRSTE DVOJNIH SUSTAVA**

## **(OPAŽAČKA KLASIFIKACIJA)**

### **1. OPTIČKI DVOJNE ZVIJEZDE**

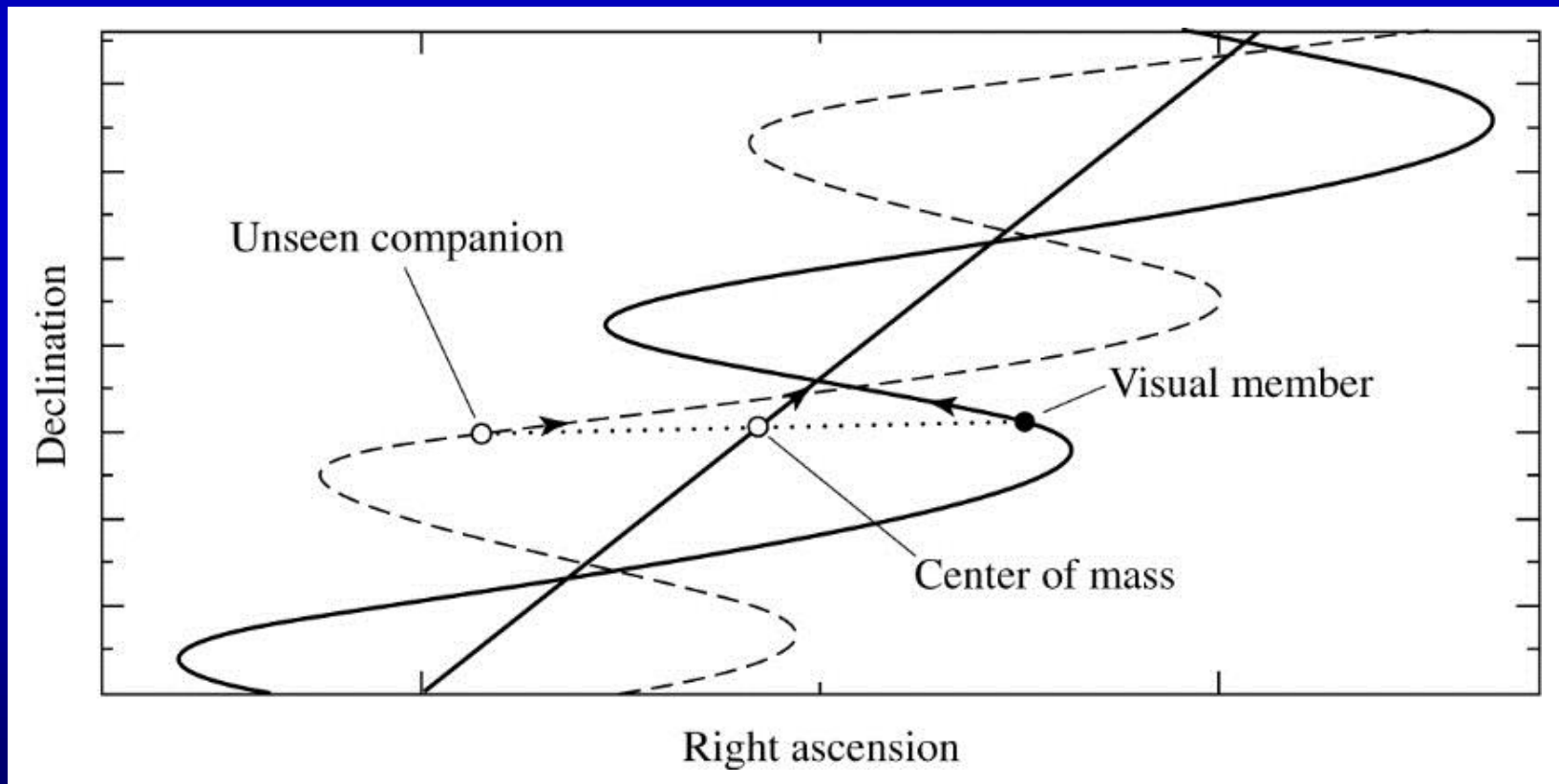
- Dvojne zvijezde koje su prividno dvojne
- Dvije zvijezde koje se nalaze u istom smjeru doglednice
- Nisu gravitacijski vezani objekti

### **2. VIZUALNO DVOJNE ZVIJEZDE**

- Obje zvijezde se mogu razlučiti, moguće je opaziti gibanje komponenata ukoliko periodi nisu preveliki
- Kutno razdvajanje je moguće odrediti
- Linearni razmak između zvijezda je moguće odrediti uz poznavanje udaljenosti
- Vrlo važne za određivanje mase, ali ih ima malo

### 3. ASTROMETRIJSKI DVOJNE ZVIJEZDE

- Jedna komponenta je puno sjajnija od druge i može se opaziti
- Vidljiva komponenta se giba oko zajedničkog centra mase → oscilatorno gibanje uslijed gravitacijskog utjecaja manje sjajne komponente



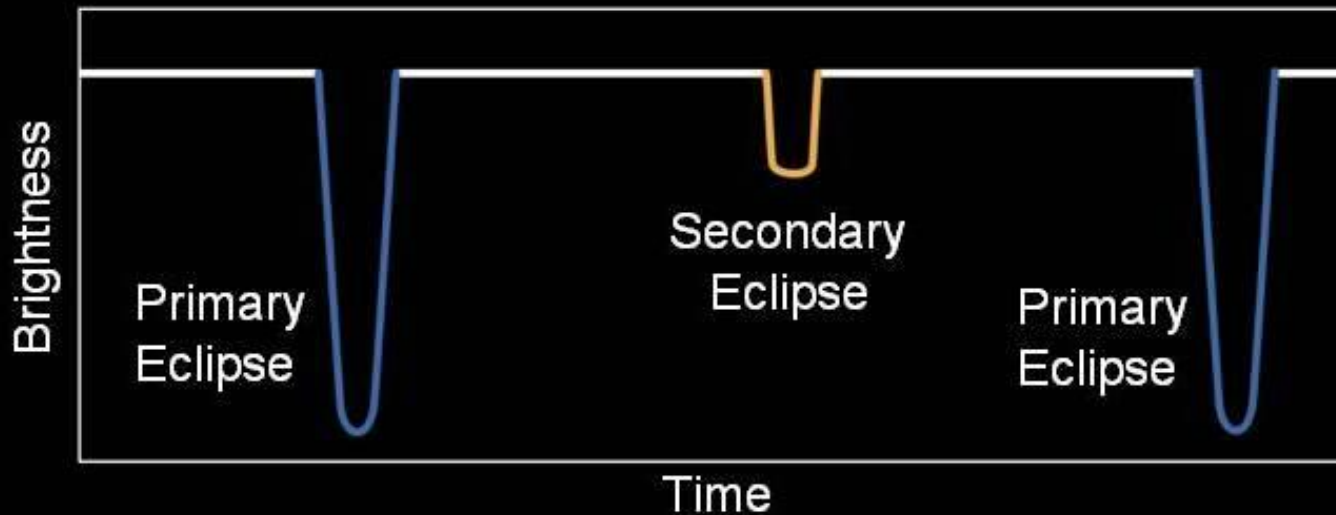
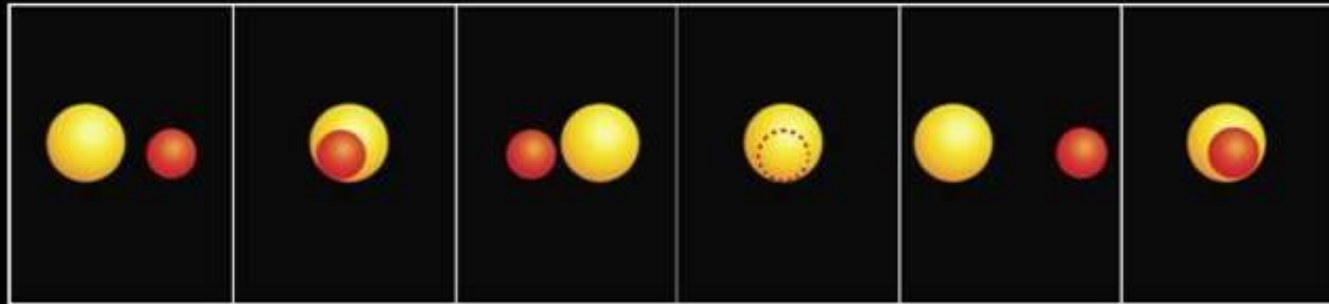
## 4. POMRČINSKI DVOJNE ZVIJEZDE

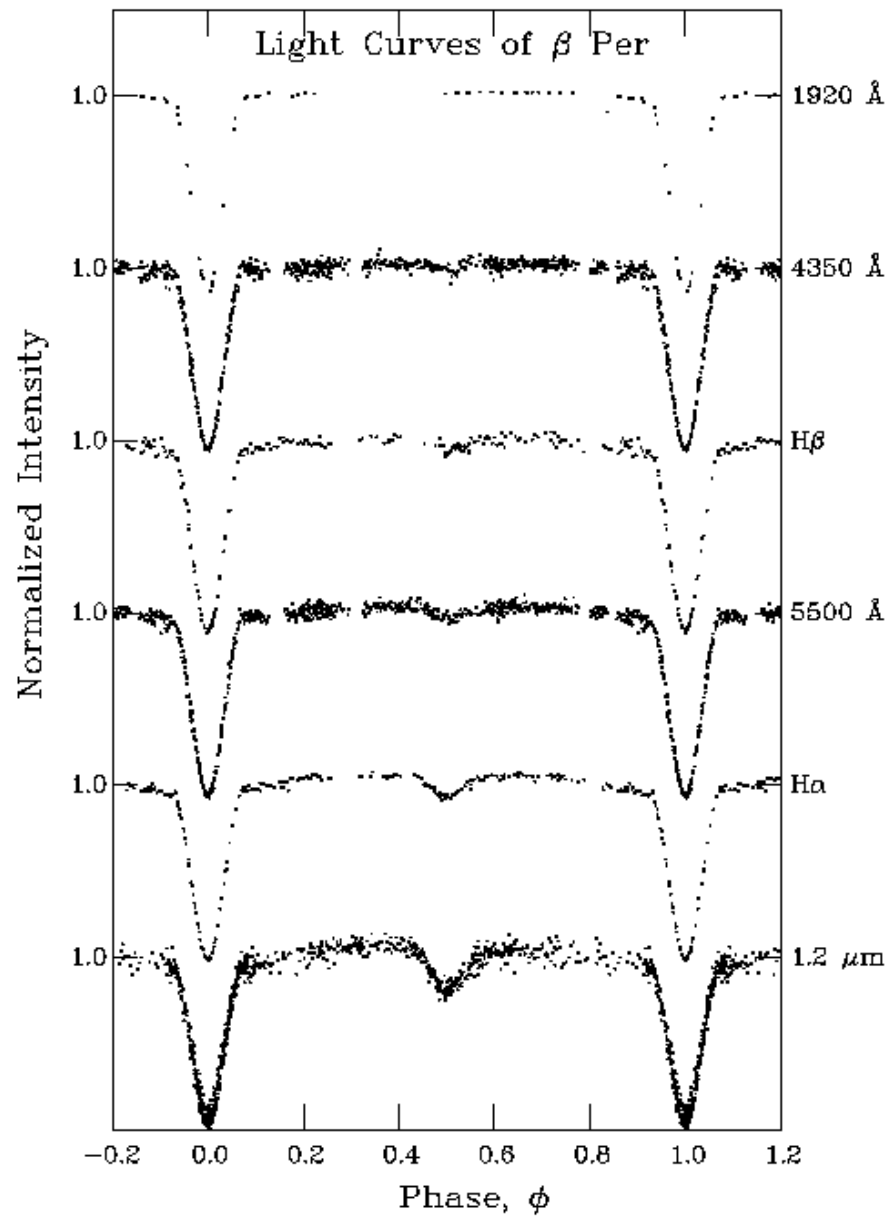
- Orbitalna ravnina u smjeru doglednice
- Periodički jedna komponenta prolazi ispred druge →

### **POMRČINA**

- Periodička promjena sjaja u trenutku pomrčine (opadanje sjaja pri pomrčini)
- Omogućuje određivanje **EFEKTIVNIH TEMPERATURA** i **RADIJUSA KOMPONENTI**

