SVEUČILIŠTE U RIJECI, FAKULTET ZA FIZIKU

Preddiplomski studij Fizika

Ak. god. 2023./2024.

ELEKTRODINAMIKA

Drugi kolokvij 18. 12. 2023.

ZADATAK 1 Tanki disk polumjera R s jednolikom plošnom gustoćom naboja σ po svojoj površini, vrti se kutnom brzinom ω. Nađite magnetski dipolni moment diska ako je os rotacije
(a) okomita na ravninu s diskom i prolazi kroz središte diska,
(b) podudarna s promjerom diska.

ZADATAK 2 Strujni krug postavljen je u ravninu koja razdvaja dva sredstva magnetskih permeabilnosti μ_1 i μ_2 . Ako je magnetsko polje strujnog kruga bez magnetskih sredstava jednako $\mathbf{H}_0$, pokažite da je polje unutar sredstva 1 i 2 jednako

$$\mathbf{H}_1 = \frac{2\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}\mathbf{H}_0$$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}\mathbf{H}_0$$

1.

Magnetski moment neke raspodjele struja dan je izrazom

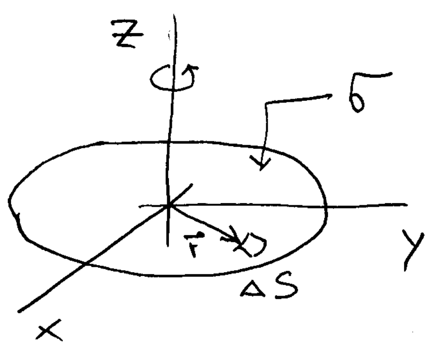
$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int \vec{r}\times\vec{J}\, d^3r$$

ako je struja raspodijeljena po prostoru, odnosno,

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int \vec{r}\times\vec{K}\, dS$$

ako je struja u ravnini.

(a) Postavimo disk u xy-ravninu.



Plošna struja na disku je

$$\vec{K} = \sigma\vec{v}$$
$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$$

$$\vec{\omega} = \omega\,\vec{e}_z$$
$$\vec{r} = \rho\,\vec{e}_\rho$$
$$dS = \rho\, d\rho\, d\phi$$

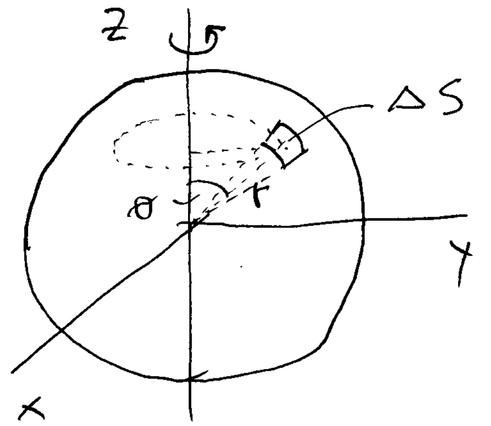
Odavdje je

$$\vec{v} = \omega\,\vec{e}_z\times\rho\,\vec{e}_\rho = \omega\rho\,\vec{e}_\phi$$
$$\vec{r}\times\vec{K} = \rho\,\vec{e}_\rho\times\sigma\omega\rho\,\vec{e}_\phi = \sigma\omega\rho^2\,\vec{e}_z$$

Imamo

$$\vec{m} = \vec{e}_z\cdot\frac{1}{2}\cdot\sigma\omega\underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi}\underbrace{\int_0^R d\rho\,\rho^3}_{R^4/4} = \vec{e}_z\cdot\frac{\pi}{4}\sigma R^4\omega$$

(b) Neka se disk vrti oko z-osi.



Uočimo naboj $\Delta Q = \sigma \Delta S$. Magnetski moment koji stvara ovaj naboj koji kruži je

$$\Delta\vec{m} = \Delta I \cdot \underbrace{r^2 \sin^2\theta}_{\rho^2}\, \pi\, \vec{e}_z$$

