SVEUČILIŠTE U RIJECI, FAKULTET ZA FIZIKU

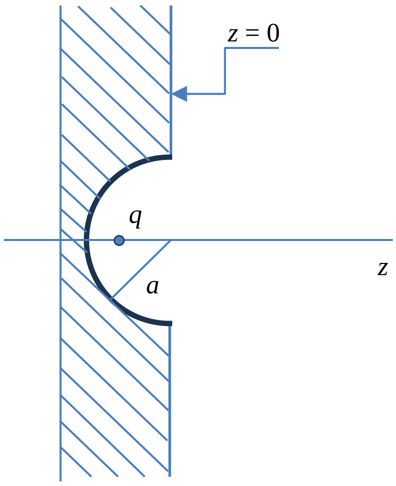
Preddiplomski studij Fizika

Ak. god. 2023./2024.

ELEKTRODINAMIKA

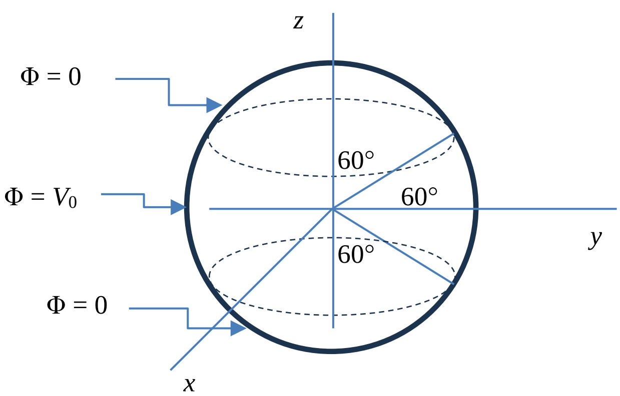
Prvi kolokvij 17. 11. 2023.

ZADATAK 1 Beskonačna, uzemljena i vodljiva ravnina ima ***udubinu*** oblika polukugle polumjera a. Centar polukugle nalazi se na ravnini $z = 0$. Točkasti naboj q stavimo na položaj $z = -d$, gdje je $0 < d < a$. Upotrijebite metodu slika da pronađete potencijal Φ u prostoru ***unutar polukugle*** za koju je $z < 0$ i $r < a$. Smijete koristiti rezultate s vježbi.



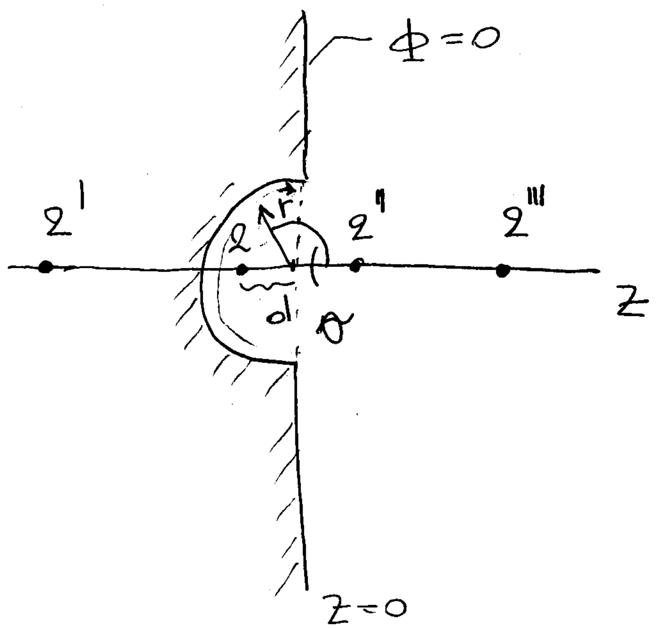
Uputa*:** ako računamo potencijal za naboj q ***unutar uzemljene, vodljive sfere na položaju d tada je naboj slike $q' = -q(a/d)$ na položaju a^2/d koji se nalazi izvan sfere.

ZADATAK 2 Vodljiva sferna ljuska polumjera a podijeljena je u 3 dijela kako je prikazano na slici. Dijelovi su odvojeni izolacijom, a kutna veličina svakog dijela je $\Delta\theta = 60°$. Najgornji i najdonji dio sfere je na potencijalu $\Phi = 0$, dok je središnji dio na potencijalu $\Phi = V_0$.
(a) Nađite prva četiri člana u multipolnom razvoju potencijala za $r > a$.
(b) Koliki je ukupni naboj na sferi?
(c) Koliki je quadrupolni moment ove raspodjele naboja?
(d) Koliki je potencijal u središtu sfere?