# Eclipsing Binary Stars



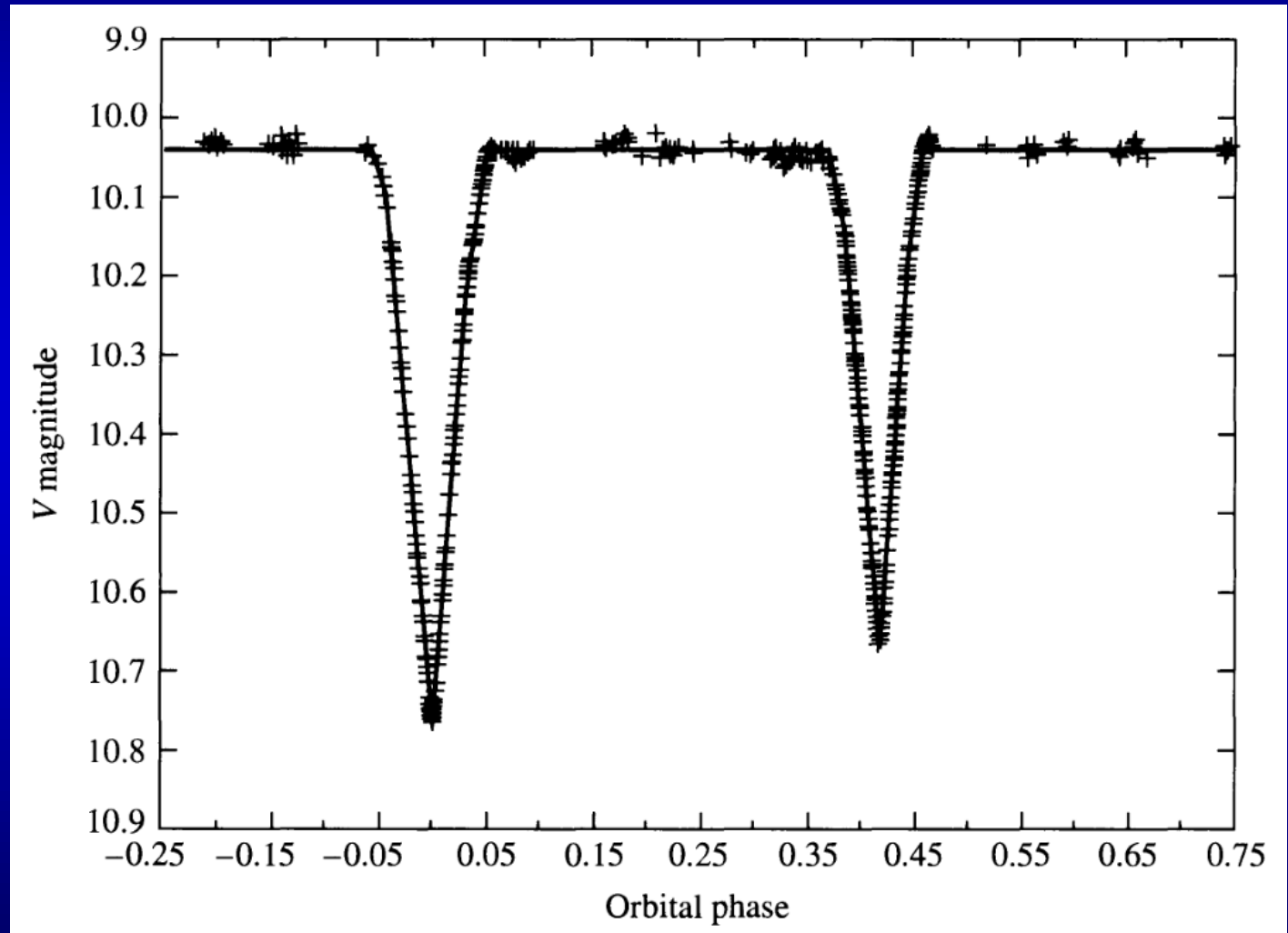


# YY Sagittarii

$P = 2.6284734$  dana

$e = 0.1573$

$i = 88.89^\circ$



Lacy, 1993, *Astron. J.*, 105, 637

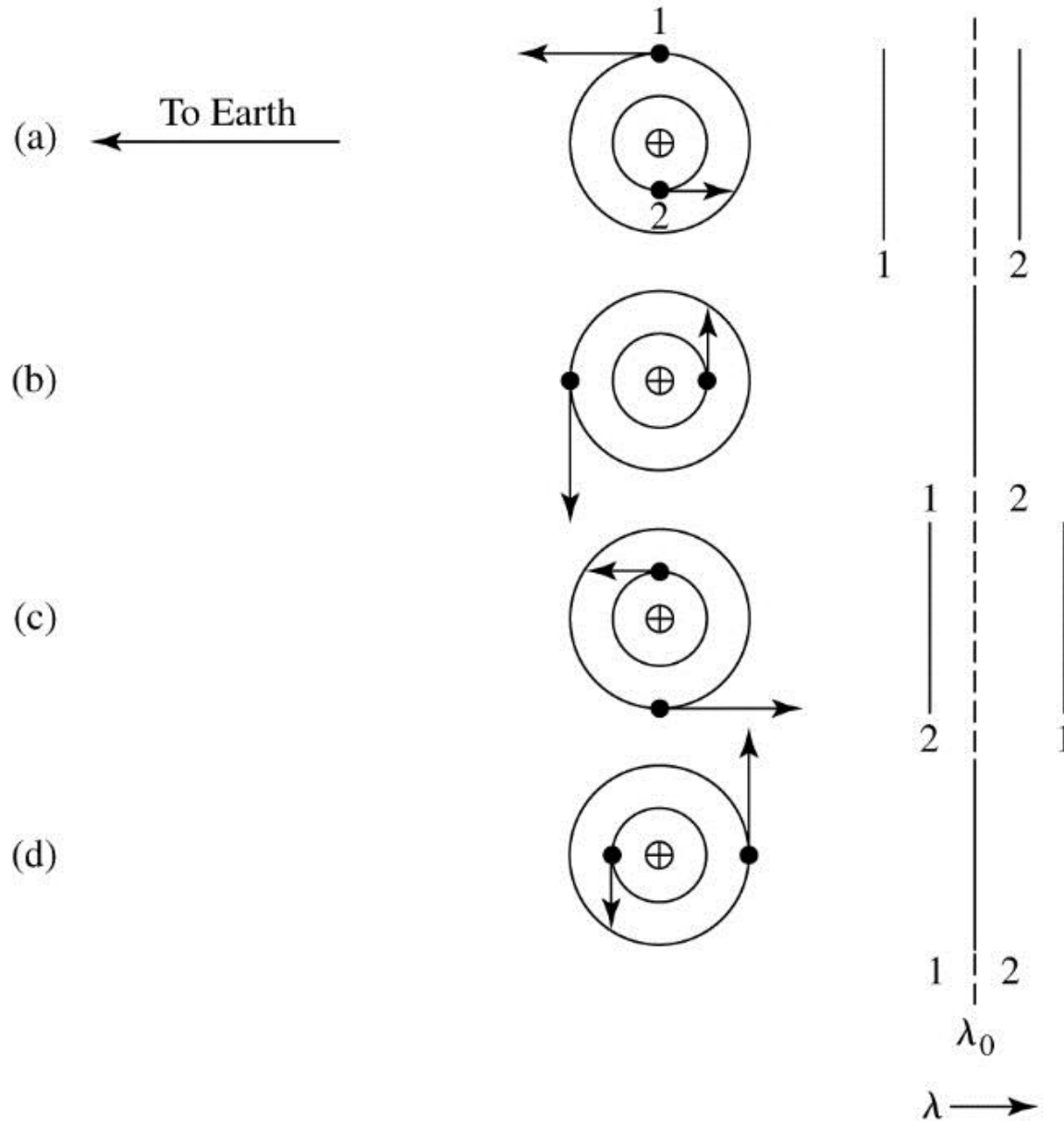
## 5. SPEKTRALNO DVOJNE ZVIJEZDE

- Spektar takvog sustava se sastoji od superponiranih spektara komponenata koji se mogu razlikovati
- Orbitalno gibanje komponenata dvojnog sustava  $\Rightarrow$  orbitalna brzina komponenata  $\Rightarrow$  **DOPPLEROV POMAK** linija
- Dopplerov pomak linija se periodički mijenja u vremenu
- Ista linija koja potječe s obje komponente je pomaknuta istovremeno i prema plavom i prema crvenom
- Dok jedna komponenta ima pozitivnu orbitalnu brzinu, druga ima negativnu  $\rightarrow$  **DOPPLEROV POMAK RAZLIČITIH PREDZNAKA**
- Superponirane i pomaknute linije u spektru  $\Rightarrow$  prisustvo dvije komponente
- U slučaju izostanka Dopplerovog pomaka  $\rightarrow$  superpozicija dvaju vrlo različitih spektara upućuje na dvojni sustav

## 6. SPEKTROSKOPSKI DVOJNE ZVIJEZDE

- Slično kao i spektralno dvojne zvijezde → prisustvo komponente orbitalnog gibanja u smjeru doglednice te ukoliko perioda dvojnog sustava nije pretjerano dugačka
- Velika razlika u luminozitetima komponenata → vidljiv je samo spektar sjajnije komponente
- Opažaju se **PERIODIČKE** promjene u valnim duljinama linije sa samo jedne komponente zbog **DOPPLEROVOG POMAKA** i **ORBITALNOG GIBANJA** komponenata





Moguće su i kombinacije različitih vrsta dvojnih zvijezda (optički nerazlučen pomrčinski i spektroskopski dvojni sustav)

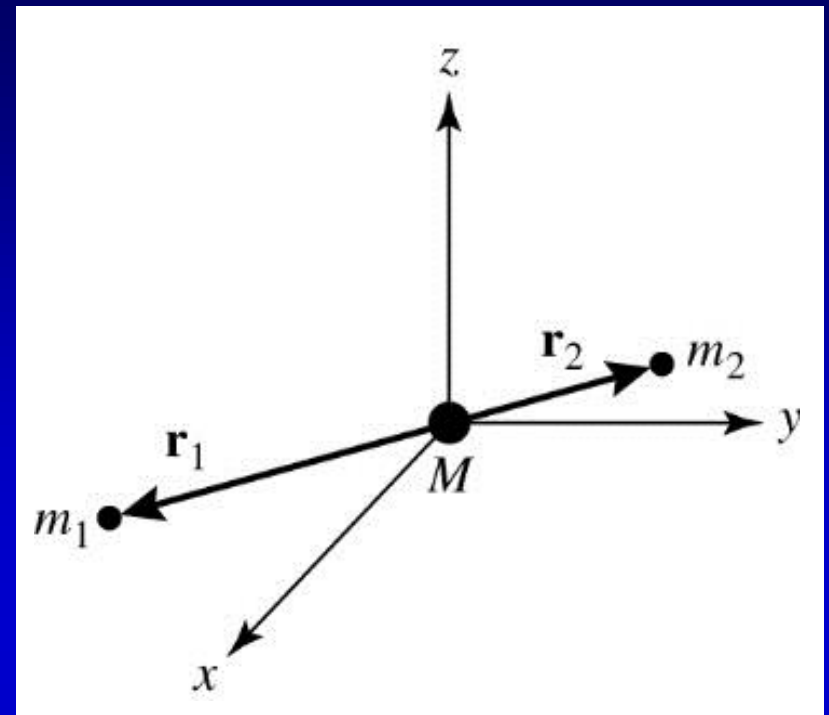
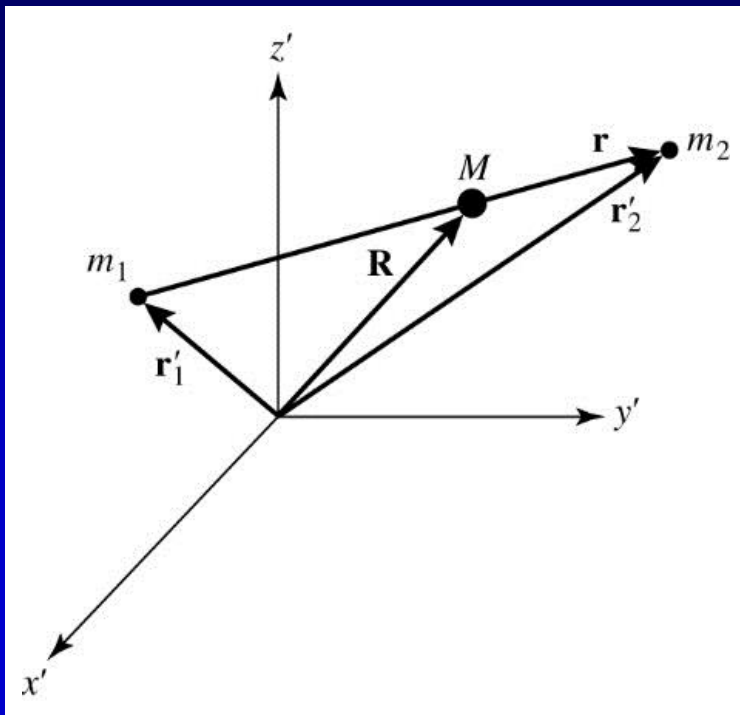
### **VRSTE SUSTAVA U KOJIMA SE MOŽE ODREDITI MASA:**

1. Vizualno dvojne zvijezde s poznatom paralaksom (udaljenost)
2. Vizualno dvojne zvijezde sa poznatim radijalnim brzinama po cijeloj orbiti
3. Pomrčinski spektroskopski dvojne zvijezde s vidljivim linijama obiju komponenata

# ODREĐIVANJE MASE OPTIČKI DVOJNIH SUSTAVA

Jedini način za određivanje mase zvijezde → putem **GRAVITACIJSKOG MEĐUDJELOVANJA** u dvojnim sustavima

- Potrebna dovoljno velika rezolucija za opažanje pomaka položaja komponenata ⇒ određivanje orbite, orijentacije orbitalne ravnine i centra mase ⇒ određivanje omjera mase
- Uz poznatu zvjezdanu paralaksu (udaljenost) ⇒ određivanje linearnog razmaka i pojedinačnih masa!



Carroll, B.W., Ostlie, D.A., 2006, 'Introduction to Modern Astrophysics', Pearson

Dvije zvijezde u orbiti oko zajedničkog centra mase:

$$\frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = 0$$

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Pretpostavka: orbitalna ravnina je okomita na doglednicu  $\Rightarrow$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{a_2}{a_1}$$

$a_1$  i  $a_2$  su velike poluosi elipsa.

Uz poznatu zvjezdanu paralaksu (udaljenost)  $\Rightarrow$  kut pod kojim se vidi velika poluos eliptičnih putanja komponenata:

$$\alpha_1 = \frac{a_1}{d} \quad \alpha_2 = \frac{a_2}{d}$$

**Omjer masa:**

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$

Omjer masa je moguće odrediti i bez poznavanje udaljenosti!

### 3. Keplerov zakon

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3$$

- Moguće je odrediti ukupnu masu sustava ako je poznat ophodni period i velika poluos orbite ( $a$ ) reducirane mase:

$$a = a_1 + a_2$$

Veliku poluos orbite je moguće odrediti samo poznavanjem udaljenosti!

Ukoliko je poznata udaljenost  $\Rightarrow$  iz kombinacije omjera mase  $m_1/m_2$  i ukupne mase  $m_1+m_2$  moguće je odrediti **pojedinačne mase komponenata!**

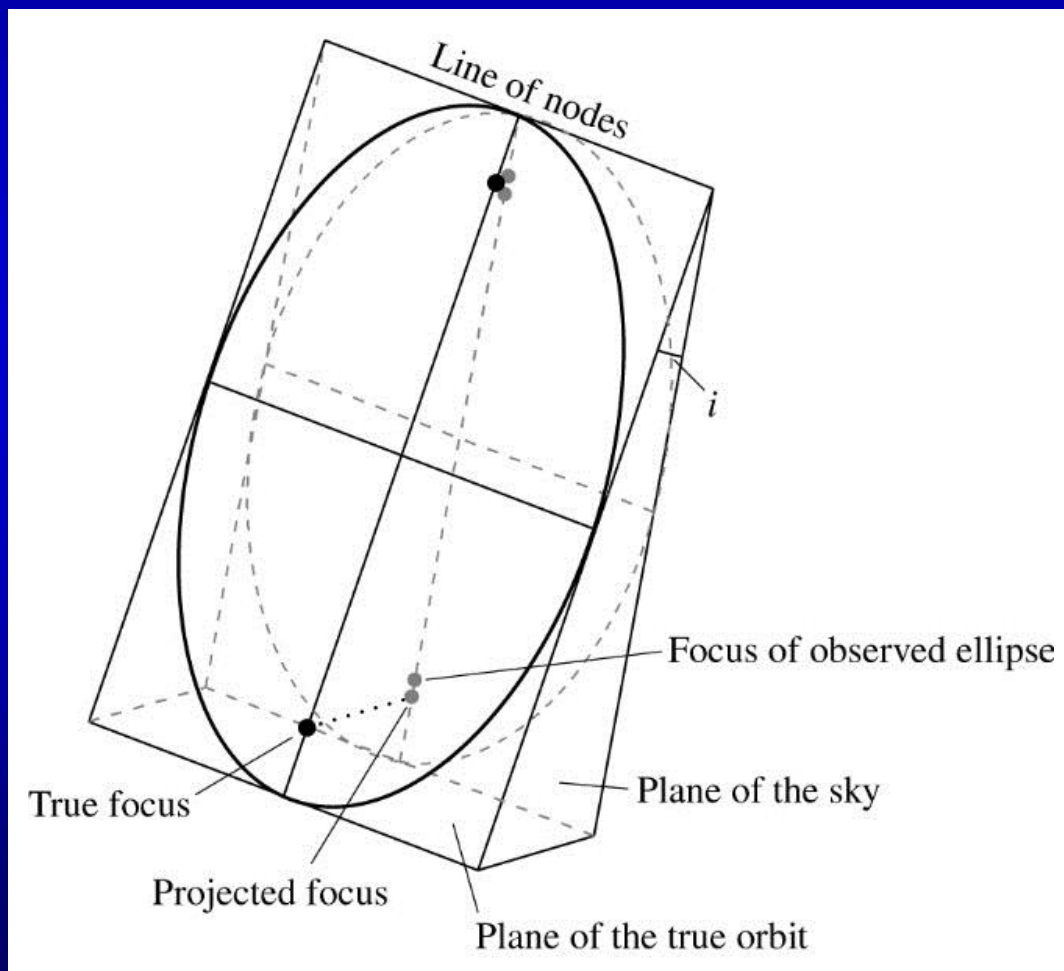
Poznavanje udaljenosti + razlučivanje komponenata + astrometrija  $\Rightarrow$  **određivanje mase komponenata**

## Problemi:

- vlastito gibanje centra mase (konstantna brzina centra mase)
- orbitalne ravnine nisu uvijek okomite na smjer doglednice!

$i \Rightarrow$  kut inklinacije između orbitalne ravnine i nebeske ravnine

- Orbite obiju zvijezda su u istoj ravnini
- Linija čvorova (presjecište orbitalne i nebeske ravnine) paralelna sa malom poluosi (pretpostavka)



- Opažamo projekcije velikih poluosi na nebesku ravninu a ne prave kuteve  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  razapete velikim poluosima:

$$\tilde{\alpha}_1 = \alpha_1 \cos i \quad \tilde{\alpha}_2 = \alpha_2 \cos i$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\alpha_2 \cos i}{\alpha_1 \cos i} = \frac{\tilde{\alpha}_2}{\tilde{\alpha}_1}$$

- Projekcija na nebeski svod ne utječe na određivanje omjera!
- Projekcija na nebeski svod utječe na određivanje ukupne mase iz 3. Keplerovog zakona!