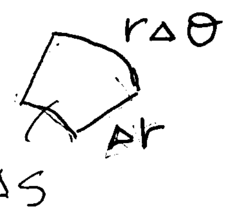
gdje je

$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{T} = \frac{\Delta Q\,\omega}{2\pi}$$

pa je

$$\Delta\vec{m} = \frac{\omega}{2\pi}\cdot \sigma \Delta S \cdot r^2 \sin^2\theta\, \pi\, \vec{e}_z$$

$$\Delta S = r\,\Delta r\,\Delta\theta$$



Ukupni magnetski moment polovine diska je

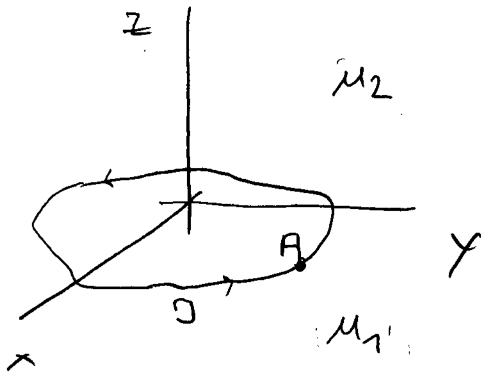
$$\vec{m} = \frac{\omega}{2}\cdot\sigma \underbrace{\int_0^R dr\, r^3}_{\frac{R^4}{4}} \underbrace{\int_0^\pi d\theta \sin^2\theta}_{\frac{\pi}{2}}\, \vec{e}_z$$

Za cijeli disk moramo pomnožiti ovaj rezultat s 2

$$\vec{m}_{uk} = 2\vec{m} = \frac{\pi}{8}\sigma R^4 \omega\, \vec{e}_z \;//$$

$\boxed{2.}$

Postavimo strujni krug u z-ravnini; na primjer, petlju proizvoljnog oblika.



$$\vec n = \vec e_z$$

U vakuumu je polje ove petlje:

$$\vec H_0(\vec r) = \frac{J}{4\pi} \int d\vec \ell \times \frac{\vec r - \vec r\,'}{\|\vec r - \vec r\,'\|^3}$$

Po ravnini $z=0$ (na rubnoj plohi), vektor $\vec r - \vec r\,'$ leži u xy-ravnini, $d\vec \ell$ isto pa $\vec H_0$ ima smjer $\vec e_z$, odnosno, smjer normale, osim ako je $\vec r \simeq \vec r\,'$!

U sredstvu 1 i 2 nema drugih struja pa budući su linearna magnetska sredstva, smijemo pretpostaviti:

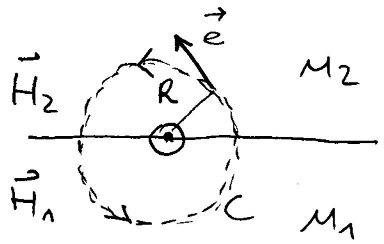
$$\vec H_1 = \alpha_1 \vec H_0$$

$$\vec H_2 = \alpha_2 \vec H_0$$

Iz uvjeta kontinuiteta normalne komponente za $\vec B$ slijedi:

$$\alpha_1 \mu_1 = \alpha_2 \mu_2 \qquad (1)$$

Promatrajmo žicu u bilo kojoj točki A. Načinimo kružnicu polumjera R pri čemu $R \to 0$ $(\vec r \simeq \vec r\,')$.



$\bar e$ je jedinični vektor tangencijalan na kružnicu!

Jako blizu žice su polja približno

$$\vec H_1 \sim \alpha_1' \, \frac{J}{2\pi}\cdot\frac{1}{R}\,\vec e$$

$$\vec H_2 \sim \alpha_2 \, \frac{J}{2\pi}\cdot\frac{1}{R}\,\vec e$$

Amperov zakon za kružnicu C glasi $(R \to 0)$

$$\oint \vec H \cdot \overbrace{d\vec l}^{R\,d\theta\,\vec e} = J$$

$$\alpha_1 \frac{J}{2\pi}\cdot\frac{1}{R}\cdot \underbrace{R\pi}_{\text{polukružnica}} + \alpha_2 \frac{J}{2\pi}\cdot\frac{1}{R}\, R\pi = J$$

$R \to 0$;

$$\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2} = 1 \qquad (2)$$

Prema tome iz (1) i (2)

$$\alpha_1 = \alpha_2 \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

$$\alpha_2 \frac{\mu_2}{\mu_1} + \alpha_2 = 2$$

$$\alpha_2 = \frac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_2}$$

$$\alpha_1 = \frac{2\mu_2}{\mu_1+\mu_2}$$

Odavdje,

$$\vec{H}_1 = \frac{2\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\vec{H}_0$$

$$\vec{H}_2 = \frac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\vec{H}_0$$

Polja $\vec{H}_1$ i $\vec{H}_2$ očito zadovoljavaju jednadžbe magnetostatike u sredstvima 1 i 2

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{H} = 0$$

jer $\vec{H}_0$ zadovoljava te jednadžbe.