ZADATAK 3 Cilindar načinjen od voska ima duljinu l i polumjer $a << l$. Jednoliko je polariziran duž osi koja je okomita na os cilindra. Na primjer, ako se os cilindra podudara sa z-osi, tada je $\mathbf{P} = P_0\,\mathbf{e}_x$. Odredite prostornu gustoću energije pohranjenu u cilindru. Smijete koristiti rezulltate s vježbi.

1.



Naboji slike:

$$q' = -q\frac{a}{d}\ ; \quad z' = -\frac{a^2}{d}$$

$$q'' = -q\ ; \quad z'' = d$$

$$q''' = q\frac{a}{d}\ ; \quad z''' = \frac{a^2}{d}$$

Naboj q nalazi se na

$z = -d$

Ukupni potencijal glasi u području $z<0$, $r<a$

$$\Phi(r,\theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left\{ \frac{1}{(r^2+d^2+2rd\cos\theta)^{1/2}} - \frac{1}{(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{1/2}} - \frac{a}{d}\cdot\frac{1}{\left(r^2+\frac{a^4}{d^2}+2r\frac{a^2}{d}\cos\theta\right)} + \frac{a}{d}\cdot\frac{1}{\left(r^2+\frac{a^4}{d^2}-2r\frac{a^2}{d}\cos\theta\right)} \right\}$$

gdje prvi član odgovara naboju q, drugi član naboju q'', treći član naboju q' i četvrti naboju q'''.

$$\left.\begin{aligned} \Phi(a,\theta) &= 0 \\ \Phi\left(r,\tfrac{\pi}{2}\right) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ zbog rubnih uvjeta!}$$

Zašto moramo uzimati i rub $z=0$ u obzir? Sigurno se i na $z=0$ induciraju naboji koji su onda vanjski naboji za $z<0$, $r<a$. Doprinose ukupnom polju u tom području i moramo ih uzeti u obzir kroz naboje slike.

2.

Zbog azimutalne simetrije potencijal možemo tražiti u obliku

$$\Phi_{in} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta)$$

$$\Phi_{out} = \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos\theta)$$

Raspodjela potencijala po sferi glasi:

$$\Phi(a,\theta) = \begin{cases} 0; & 0 \le \theta < \frac{\pi}{3} \\ V_0; & \pi/3 \le \theta < 2\pi/3 \\ 0; & 2\pi/3 \le \theta \le \pi \end{cases}$$

Imamo

$$\Phi_{out}(a,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l a^{-(l+1)} P_l(\cos\theta) = \Phi(a,\theta)$$

Pomnožimo cijelu jednadžbu s $P_{l'}(\cos\theta)\sin\theta$ i integriramo po θ od 0 do π. Na desnoj strani je

$$\int_0^{\pi} P_{l'}(\cos\theta)\,\Phi(a,\theta)\sin\theta\, d\theta$$

Na lijevoj strani, upotrebimo ortogonalnost Legendreovih polinoma

$$\int_0^{\pi} P_l(\cos\theta)\, P_{l'}(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}$$

U sumaciji ostaje samo član s indeksom l'

$$B_{l'}\, a^{-(l'+1)} \cdot \frac{2}{2l'+1}$$

Promijenimo indekse s lijeve i desne strane jednadžbe

$$\ell' \to \ell$$

te za B_ℓ dobijemo

$$B_\ell = \frac{2\ell+1}{2} a^{\ell+1} \int_0^{\pi} \Phi(a,\theta) P_\ell(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta$$

$$= \frac{2\ell+1}{2} a^{\ell+1} V_0 \int_{\pi/3}^{2\pi/3} P_\ell(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta$$

Koeficijente A_ℓ dobijemo iz uvjeta

$$\Phi_{in} = \Phi_{out} \Big|_{r=a}$$

pa je

$$A_\ell = B_\ell \, a^{-(2\ell+1)}$$

(a) Treba najprije izračunati integral

$$\int_{\pi/3}^{2\pi/3} P_\ell(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta = [\cos\theta = x]$$

$$= -\int_{1/2}^{-1/2} P_\ell(x) dx = \int_{-1/2}^{1/2} P_\ell(x) dx$$

jer su tada $P_\ell(x)$ neparne f-je!