### 3. Keplerov zakon:

$$m_1 + m_2 = \frac{4\pi^2 (\alpha d)^3}{G P^2} = \frac{4\pi^2}{G} \left( \frac{d}{\cos i} \right)^3 \frac{\tilde{\alpha}^3}{P^2}$$

$$\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2$$

- Potrebno je poznavati **kut inklinacije** za odrediti ukupnu masu!



- Projicirana elipsa na ravninu neba imat će drugačiji ekscentricitet i žarište u odnosu na pravu elipsu  $\Rightarrow$  nije u skladu s Keplerovim zakonom  $\rightarrow$  centar mase nije u žarištu elipse!  $\Rightarrow$  omogućuje određivanje kuta inklinacije!

Dodatni problemi: elipsa može biti nagnuta u odnosu na veliku poluos i zarotirana oko doglednice

- Određivanje pojedinačnih masa u optički dvojnem sustavu čak i kada udaljenost nije poznata  $\Rightarrow$  poznavanje **krivulje radijalnih brzina**

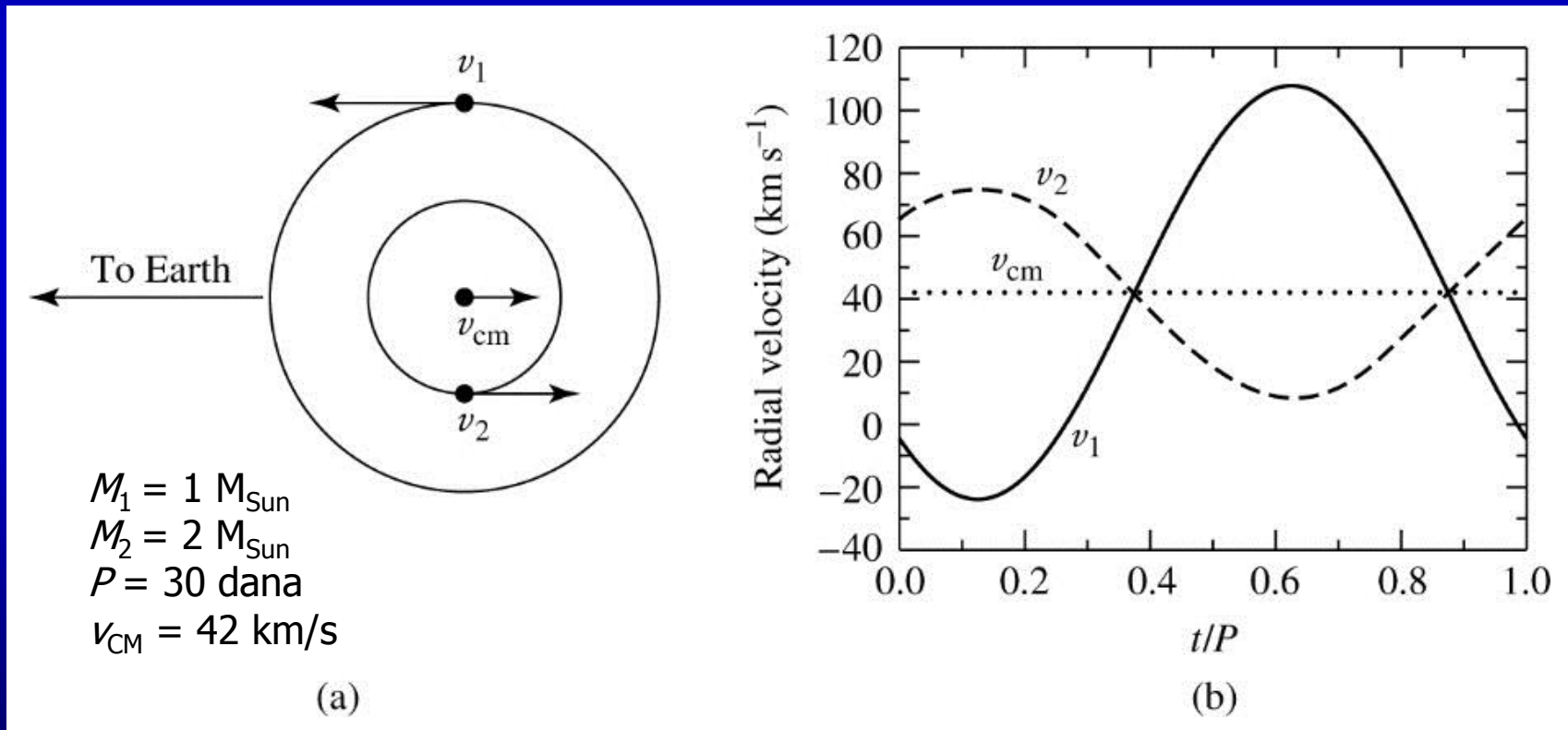
# POMRČINSKE SPEKTROSKOPSKI DVOJNE ZVIJEZDE

- Najvažnija vrsta dvojnih zvijezda
- Zvijezde nisu optički razlučene već samo spektroskopski
- Određivanje mase, polumjera, omjera zračenja i efektivne temperature komponenti

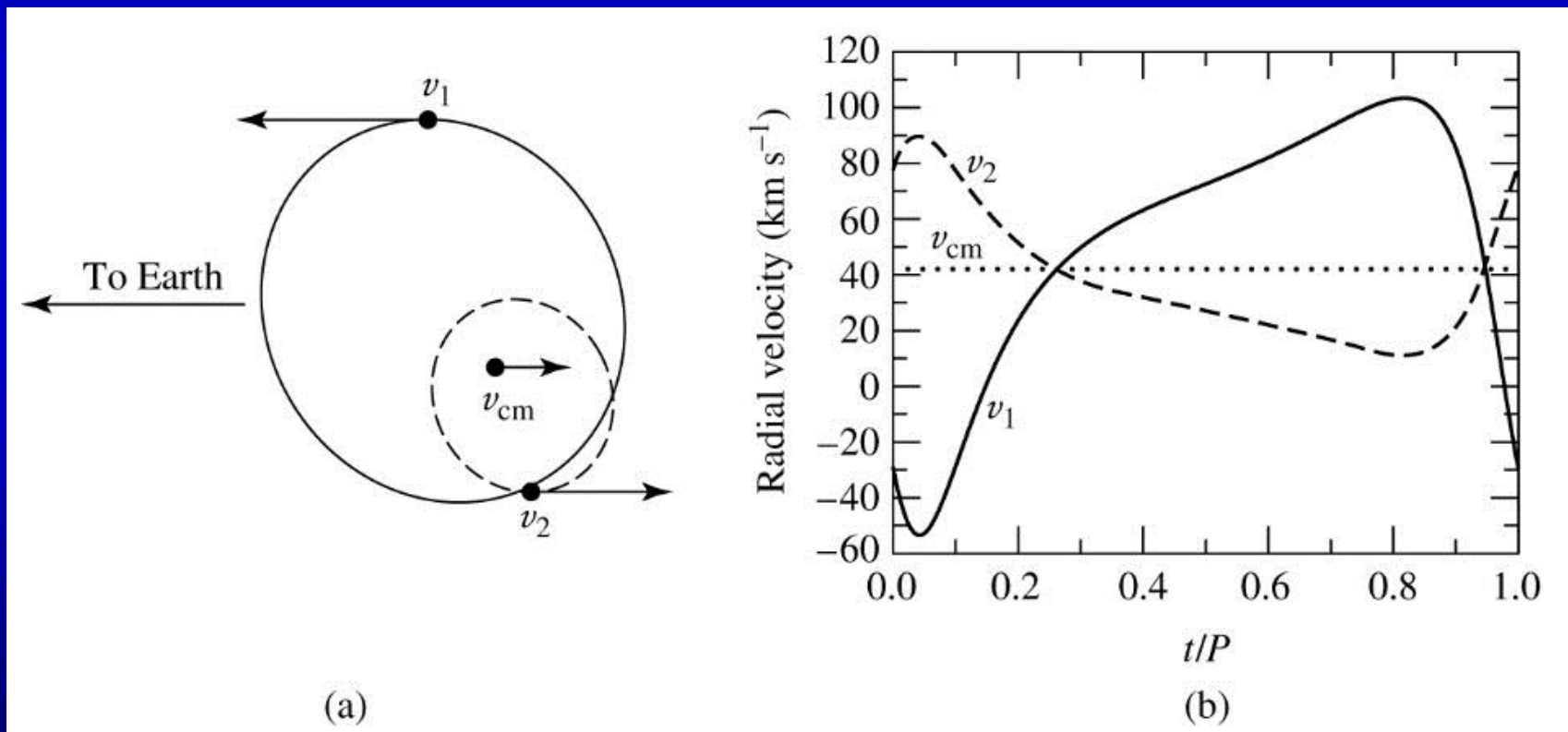
Spektroskopski dvojna zvijezda s razlučenom spektralnom linijom obiju komponente:

- Nije moguće vizualno razlučiti komponente  $\Rightarrow$  orbita je nepoznata
- Kut inklinacije utječe na određivanje mase i na opažene radijalne brzine  $\Rightarrow$  radijalne brzine ne mogu biti veće od:  
$$v_{1r}^{max} = v_1 \sin i \quad v_{2r}^{max} = v_2 \sin i$$
- Izmjerena radijalna brzina ovisi o trenutnom položaju zvijezde na orbiti

- Za kružne orbite  $\Rightarrow$  brzina zvijezde je konstantna
- Ako je i orbitalna ravnina u smjeru doglednice ( $i = 90^\circ$ )  $\Rightarrow$  **sinusoidalna krivulja radijalnih brzina**
- Promjena inklinacije samo mijenja amplitudu za faktor  $\sin i$  ali ne i oblik krivulje



- Za eliptične orbite  $\Rightarrow$  krivulja brzina **nije sinusoidalna**
- Oblik krivulje brzina ovisi o orijentaciji orbite prema doglednici, čak i za isti kut inklinacije
- Većina orbita dvojnih sustava su gotovo kružne!!
- Plimno zaključavanje (tidal locking) i sinkronizacija orbita



Pretpostavka: orbitalni ekscentricitet je mali, a orbite gotovo kružne:  $e \ll 1 \Rightarrow$  brzine zvijezda su gotovo konstantne:

$$v_1 = 2\pi a_1/P, v_2 = 2\pi a_2/P$$

Omjer mase:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{v_{2r}/\sin i}{v_{1r}/\sin i} = \frac{v_{2r}}{v_{1r}}$$

- Omjer masa je moguće odrediti bez poznavanja udaljenosti i kuta inklinacije, samo uz pomoć mjerenja radijalnih brzina!
- Određivanje ukupne mase zahtjeva poznavanje kuta inklinacije:

$$a = a_1 + a_2 = \frac{P}{2\pi} (v_1 + v_2)$$

u 3. Keplerov zakon:

$$m_1 + m_2 = \frac{P}{2\pi G} (v_1 + v_2)^3$$

Ukupna masa dobivena mjerenjem radijalnih brzina komponentata:

$$m_1 + m_2 = \frac{P}{2\pi G} \frac{(v_{1r} + v_{2r})^3}{\sin^3 i}$$

- Ukupnu masu sustava je moguće dobiti **SAMO** ako su poznate radijalne brzine obiju komponentata!
- Često je poznata radijalna brzina samo svjetlije komponente  $\Rightarrow$  **JEDNOLINIJSKE SPEKTROSKOPSKI DVOJNE ZVIJEZDE**
- Ako je moguće opažati samo spektar zvijezde 1 i izmjeriti njenu radijalnu brzinu  $v_{1r}$ , radijalnu brzinu druge zvijezde zamijenimo omjerom mase:

$$m_1 + m_2 = \frac{P}{2\pi G} \frac{v_{1r}^3}{\sin^3 i} \left( 1 + \frac{m_1}{m_2} \right)^3$$

- Ovisnost  $i$  o masama  $i$  o kutu inklinacije

## Funkcija mase:

$$\frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \sin^3 i = \frac{P}{2\pi G} v_{1r}^3$$

- Desna strana jednadžbe ovisi samo o **opaženim varijablama**: periodu i radijalnoj brzini vidljive komponente
- Nemamo informaciju o omjeru masa jer druga komponenta nije vidljiva
- Korisna za statistička istraživanja ili ukoliko je masa barem jedne komponente poznata na osnovu nekih drugih mjerenja
- Moguće odrediti minimalnu masu  $m_2$  komponente 2 ukoliko je poznat kut inklinacije ili masa  $m_1$  komponente 1  $\Rightarrow$

Primjena: **određivanje mase extrasolarnih planeta:**

## Funkcija mase:

$$\frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \sin^3 i = \frac{P}{2\pi G} v_{1r}^3$$

- poznata je masa zvijezde ( $m_1$ ) i promjena njene radijalne brzine  $v_{1r}$  na orbiti oko zajedničkog centra mase zvijezde i planeta
- ukupna masa jednaka je masi zvijezde:  $m = m_1 + m_2 \approx m_1$   
 $\Rightarrow$  mjerenjem radijalne brzine zvijezde Dopplerovim pomakom određena je **minimalna masa planeta**  $m_2 \sin i$



- Nije moguće odrediti mase komponente ukoliko je nepoznat kut inklinacije, čak i kada je moguće izmjeriti radijalne brzine obiju komponentata  $\Rightarrow$  statistička procjena mase na osnovu mjerenja velikog broja dvojnih sustava uz poznate druge parametre zvijezda (grupiranje po luminozitetu i temperaturi)
- Na velikom uzorku usrednjava se  $\sin^3 i$ :

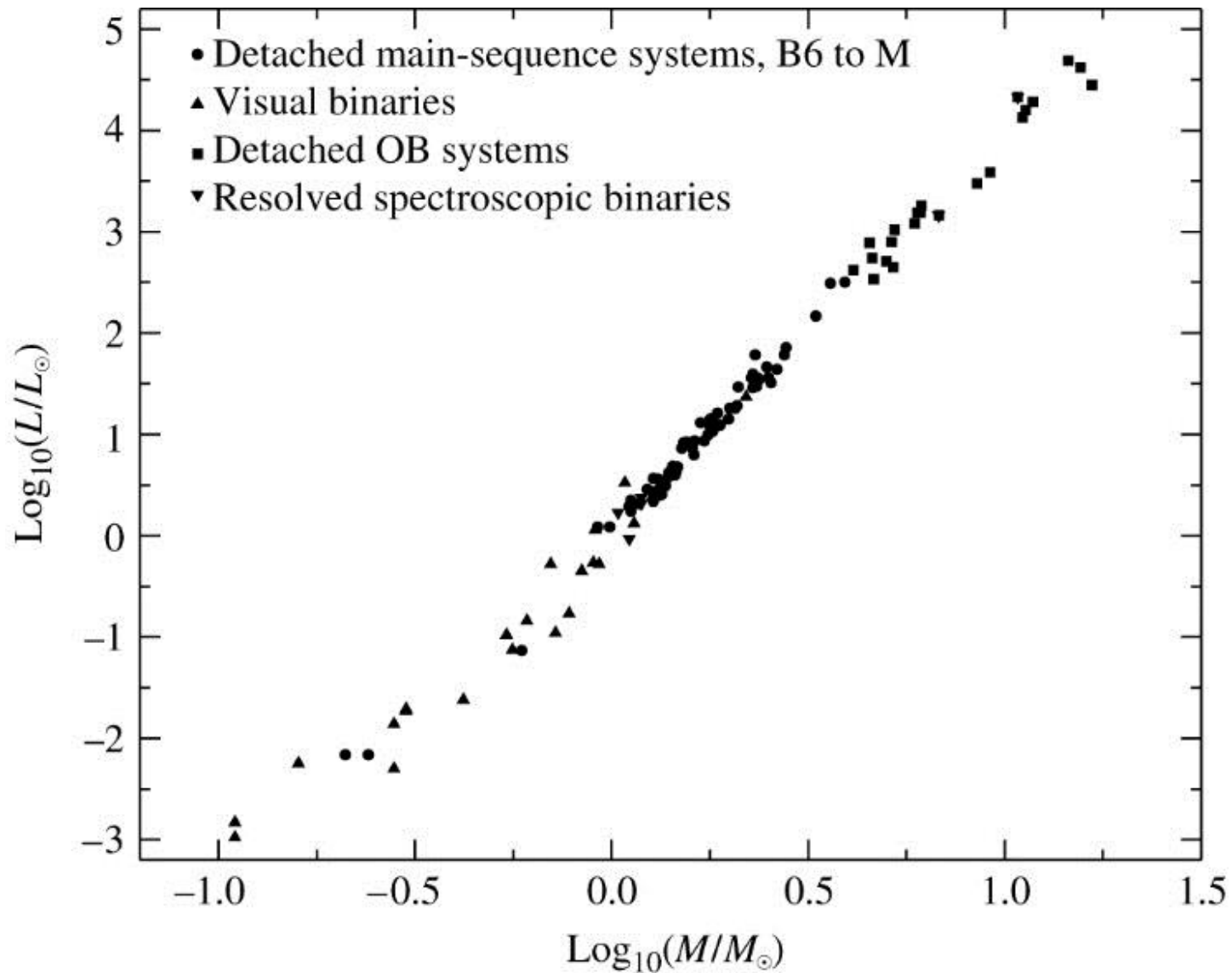
$$\langle \sin^3 i \rangle = \frac{3\pi}{16} = 0.589$$

Uslijed malog Dopplerovog pomaka pri malim kutevima inklinacije, vjerojatnost otkrića spektroskopski dvojne zvijezde je veća ukoliko je kut inklinacije puno veći od  $0^\circ \Rightarrow$

**SELEKCIJSKI EFEKT:**

$$\langle \sin^3 i \rangle \approx \frac{2}{3}$$

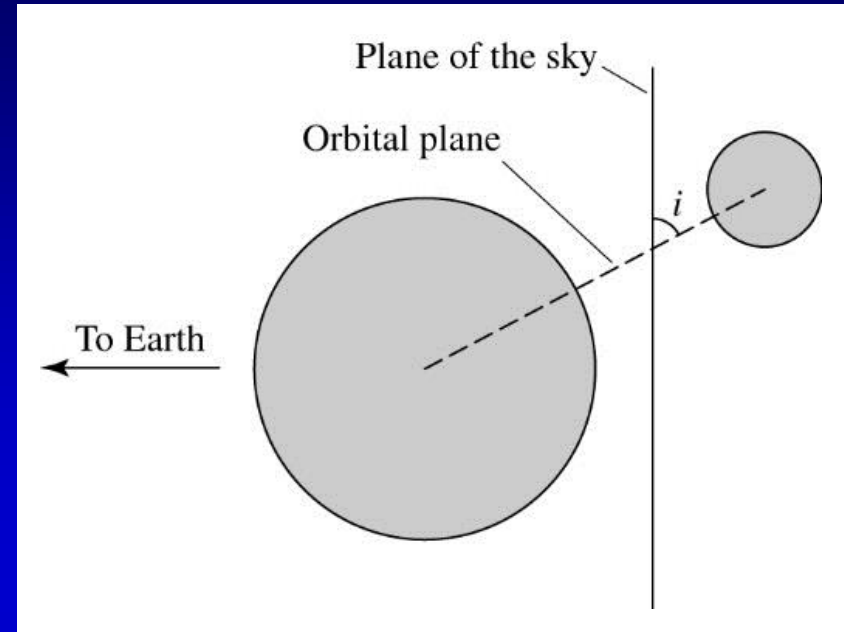
$\Rightarrow$  **RELACIJA MASA – LUMINOZITET**



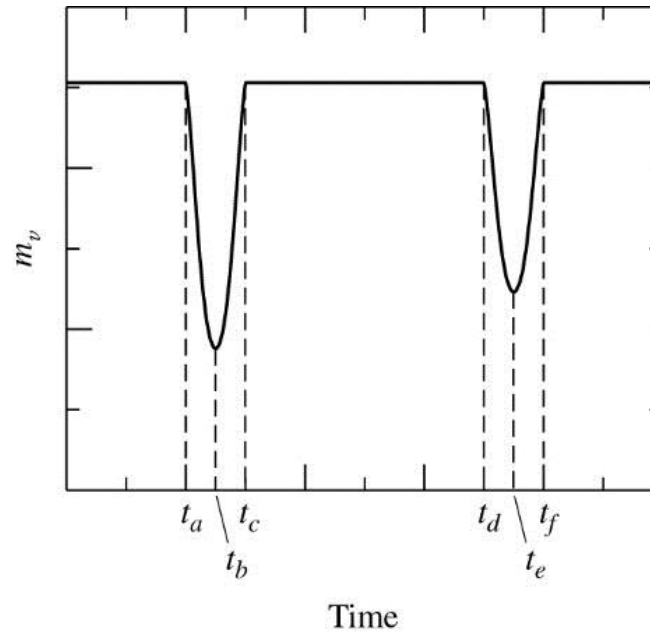
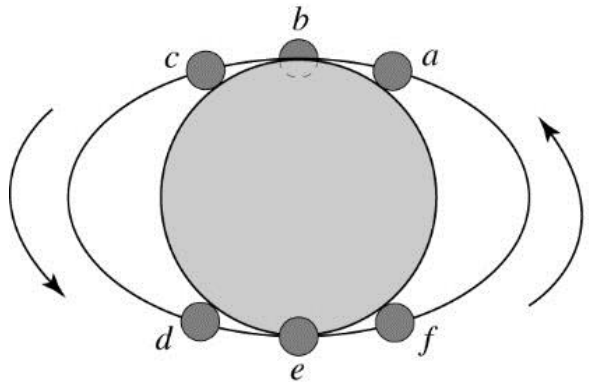
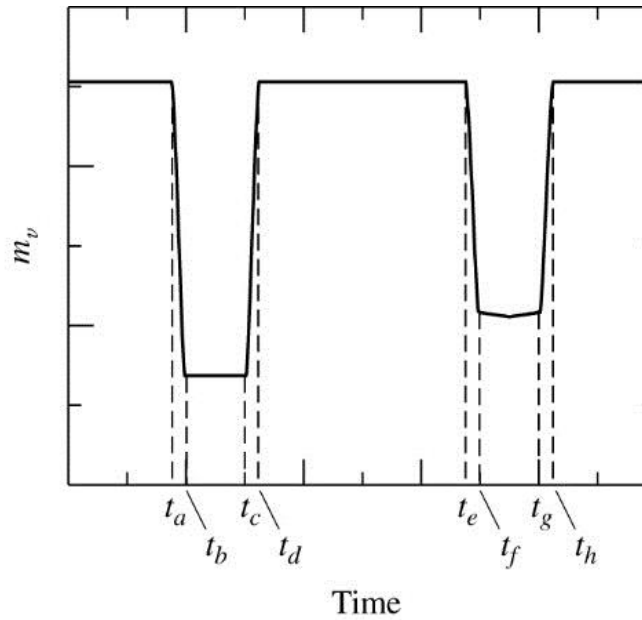
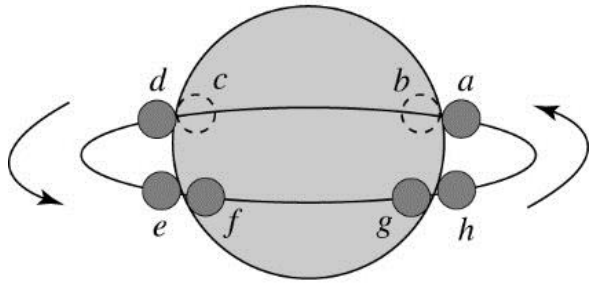
Carroll, B.W., Ostlie, D.A., 2006, 'Introduction to Modern Astrophysics', Pearson  
(Data from Popper, 1980, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, 18, 115)

# POMRČINSKE DVOJNE ZVIJEZDE

- Ukoliko je razmak između komponenata pomrčinskog dvojnog sustava puno veći od zbroja njihovih polumjera  $\Rightarrow$  kut inklinacije  $i$  blizu je  $90^\circ$
- Pogreška od samo 10% u određivanju mase ukoliko je kut inklinacije  $75^\circ$  umjesto pretpostavljenih  $90^\circ$
- Oblik svjetlosne krivulje daje uvid u kut inklinacije:
  - ukoliko veća zvijezda u potpunosti zaklanja manju, nastat će gotovo konstantni minimum
  - ukoliko jedna komponenta ne zaklanja u potpunosti drugu, minimumi više nisu konstantni  $\Rightarrow$  kut inklinacije mora biti puno manji od  $90^\circ$



Carroll, B.W., Ostlie, D.A., 2006, 'Introduction to Modern Astrophysics', Pearson



Carroll, B.W.,  
Ostlie, D.A., 2006,  
'Introduction to  
Modern  
Astrophysics',  
Pearson

# Određivanje polumjera pomrčinske spektroskopski dvojne zvijezde

- Mjerenje trajanja pomrčine  $\Rightarrow$  određivanje polumjera komponenata dvojnog sustava
- Pretpostavka:  $i \approx 90^\circ \Rightarrow$  vrijeme između prvog kontakta ( $t_a$ ) i minimuma sjaja ( $t_b$ ) uz poznate orbitalne brzine komponenata određuje polumjer manje komponente (1)
- Pretpostavka: velika poluos manje komponente veća je od polumjera komponenata + kružna orbita  $\Rightarrow$  manja komponenta ( $r_1$ ) se giba okomito na doglednicu za vrijeme pomrčine:

$$r_1 = \frac{v}{2}(t_b - t_a)$$

Relativna brzina dviju komponenata (manje  $v_1$  i veće  $v_2$ ):

$$v = v_1 + v_2$$

Polumjer veće komponente  $r_2$ :

$$r_2 = \frac{v}{2}(t_c - t_a) = r_1 + \frac{v}{2}(t_c - t_b)$$

**Primjer:** Iz spektra pomrčinskog spektroskopskog dvojnog sustava s dvostrukim spektralnim linijama određen je orbitalni period  $P = 8.6$  godina te su izmjereni Dopplerovi pomaci vodikove Balmerove  $H\alpha$  linije ( $\lambda = 656.281$  nm) od  $\Delta\lambda_1 = 0.072$  nm za manju i  $\Delta\lambda_2 = 0.0068$  nm za veću komponentu sustava. Krivulje radijalnih brzina imaju sinusoidan oblik. Iz svjetlosne krivulje pomrčine određena su vremena  $t_b - t_a = 11.7$  sati i vrijeme trajanja minimuma sjaja  $t_c - t_b = 164$  dana

Odredite velike poluosi orbita komponentata, razmak između komponentata, mase i polumjere komponentata

- sinusoidan oblik krivulja brzina  $\Rightarrow$  kružne orbite

Radijalna brzina iz Dopplerovog pomaka manje komponente (1):

$$v_{r1} = \frac{\Delta\lambda_1}{\lambda} c = 33 \text{ km/s}$$

Radijalna brzina veće komponente (2):

$$v_{r2} = \frac{\Delta\lambda_2}{\lambda} c = 3.1 \text{ km/s}$$

Omjer masa komponenata:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{v_{r1}}{v_{r2}} = \frac{\Delta\lambda_1}{\Delta\lambda_2} = 10.6$$

Polumjeri orbita:

$$a_1 = \frac{v_{r1}P}{2\pi} = 1.42 \cdot 10^{12} \text{ m} = 9.5 \text{ AU}$$

$$a_2 = \frac{v_{r2}P}{2\pi} = 0.9 \text{ AU}$$

$$a = a_1 + a_2 = 10.4 \text{ AU}$$

3. Keplerov zakon u jedinicama Sunčeve mase, astronomskim jedinicama i godinama:

$$m_1 + m_2 = a^3 / P^2 = 15.2 M_{\text{Sun}}$$

Mase komponenata:

$$m_1 = 1.3 M_{\text{Sun}}; \quad m_2 = 13.9 M_{\text{Sun}}$$

Polumjer manje komponente:

$$r_1 = \frac{(v_{r1} + v_{r2})}{2} (t_b - t_a) = 7.6 \cdot 10^8 \text{ m} = 1.1 R_{\text{Sun}}$$

Polumjer veće komponente:

$$r_2 = 369 R_{\text{Sun}}$$



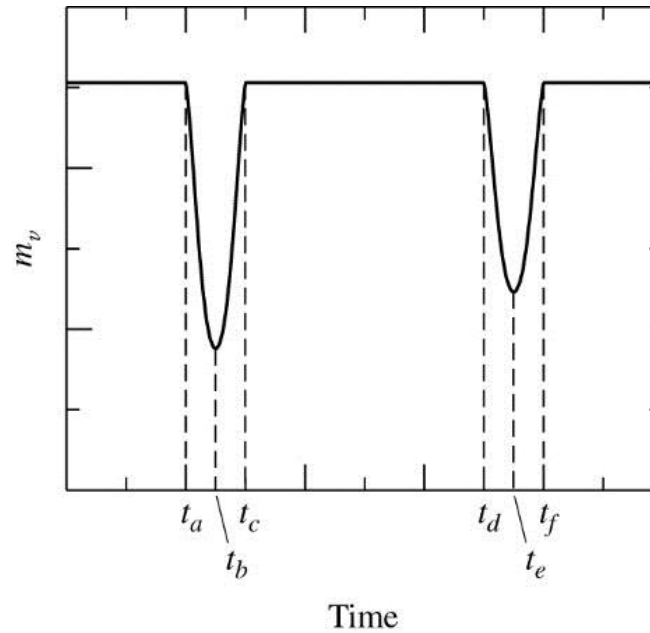
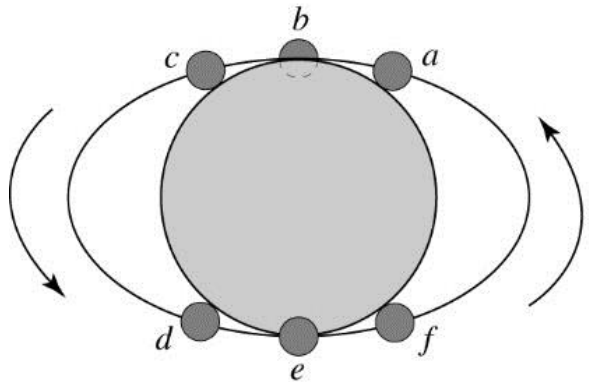
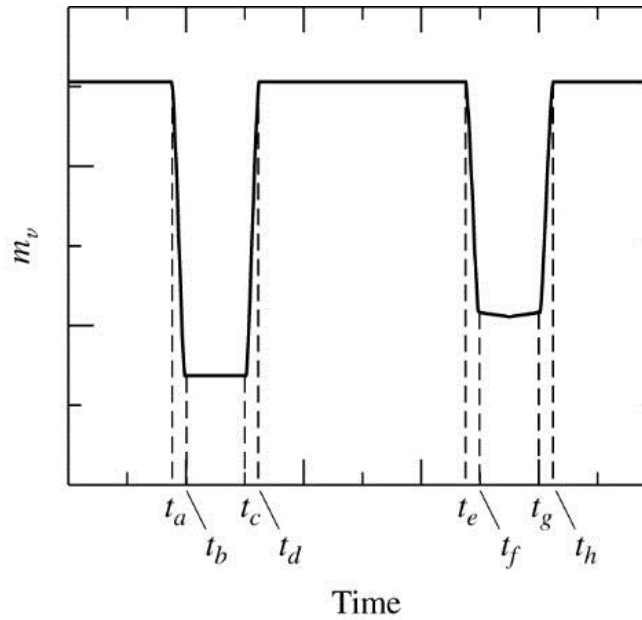
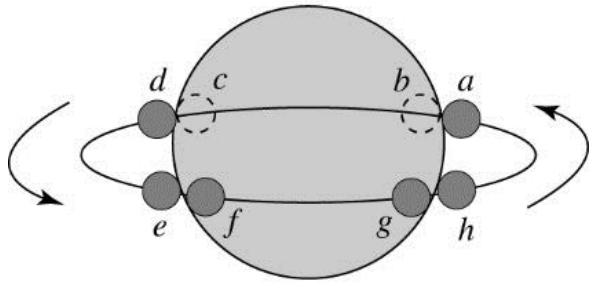
# Određivanje omjera efektivnih temperatura komponenata