Za <u>neparni</u> ℓ, ovaj integral je nula. Prostaju, dakle, B_ℓ za <u>parni</u> ℓ, za koje je

$$\int_{-1/2}^{1/2} \underbrace{P_\ell(x)}_{\text{parne f-je}} dx = 2 \underbrace{\int_0^{1/2} P_\ell(x) dx}_{J_\ell} = 2 J_\ell$$

Ovaj integral NIJE POTREBNO izračunati, ostat ću oznaku J_ℓ.

Koeficijenti reda su

$$B_\ell = \frac{2\ell+1}{2} a^{\ell+1} V_0 \cdot 2 J_\ell$$
$$= (2\ell+1) a^{\ell+1} V_0 \cdot J_\ell$$
$$A_\ell = (2\ell+1) a^{-\ell} V_0 J_\ell$$

Multipolni razvoj potencijala za azimutalno simetričnu raspodjelu naboja ($m=0$) glasi

$$Y_{\ell 0} = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} P_\ell(\cos\theta)$$

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{2\ell+1} \cdot \frac{2\ell+1}{4\pi} \left[\int P_\ell(\cos\theta') r'^\ell \rho(\vec{r}') d^3r' \right] \cdot \frac{P_\ell(\cos\theta)}{r^{\ell+1}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} q_\ell \cdot \frac{P_\ell(\cos\theta)}{r^{\ell+1}}$$

gdje smo uveli multipolne momente

$$q_\ell \equiv \int P_\ell(\cos\theta') r'^\ell \rho(\vec{r}') d^3r'$$

Usporedbom s potencijalom izvan sfere Φ_{out} dobijemo

$$\frac{q_\ell}{4\pi\epsilon_0} = B_\ell \Rightarrow q_\ell = 4\pi\epsilon_0 B_\ell$$

odnosno,
$$q_\ell = 4\pi\epsilon_0 (2\ell+1) a^{-\ell} V_0 J_\ell$$

Možemo eksplicitno izračunati J_e, B_e i q_e za $\ell = 0$ i $\ell = 2$.

$\boxed{\ell = 0}$

$$J_0 = \int_0^{1/2} \underbrace{P_0(x)}_{1}\, dx = x \Big/_0^{1/2} = \frac{1}{2}$$

$$B_0 = a \cdot V_0 \cdot \frac{1}{2} \; ; \quad q_0 = 4\pi\epsilon_0 \cdot \frac{V_0 a}{2} = 2\pi\epsilon_0 V_0 a$$

$\boxed{\ell = 2}$

$$J_2 = \int_0^{1/2} P_2(x)\, dx = \int_0^{1/2} \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[3\frac{x^3}{3} - x \right] \Big/_0^{1/2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{8} - \frac{1}{2} \right]$$

$$= -\frac{3}{16} \; ; \quad B_2 = 5a^3 V_0 \cdot \left(-\frac{3}{16}\right) = -\frac{15a^3 V_0}{16}$$

Integrale za $\ell = 4$ i $\ell = 6$ izračunao sam u Mathematici:

$$J_4 = \frac{15}{256} \; ; \quad J_6 = \frac{21}{2048}$$

Prema tome,

$$q_0 = 2\pi\epsilon_0 V_0 a$$

$$q_2 = 4\pi\epsilon_0 \cdot B_2 = -\frac{15\pi\epsilon_0 a^3 V_0}{4}$$

$$q_4 = 4\pi\epsilon_0 \cdot B_4 = \frac{135\pi\epsilon_0 a^5 V_0}{64}$$

$$q_6 = 4\pi\epsilon_0 B_6 = 4\pi \cdot 13 a^7 V_0 J_6 = \frac{273\pi\epsilon_0 a^7 V_0}{512}$$

(b) Ukupni naboj proporcionalan je ili jednak s q_0, ovisno o definiciji multipolnih momenata

$$Q = q_0 = 2\pi\epsilon_0 V_0 a$$

(c) Kvadrupolni moment je q_2

$$q_2 = -\frac{15\pi\epsilon_0 a^3 V_0}{4}$$

(d) U središtu sfere je $r=0$ pa je

$$\Phi_{in}(0) = A_0 = B_0 a^{-1} = \frac{V_0 a}{2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{V_0}{2}$$

3.