- Usporedba sjaja za vrijeme pomrčine i za vrijeme kada su obje komponente vidljive
- Pretpostavka: komponente zrače kao crno tijelo
- Dva minimuma prisutna u svjetlosnoj krivulji: **primarni i sekundarni minimum**
- Minimum je dublji kada manja toplija komponenta biva zaklonjena većom hladnijom komponentom

Površinski tok zračenja sa zvijezde:

$$F_{rad} = F_{surf} = \sigma T_e^4$$

- Pri pomrčini toplije komponente hladnijom i obrnuto uvijek je ista površina zvijezde zaklonjena
- Pretpostavka: tok zračenja je jednak po cijeloj površini diska zvijezde (nema efekta tamnjenja ruba)



Carroll, B.W.,  
Ostlie, D.A., 2006,  
'Introduction to  
Modern  
Astrophysics',  
Pearson

Količina svjetla opažena kada su obje komponente vidljive:

$$B_0 = k(\pi r_1^2 F_{r1} + \pi r_2^2 F_{r2})$$

$k$  je konstanta ovisna o udaljenosti, međuzvezdanoj ekstinkciji i svojstvima teleskopa i detektora

**Primarni (dublji) minimum**  $\Rightarrow$  vruća manja komponenta prolazi iza veće hladnije komponente  $\rightarrow$  ako je manja komponenta u potpunosti pomračena:

$$B_{prim} = k\pi r_2^2 F_{r2}$$

**Sekundarni (plići) minimum:**

$$B_{sec} = k(\pi r_2^2 - \pi r_1^2) F_{r2} + k\pi r_1^2 F_{r1}$$

$k$  najčešće nije moguće odrediti  $\Rightarrow$  omjer dubina primarnog i sekundarnog minimuma omogućuje određivanje omjera efektivnih temperatura:

$$\frac{B_0 - B_{prim}}{B_0 - B_{sec}} = \frac{F_{r1}}{F_{r2}}$$

$$\frac{B_0 - B_{prim}}{B_0 - B_{sec}} = \frac{T_1}{T_2}$$

**Primjer:** Svjetlosna krivulja pomrčinskog dvojnog sustava iz prethodnog primjera pokazuje prividni bolometrijski sjaj u maksimumu (izvan pomrčine) +6.3, najniži prividni sjaj u primarnom minimumu +9.6 i u sekundarnom minimumu +6.6. Odredite omjer efektivnih temperatura komponenata.

$$m_{bol,0} = 6.3$$

$$m_{bol,p} = 9.6$$

$$m_{bol,s} = 6.6$$

Omjer sjaja u primarnom minimumu i najvećeg sjaja:

$$\frac{B_p}{B_0} = 100^{(m_{bol,0} - m_{bol,p})/5} = 0.048$$

Omjer sjaja u sekundarnom minimumu i najvećeg sjaja:

$$\frac{B_s}{B_0} = 100^{(m_{bol,0} - m_{bol,s})/5} = 0.76$$

Omjer tokova zračenja manje toplije (1) i veće hladnije komponente (2):

$$\frac{F_{r1}}{F_{r2}} = \frac{B_0 - B_p}{B_0 - B_s} = \frac{1 - B_p/B_0}{1 - B_s/B_0} = 3.97$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \left( \frac{F_{r1}}{F_{r2}} \right)^{1/4} = 1.41$$

# NUMERIČKO MODELIRANJE

- Numerički modeli na osnovu kojih je moguće odrediti mase, polumjere i efektivne temperature komponenata, ali i niz drugih važnih fizičkih svojstava
- Bliski dvojni sustavi → gravitacijske sile, rotacijsko i orbitalno gibanje ⇒ površina više nije sferna ⇒ površina zvijezde je izdužena ili spljoštena
- Efekt tamnjenja ruba diska (raspodjela toka zračenja po opaženoj površini diska), promjena površinske temperature
- Numeričko određivanje gravitacijskih ekvipotencijalnih ploha ⇒ **sintetičke svjetlosne krivulje** uspoređuju se s opaženim → podešavaju se parametri modela sve dok sintetička svjetlosna krivulja nije usklađena s opaženom

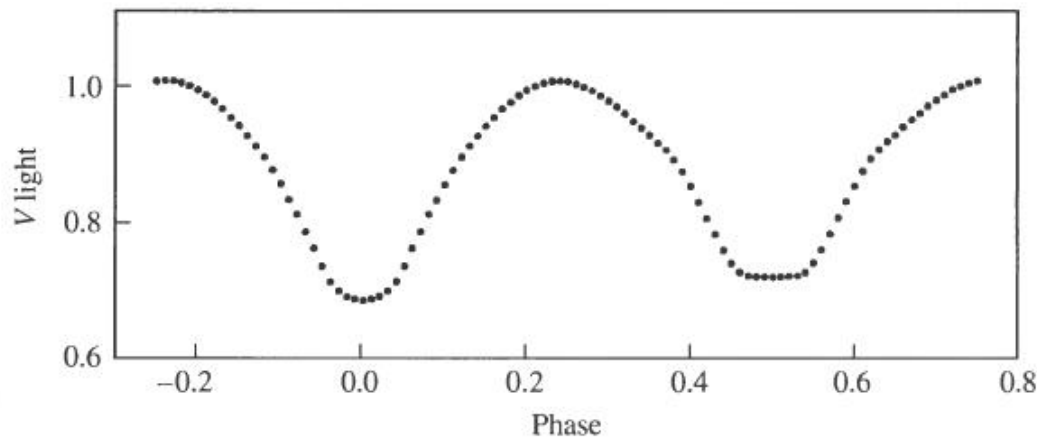
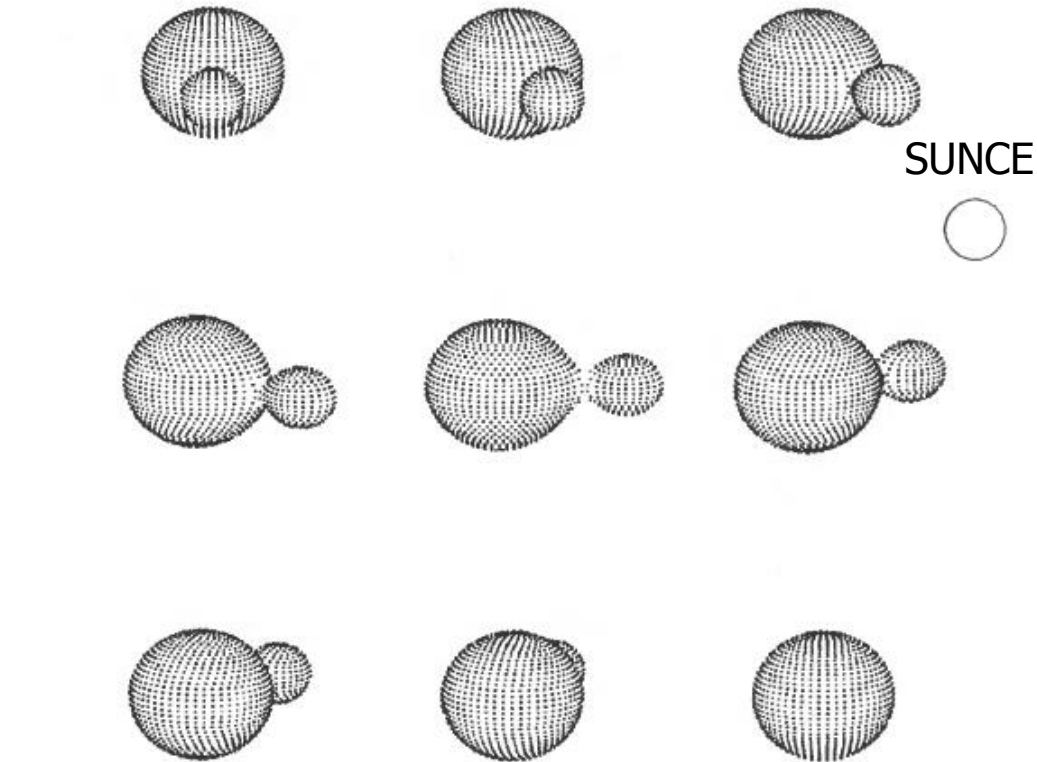
# RR Centauri

$P = 0.6057$  days

$e = 0.0$

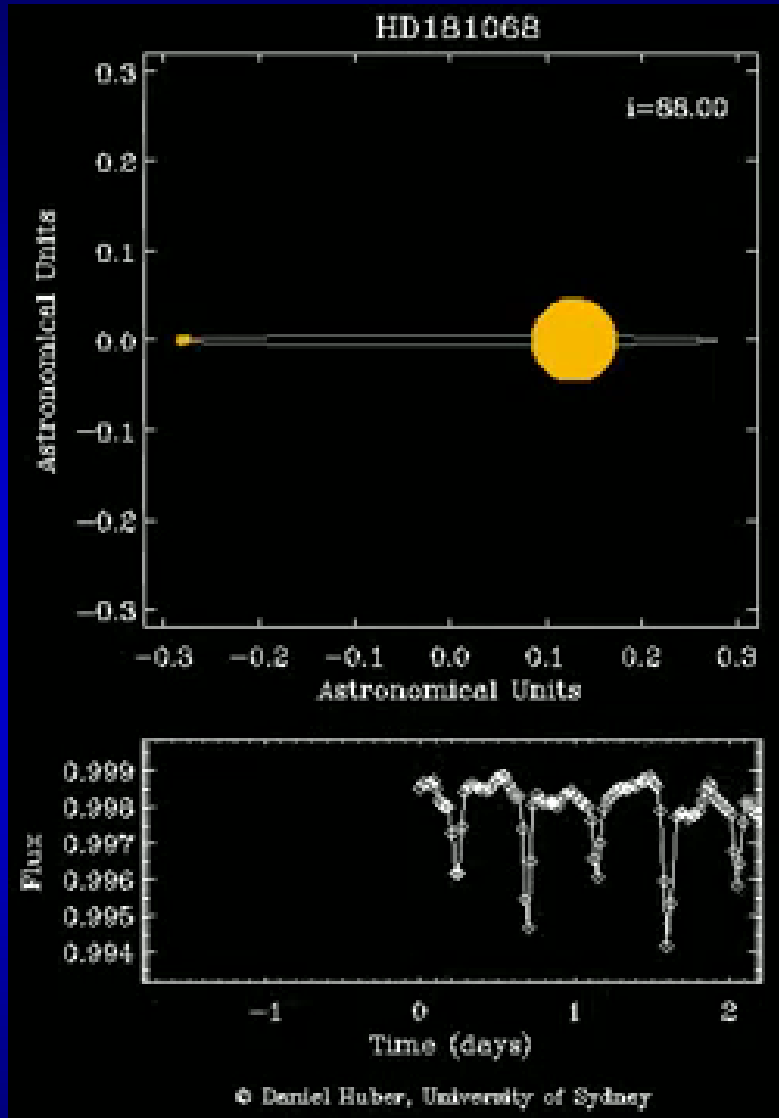
$M_1 = 1.80 M_{\text{Sun}}$

$M_2 = 0.37 M_{\text{Sun}}$



Wilson, 1994, *Publ. Astron. Soc. Pac.*, 106, 921





## HD 181068 'Trinity'

Trostruki zvjezdani  
sustav

$$P_1 = 45.5 \text{ dana}$$

$$P_2 = 0.9 \text{ dana}$$

Crveni div + 2  
bijela patuljka

D. Huber, University of  
Sidney

# OPAŽANJE EKSTRASOLARNIH PLANETA

A. Wolszczan, D. Frail (1992.) → **otkriće prvog extrasolarnog planeta** u orbiti oko pulsara → otkriven opažanjem promjena u pravilnoj radio emisiji pulsara

M. Mayor, D. Queloz (1995.) → otkriće extrasolarnog planeta u orbiti oko zvijezde glavnog niza (51 Peg)

Direktno opažanje extrasolarnog planeta je otežano uslijed velike razlike u sjaju zvijezde i planeta

G. Chauvin et al. (2004.) → prvo direktno opažanje extrasolarnog planeta u infracrvenom oko smeđeg patuljka

Broj otkrivenih i potvrđenih extrasolarnih planeta: 3541

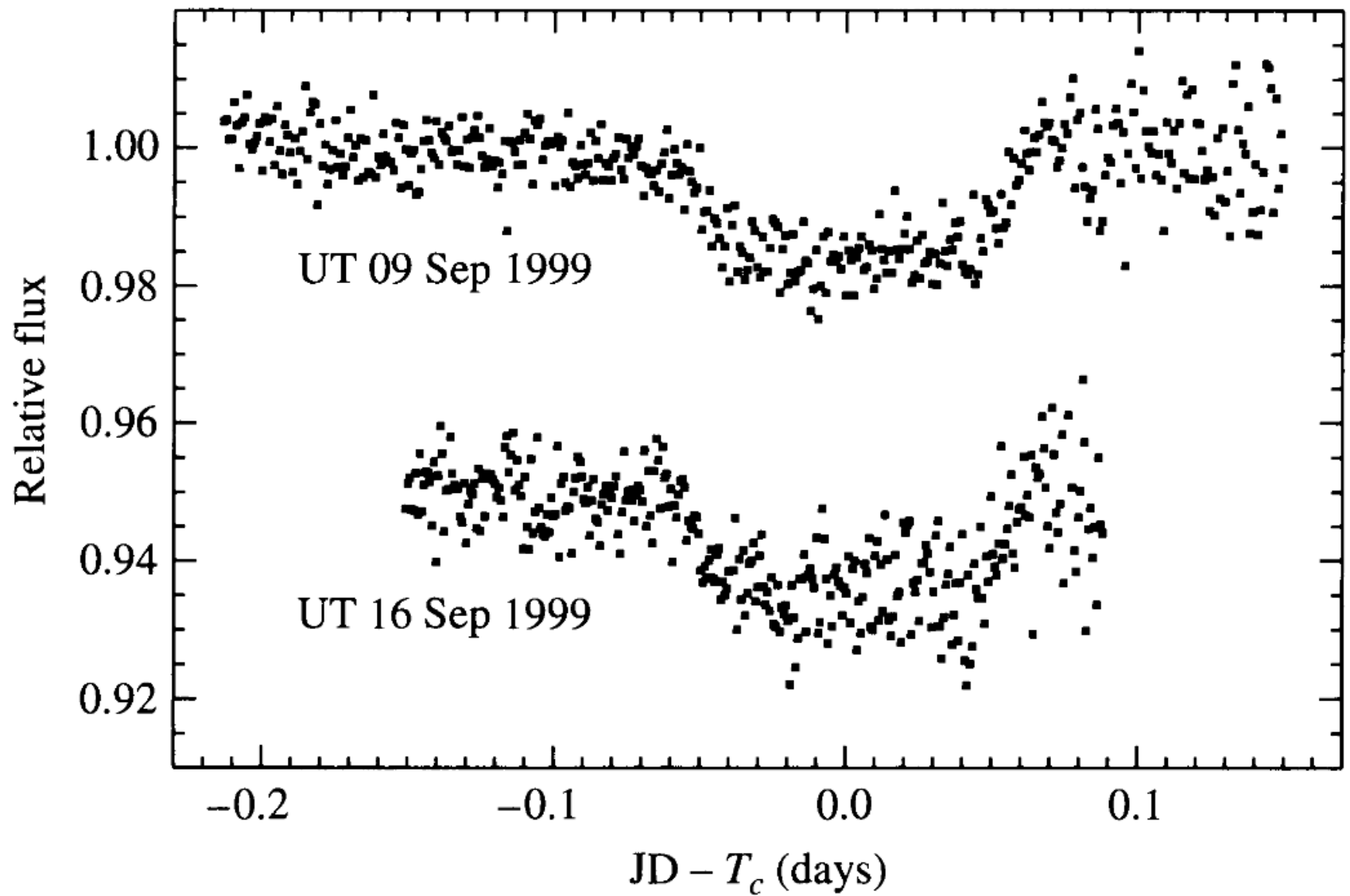
# Metode detekcije ekstrasolarnih planeta

1. Radijalne brzine

2. Astrometrija

3. Tranzit (pomračenje)

- Vrlo precizna mjerenja radijalnih brzina zvijezde:  $<1$  m/s
- Zvijezda orbitira oko zajedničkog centra mase → vrlo male radijalne brzine
- Planeti otkriveni metodom radijalnih brzina: masivni planeti blizu zvijezde (vrući Jupiteri, vrući Neptuni)
- Planeti s dužim orbitalnim periodima zahtijevaju duža opažanja
- Opažanje prvog tranzita ekstrasolarnog planeta (1999.) → smanjenje sjaja reda mmag
- Metoda tranzita → određivanje polumjera planeta i kuta inklinacije



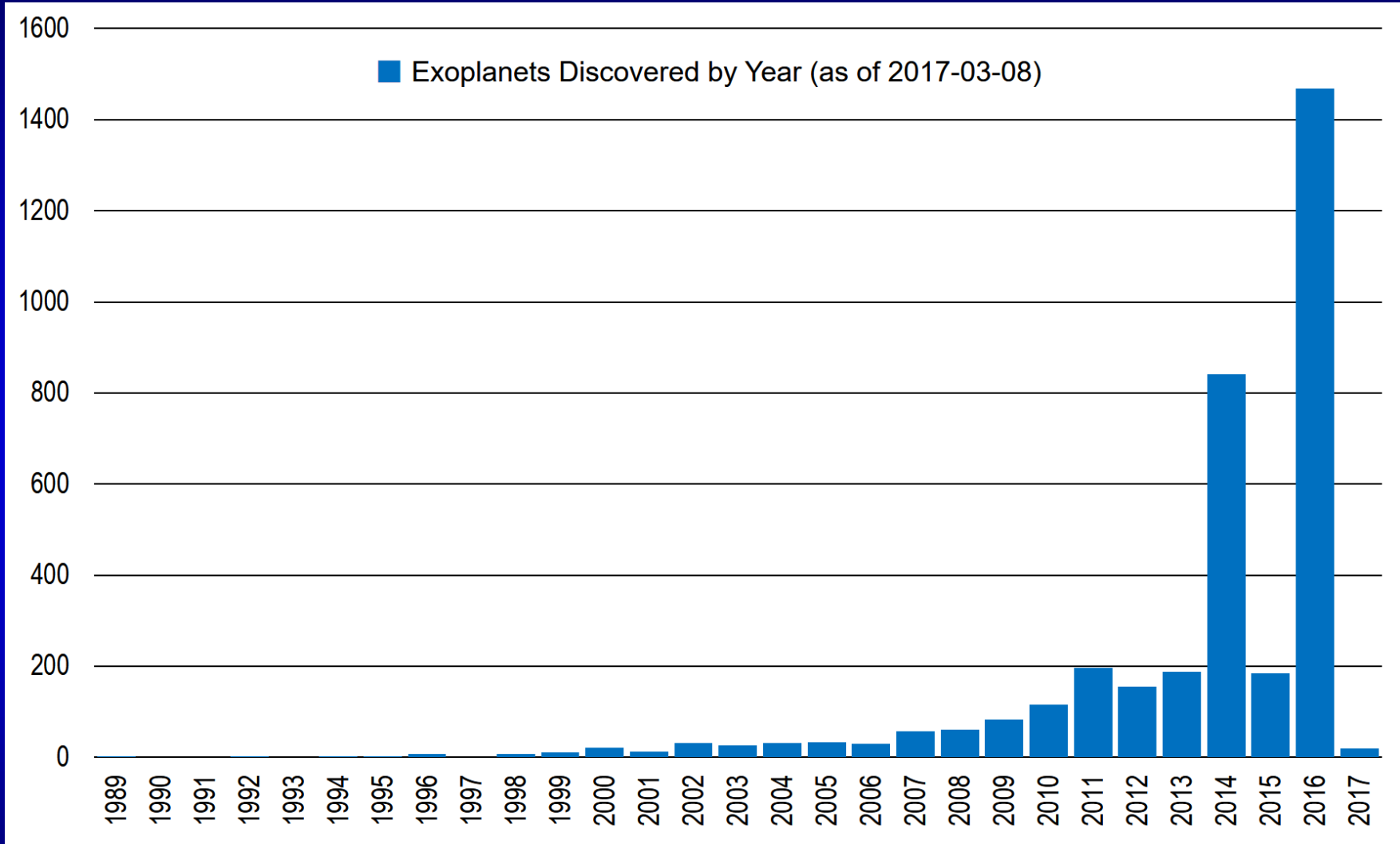
Charbonneau, Brown, Latham, Mayor, 1999, *Astrophys. J.*, 529, L45

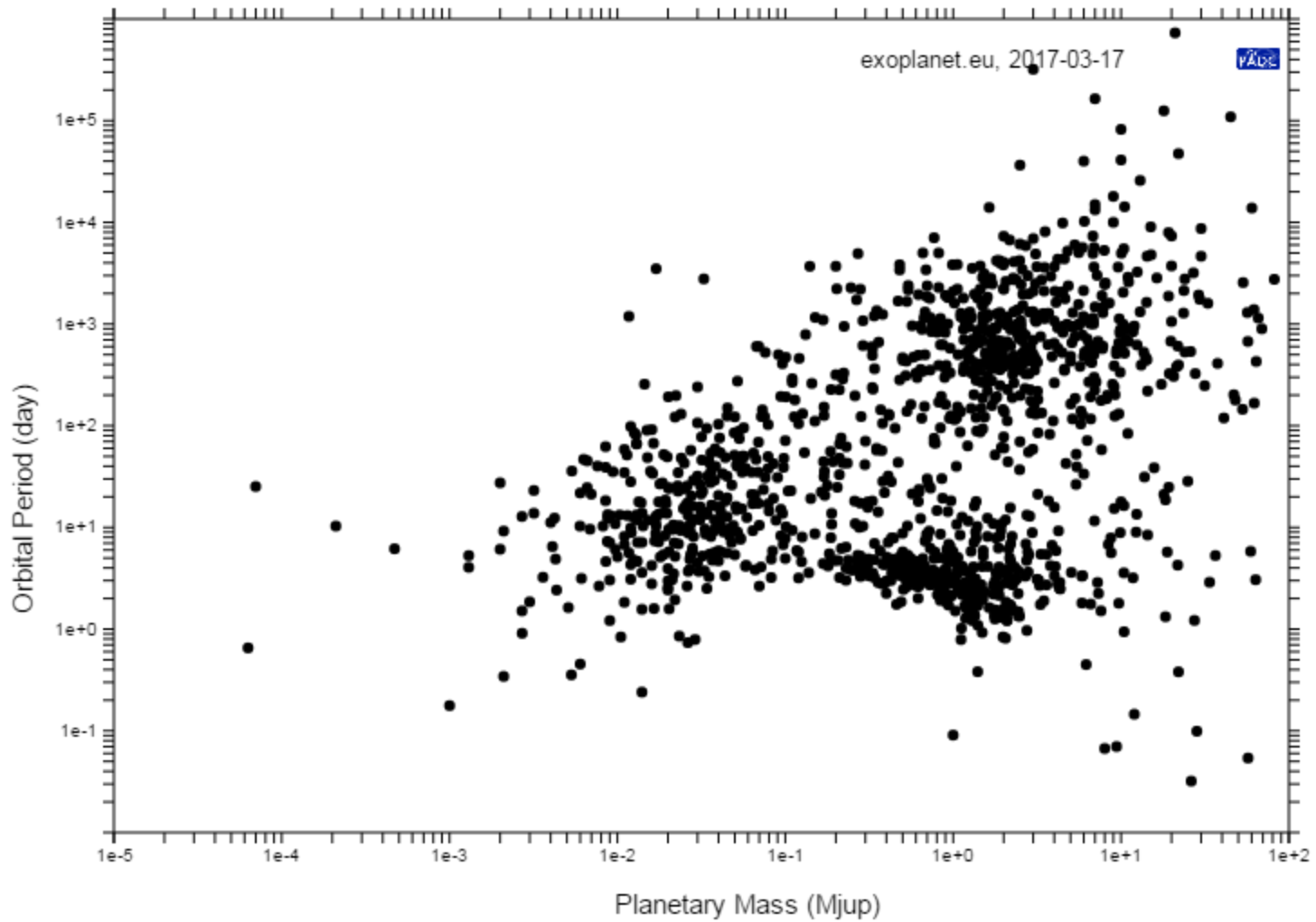
- Tranzit + radijalne brzine  $\Rightarrow$  masa planeta i orbitalne karakteristike
- Metoda tranzita  $\rightarrow$  daleki sustavi, iz polumjera planeta određuje se **gustoća**  $\rightarrow$  **planet sličan Zemlji u habitabilnoj zoni**

Programi i teleskopi za otkrivanje planeta metodom tranzita:

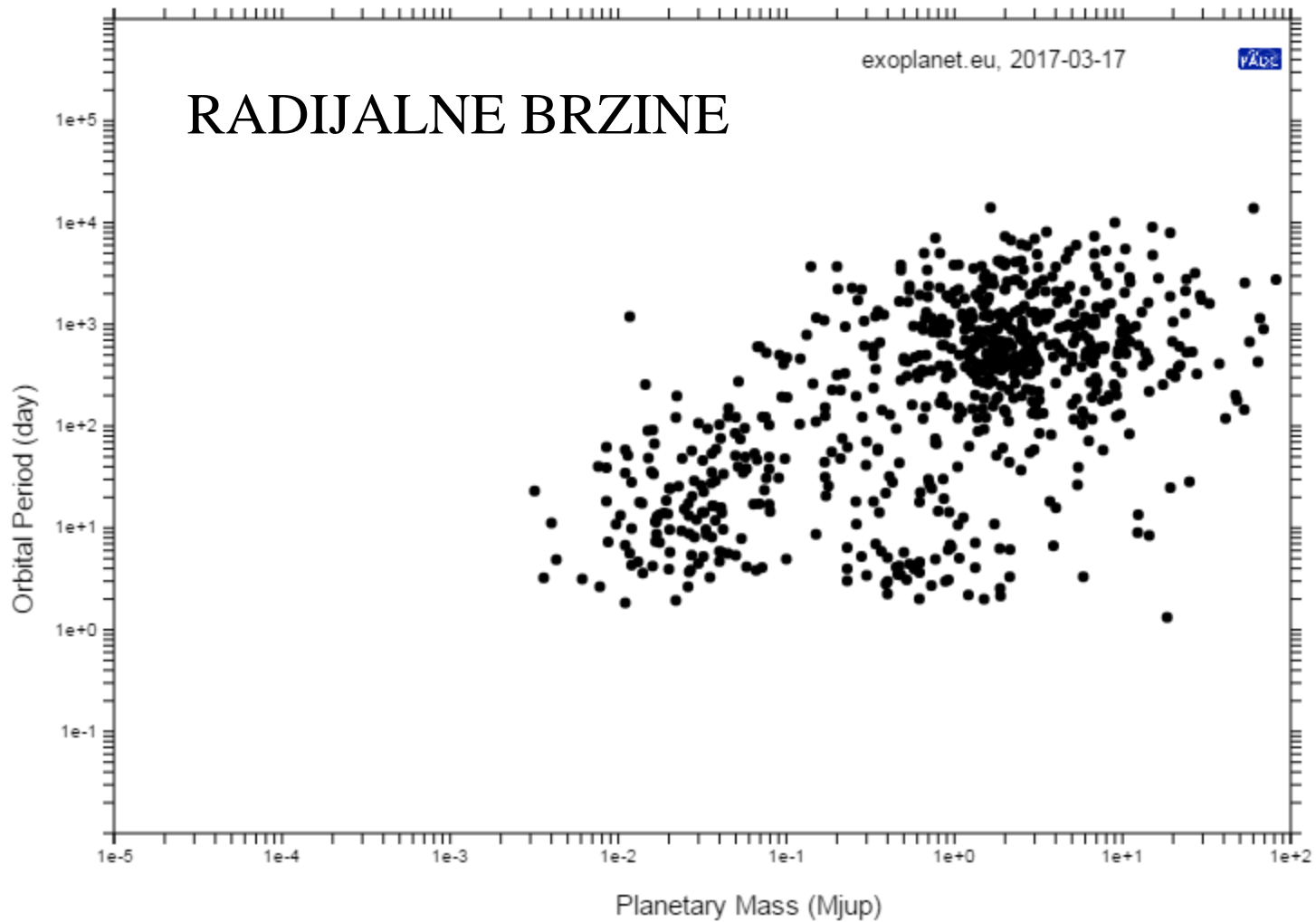
- OGLE
- Kepler
  
- Astrometrija  $\rightarrow$  prvi planet potvrđen ovom metodom u sustavu Gliese 876 pomoću HST-a (2002.)