Zadatak 10.6 s vježbi: potencijal cilindra s polarizacijom

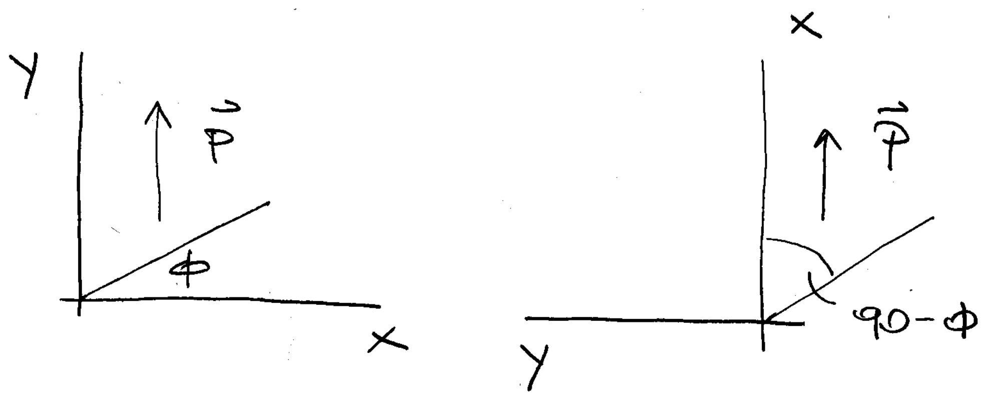
$\vec{P} = P_0 \vec{e}_y$ glasi:

$$\Phi_{in} = \frac{P_0}{2\epsilon_0} \rho \sin\phi$$

$$\Phi_{out} = \frac{P_0 a^2}{2\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\rho} \sin\phi$$

U ovom zadatku je polarizacija $\vec{P} = P_0 \vec{e}_x$ pa ćemo napraviti transformaciju

$$\phi \to \frac{\pi}{2} - \phi$$



Potencijal glasi

$$\Phi_{in} = \frac{P_0}{2\epsilon_0} \rho \cos\phi$$

$$\Phi_{out} = \frac{P_0 a^2}{2\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\rho} \cos\phi$$

Gustoća energije je

$$u = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$$

Zbog

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

imamo

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{P}$$

Odredimo električno polje unutar i izvan cilindra

$$\vec{E}_{in} = -\vec{\nabla}\Phi_{in} = \left(-\vec{e}_\rho \frac{\partial}{\partial\rho} - \vec{e}_\phi \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\frac{P_0}{2\epsilon_0}\rho\cos\phi$$

$$= -\frac{P_0}{2\epsilon_0}\cdot\left(\cos\phi\,\vec{e}_\rho - \sin\phi\,\vec{e}_\phi\right)$$

$$= -\frac{P_0}{2\epsilon_0}\,\vec{e}_x$$

$$\vec{E}_{OUT} = -\vec{\nabla}\Phi_{out} = -\left(\vec{e}_\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \vec{e}_\phi\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\frac{P_0 a^2}{2\epsilon_0}\cdot\frac{1}{\rho}\cos\phi$$

$$= -\frac{P_0 a^2}{2\epsilon_0}\left(-\vec{e}_\rho\cdot\frac{\cos\phi}{\rho^2} - \vec{e}_\phi\frac{1}{\rho^2}\sin\phi\right)$$

$$= \frac{P_0 a^2}{2\epsilon_0}\cdot\frac{1}{\rho^2}\left(\vec{e}_\rho\cos\phi + \vec{e}_\phi\sin\phi\right)$$

Gustoća energije za cilindar <u>unutar</u> cilindra glasi

$$u_{in} = \frac{1}{2}\epsilon_0\cdot\frac{P_0^2}{4\epsilon_0^2} + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{P_0^2}{2\epsilon_0}\right) = -\frac{P_0^2}{8\epsilon_0}$$

Gustoća energije <u>izvan</u> cilindra: $\vec{P} = 0$

$$u_{out} = \frac{\epsilon_0}{2}\cdot\left(\frac{P_0 a^2}{2\epsilon_0}\cdot\frac{1}{\rho^2}\right)^2 = \frac{P_0^2 a^4}{8\epsilon_0}\cdot\frac{1}{\rho^4}$$