**GAIA: astrometrija**



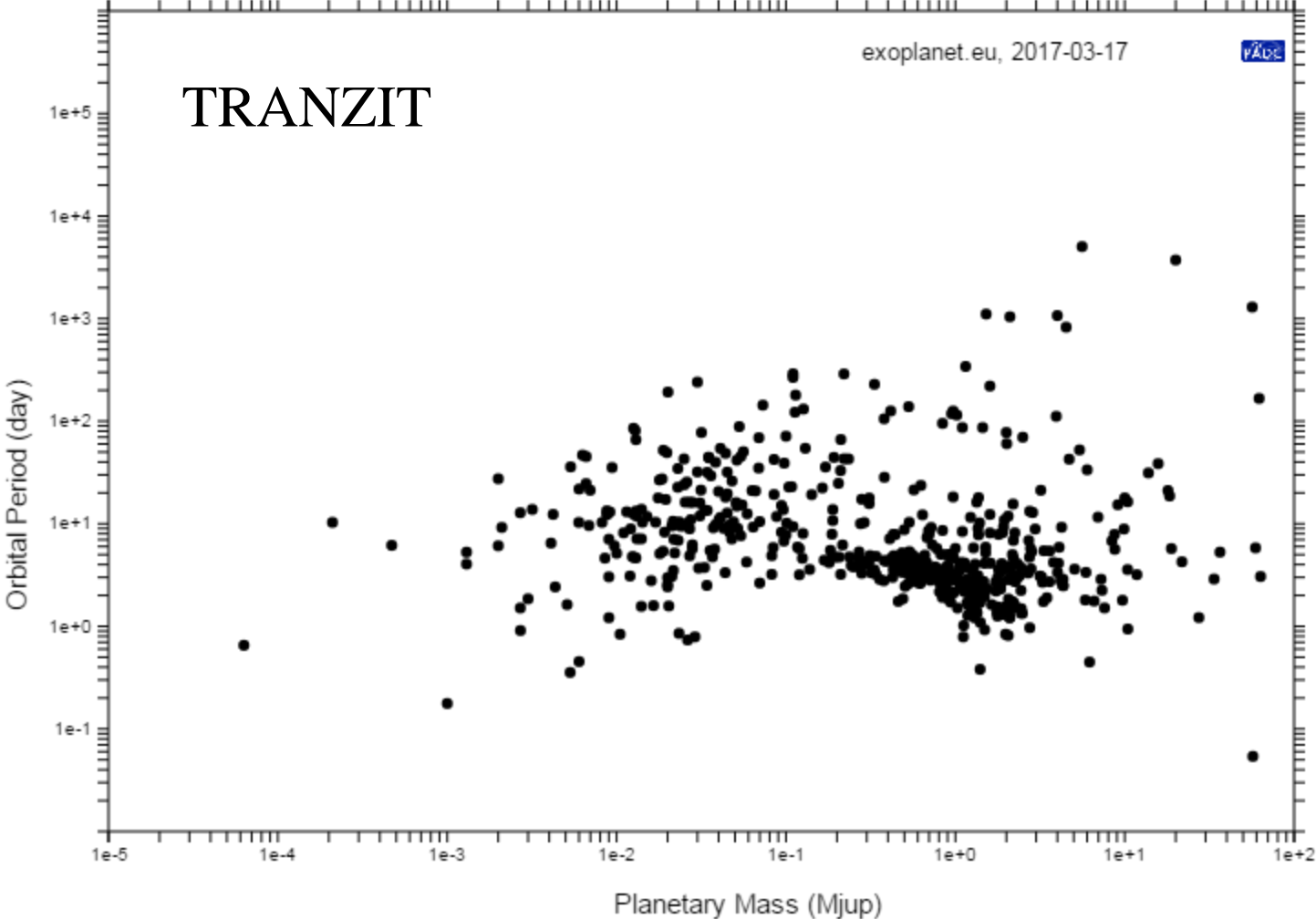


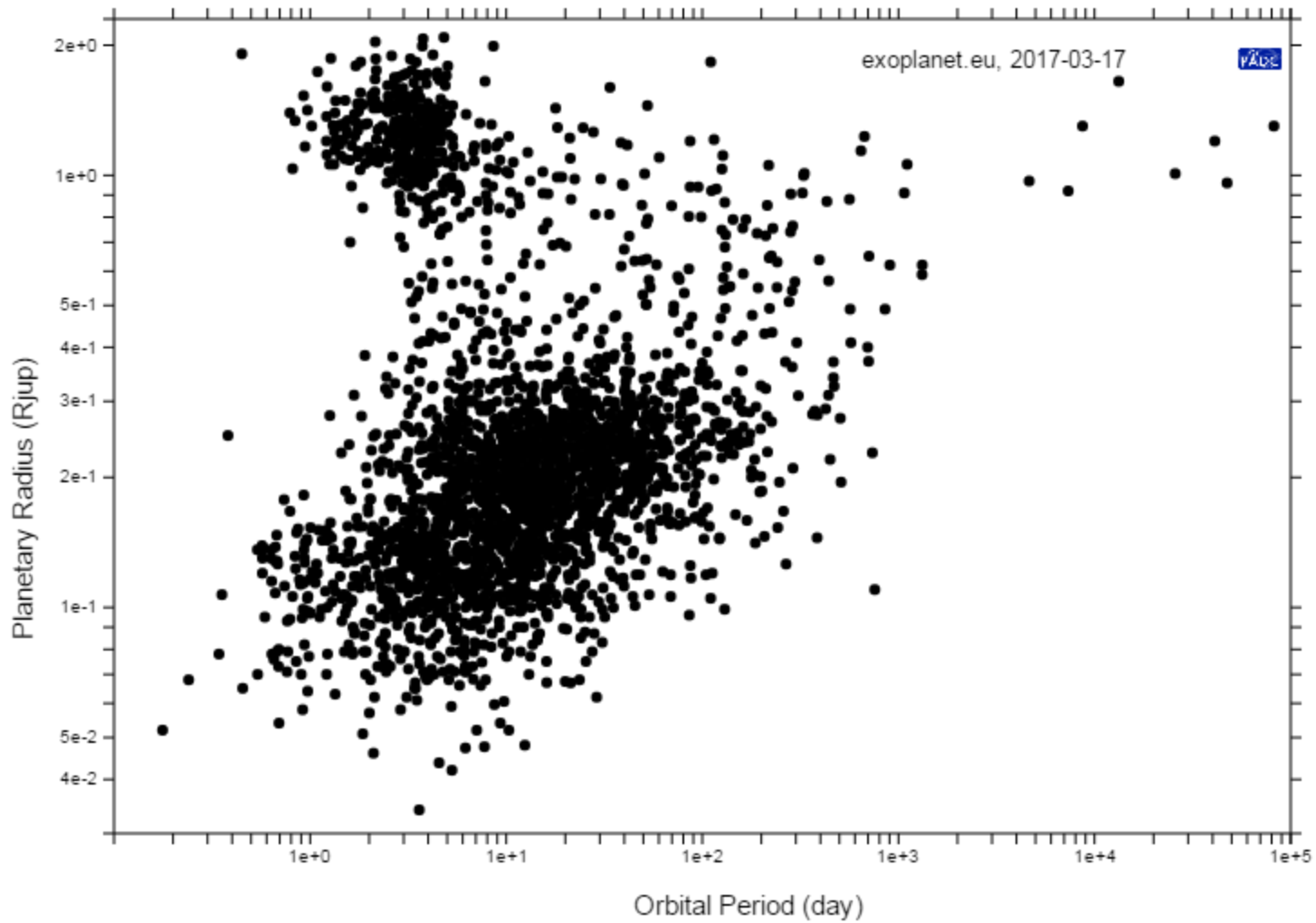
# RADIJALNE BRZINE



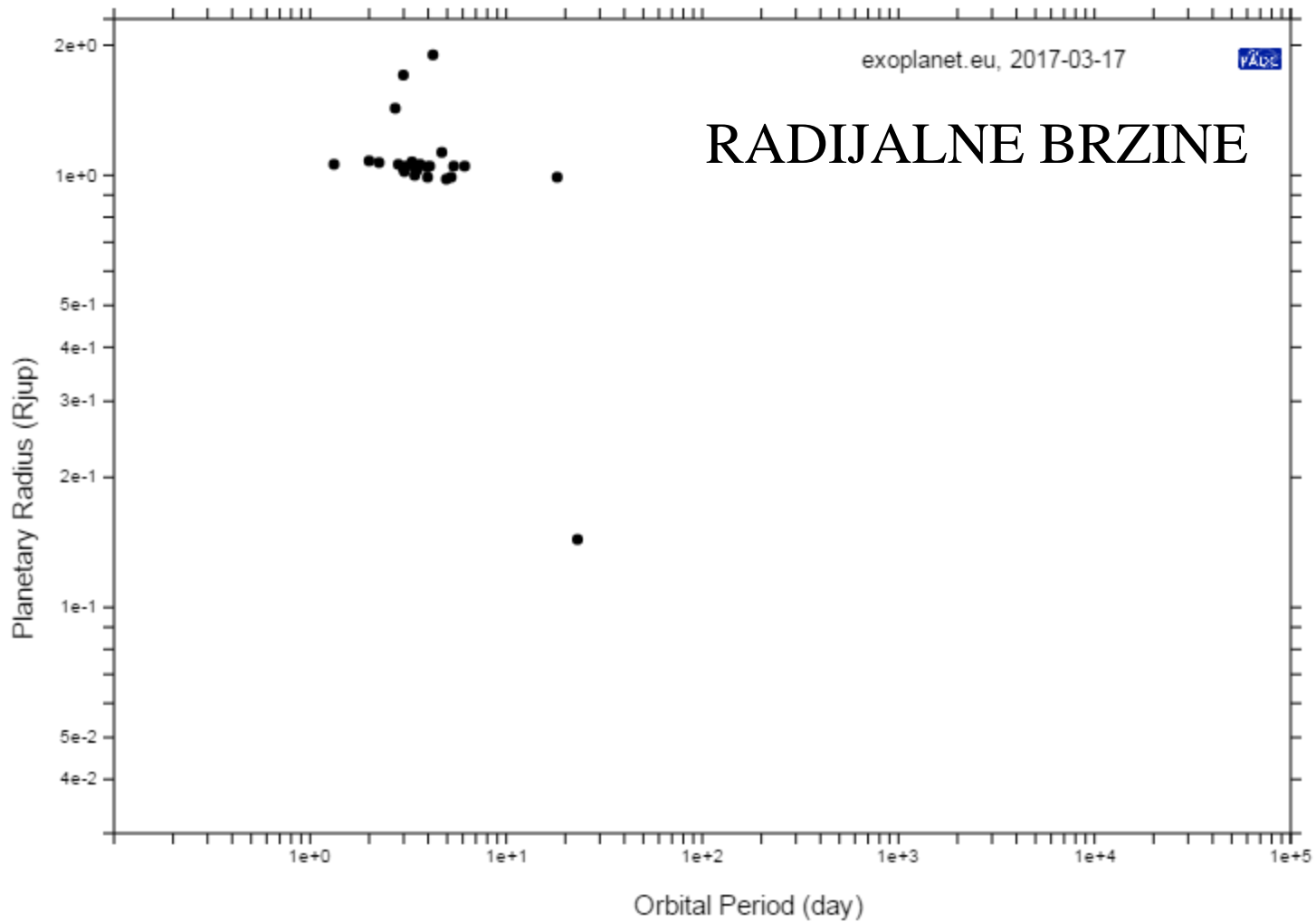


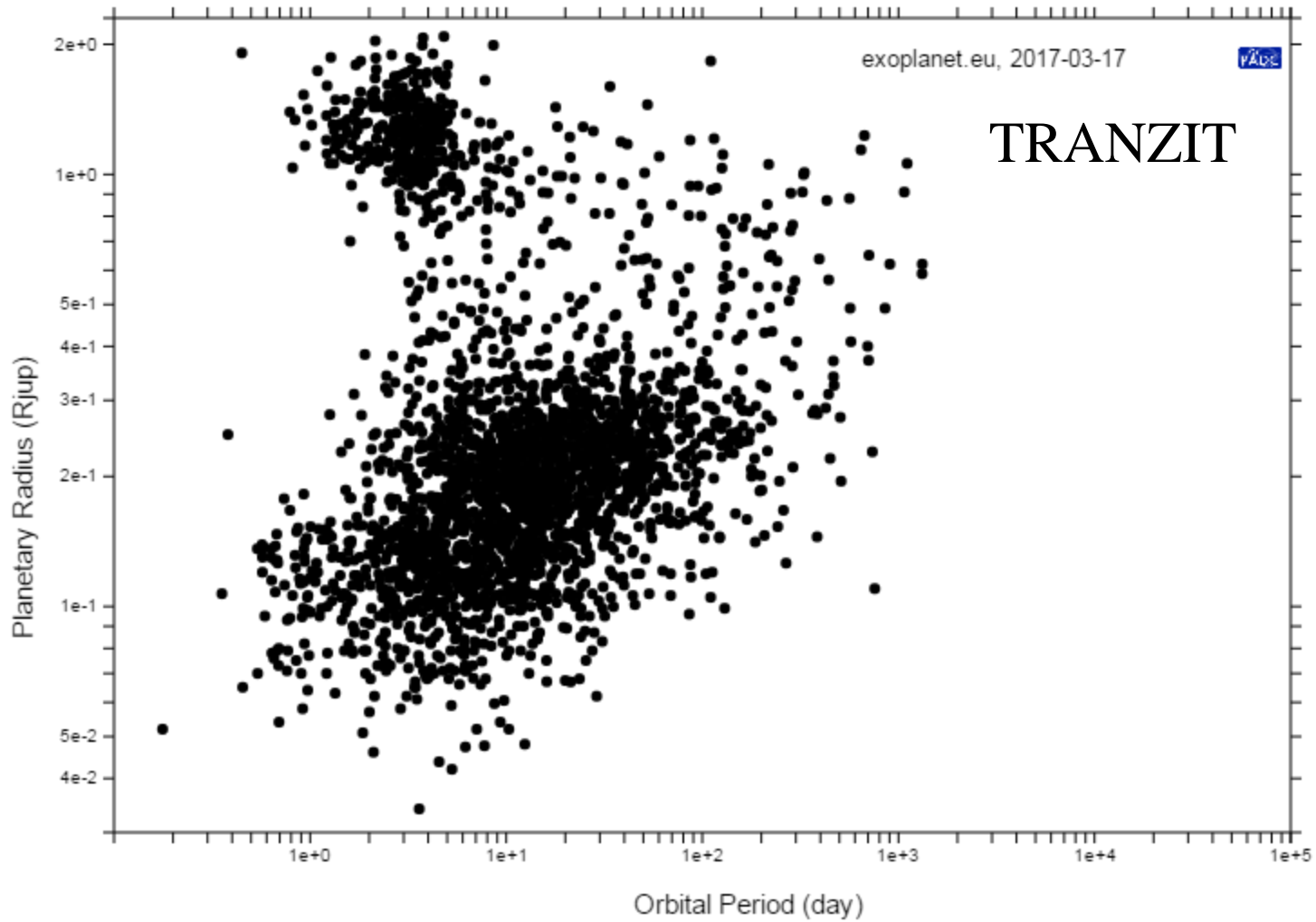
# TRANZIT



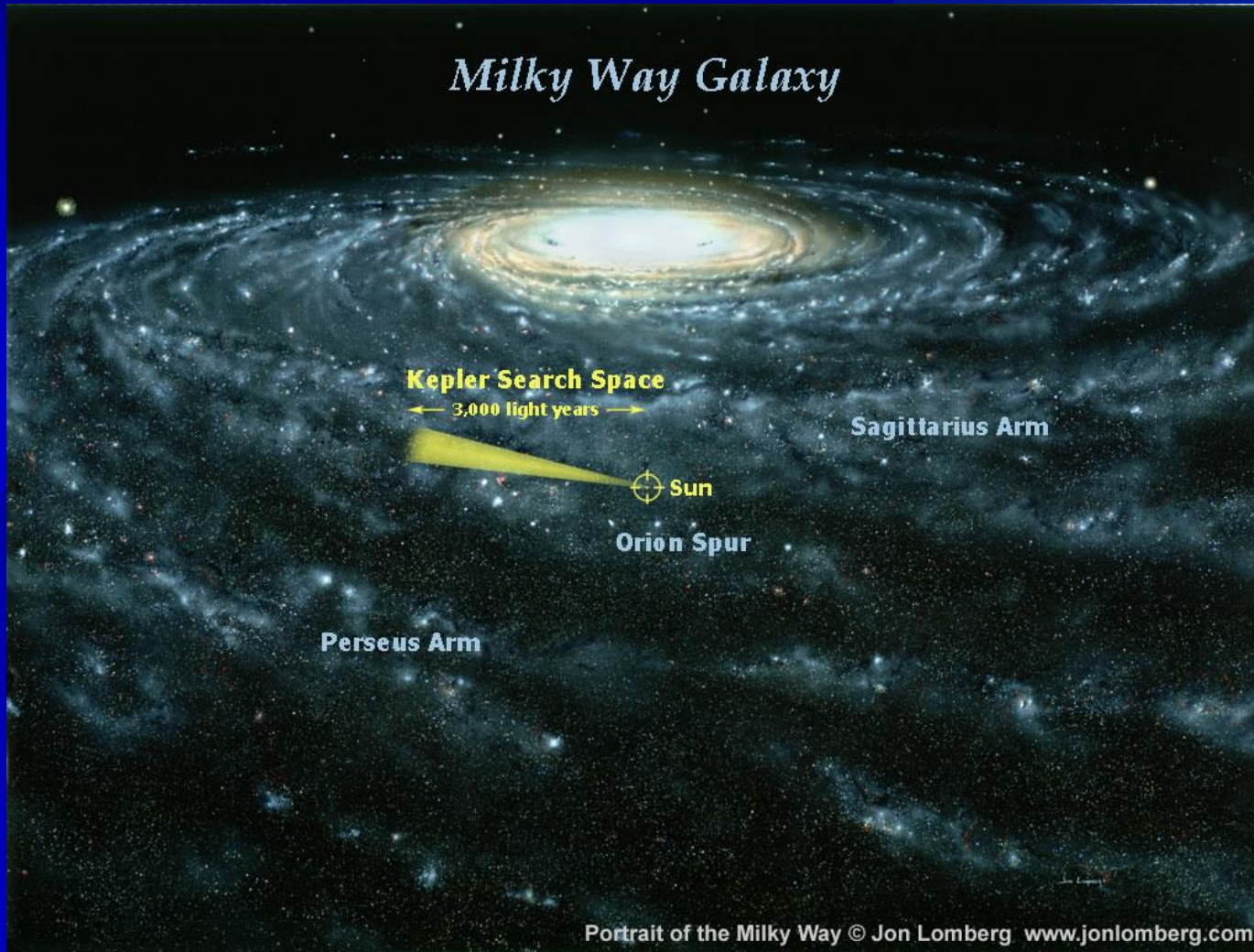


# RADIJALNE BRZINE





# Kepler teleskop

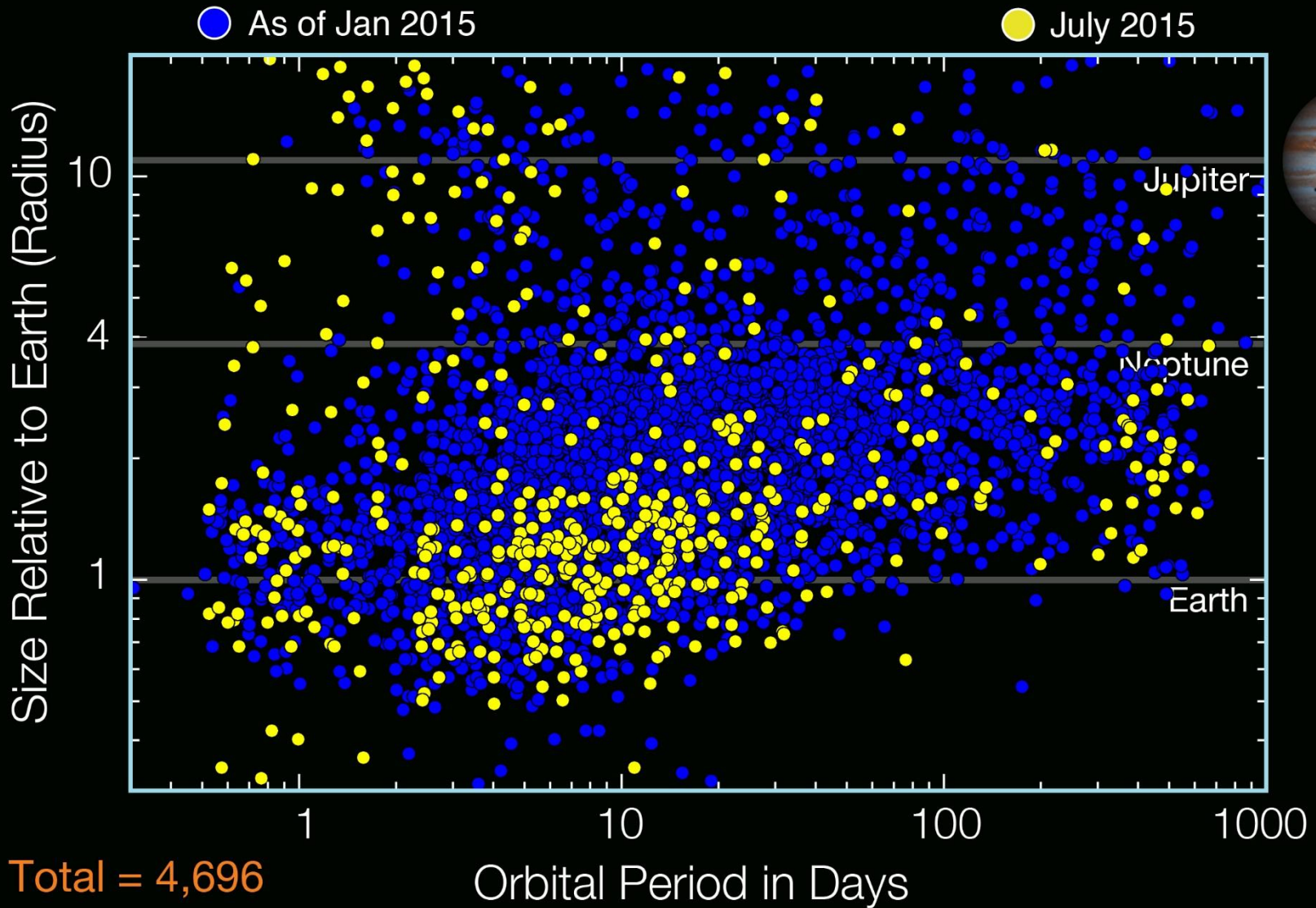


laneta



# New Kepler Planet Candidates

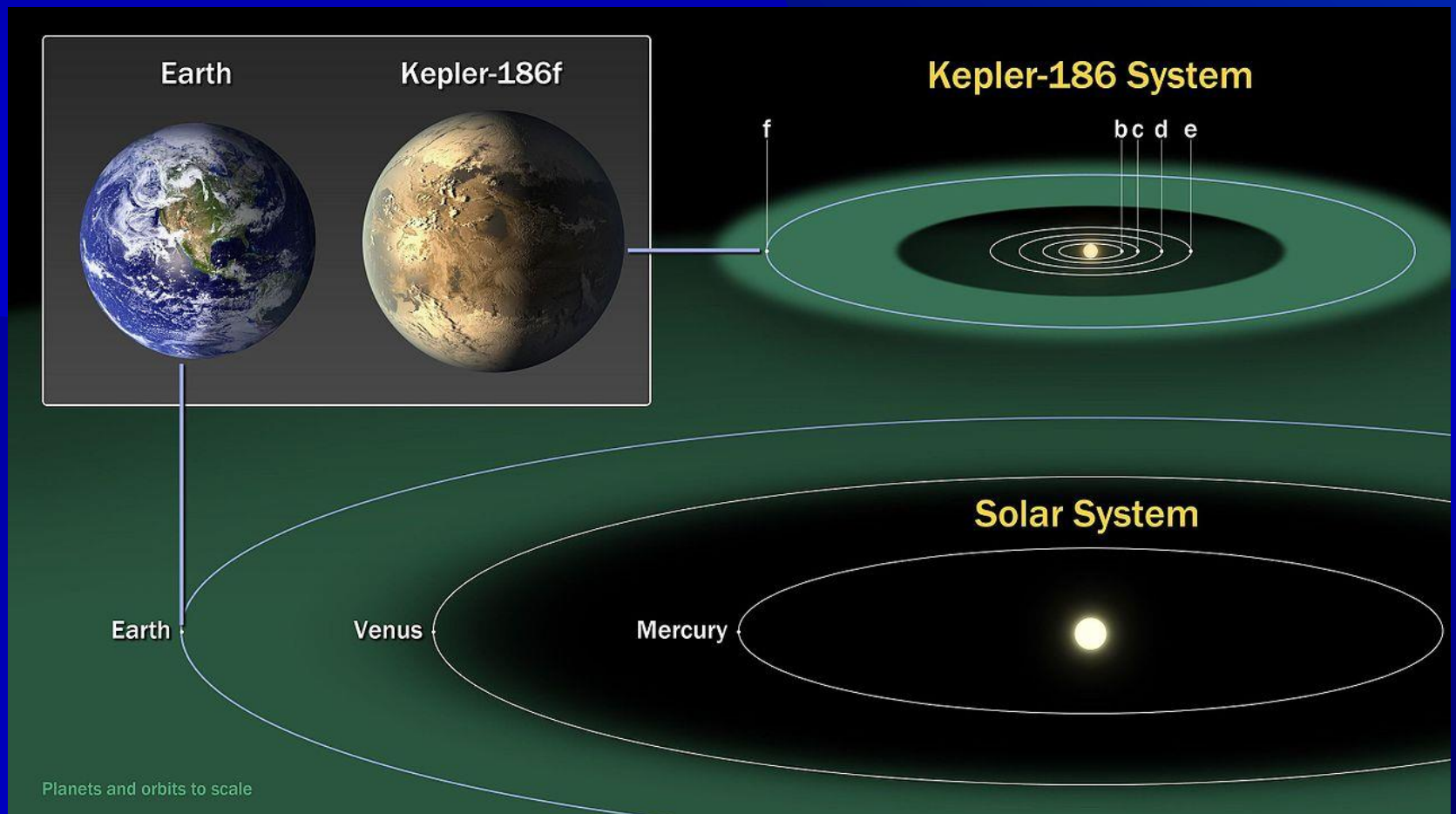
As of July 23, 2015



# Habitabilna zona

**Kepler 186f 581d (2014)**

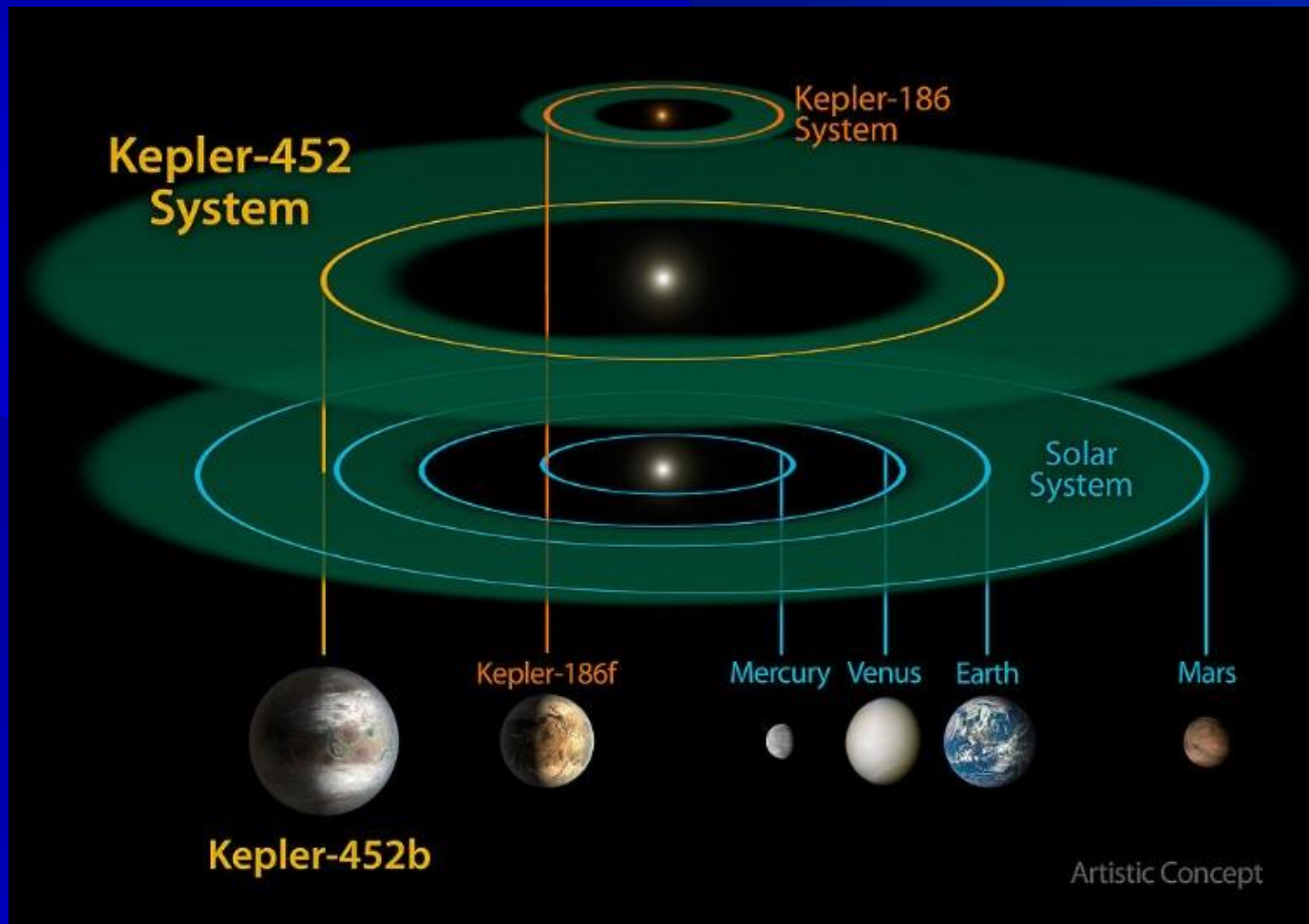
1.1 Zemljanih radijusa, 130 dana orbitalni period



# Habitabilna zona

**Kepler 452b (2015)**

5 Zemljanih masa, temperatura -8 C, zvijezda poput Sunca





# Kepler's Small Habitable Zone Planets

Planets enlarged 25x compared to stars

G Stars



Kepler-452b (Earth)

K Stars



Kepler-442b

155c

235e

62f

62e

283c

440b

M Stars



Kepler-438b

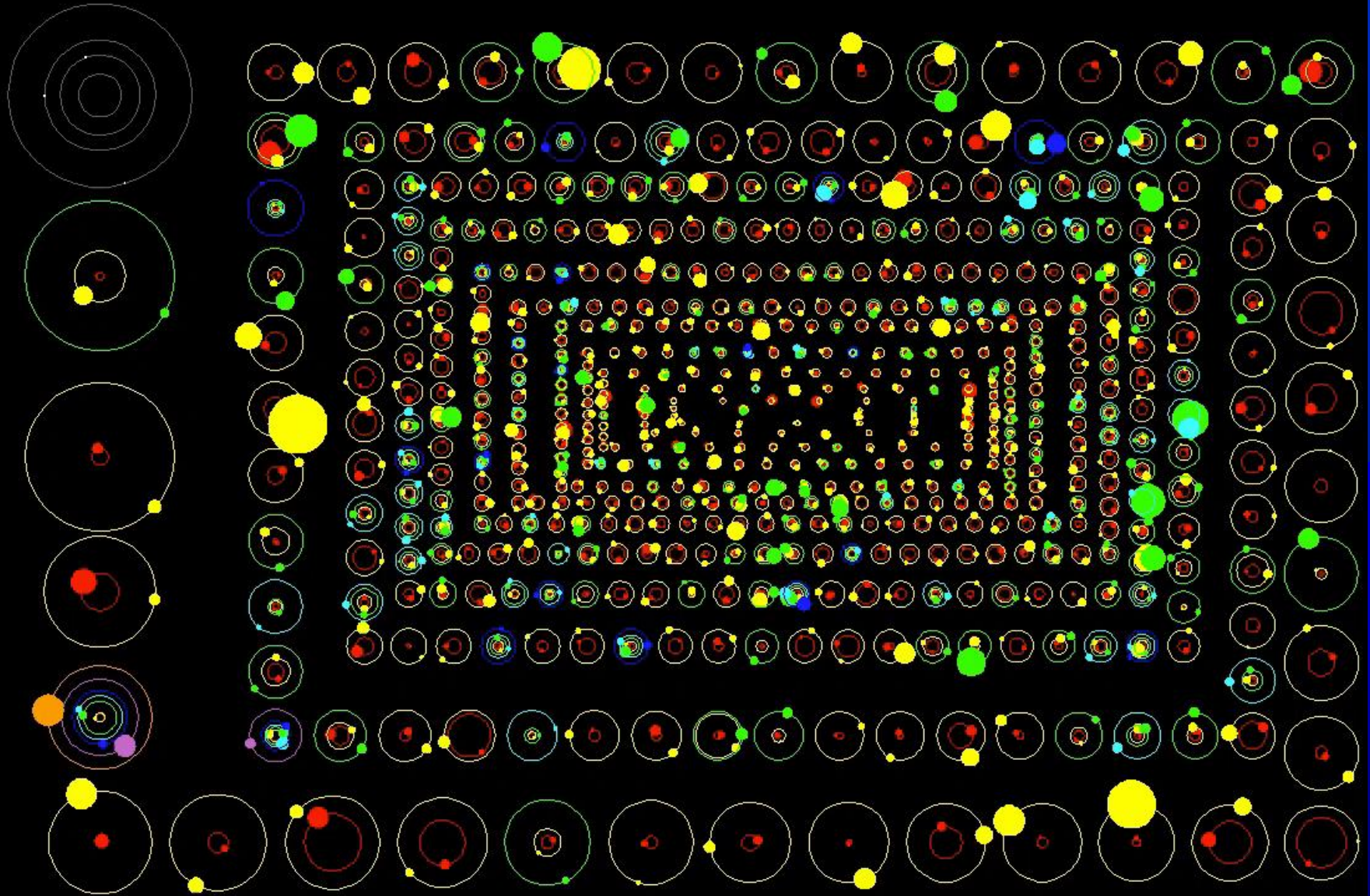
186f

296e

296f

# The Kepler Orrery III

$t[\text{BJD}] = 2455215$







**Trappist-1**  
(NASA/JPL)



**Trappist-1f**  
(NASA/JPL)

# A TREASURE TROVE OF PLANETS FOUND



Jet Propulsion Laboratory  
California Institute of Technology