SVEUČILIŠTE U RIJECI, FAKULTET ZA FIZIKU

Preddiplomski studij Fizika

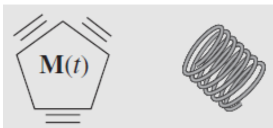
Ak. god. 2023./2024.

ELEKTRODINAMIKA

Treći kolokvij 26. 1. 2024.

ZADATAK 1 Jedan način za mjerenje vremenski-ovisne magnetizacije $\mathbf{M}(t)$ je upotreba elektromotornog napona $\mathcal{E}_F(t)$ kojeg magnetizacija inducira u zavojnici postavljenoj u neposrednoj blizini (slika). Pretpostavite da stacionarna struja I_c u zavojnici generira magnetsko polje $\mathbf{B}_c(\mathbf{r})$ te pokažite da vrijedi

$$\mathcal{E}_F(t) = -\frac{1}{I_c}\frac{d}{dt}\int d^3r\,\mathbf{B}_c\cdot\mathbf{M}(t)$$



***Uputa*:** najprije pokažite da vrijedi

$$I_c\mathcal{F} = \int d^3r\,\mathbf{J}_c\cdot\mathbf{A}_M$$

gdje je $\mathcal{F}$ tok magnetskog polja kroz zavojnicu, $\mathbf{J}_c$ gustoća struje u zavojnici i $\mathbf{A}_M$ vektorski potencijal za magnetsko polje koje generira magnetizacija. Nakon toga, transformirajte ovaj integral parcijalnom integracijom i na kraju upotrijebite pravilo za fluks. Koliki je integral

$$\int \mathbf{B}_c\cdot\mathbf{H}_M\,d^3r\ ?$$

ZADATAK 2 Ravni elektromagnetski val širi se kroz optičko sredstvo u pozitivnom smjeru osi z. Pretpostavite da je val cirkularno polariziran s električnom komponentom polja koje je dana formulom:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = E_0\left[\cos(kz-\omega t)\mathbf{e}_x + \sin(kz-\omega t)\mathbf{e}_y\right]$$

(a) Izračunajte magnetsko polje $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$.
(b) Izračunajte Poytingov vektor $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$.
(c) Nađite tlak zračenja na ravninu čija normala zatvara kut θ_0 s valnim vektorom $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_z$.
***Uputa*:** pod (c) koristite gustoću impulsa EM polja ili Maxwellov tenzor naprezanja, odnosno, komponentu T_{zz} .

ZADATAK 3 Naboji $+q$ i $-q$ u električnom dipolu postavljeni su na os z na udaljenost l tako da se težište naboja podudara s ishodištem. Vrijednosti naboja mijenjaju se harmonički u vremenu s amplitudom q_0 i kružnom frekvencijom ω.
(a) Odredite dipolni moment ovog sustava.
(b) Odredite struju koja protječe u sustavu.
(c) Odredite EM polje zračenja koristeći formule

$$\mathbf{E}_R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}\left[\mathbf{e}_r(\mathbf{e}_r\cdot\ddot{\mathbf{p}}) - \ddot{\mathbf{p}}\right]$$

$$\mathbf{B}_R = -\frac{\mu_0}{4\pi c r}\mathbf{e}_r\times\ddot{\mathbf{p}}$$

gdje je $d^2\mathbf{p}/dt^2$ izračunata u retardiranom vremenu $t - r/c$.
(d) Kako glase polja pod (c) po pravcu koji prolazi nabojima?
(e) Izračunajte Poyntingov vektor i raspodjelu snage zračenja po kutovima.

$\boxed{1.}$

Vremenski-ovisna magnetizacija generira elektromotorni napon u zavojnici jer se magnetsko polje magnetizacije, a time i magnetski tok kroz zavojnicu mijenja u vremenu.

Taj je tok jednak

$$\mathcal{F}_c = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}$$

gdje je $\vec{B}$ polje koje stvara magnetizacija. Stokesov teorem daje

$$(*) \qquad I_c \mathcal{F}_c = \oint_c \vec{A} \cdot I_c d\vec{l}$$

, I_c je struja kroz zavojnicu

Što je S, a što C? Ploha S je poprečni presjek zavojnice (nije nužno kružnog oblika!), a C je rub poprečnog presjeka i podudara se sa žicom zavojnice.

Treba napomenuti da zavojnica ima jednolik, uvijek isti poprečni presjek. Pomnožimo lijevu i desnu stranu jedn. (*) s brojem zavoja po jediničnoj duljini $\Delta N / \Delta L$

$$I_c \mathcal{F}_c \frac{\Delta N}{\Delta L} = \oint_C \vec{A} \cdot \underbrace{\frac{\Delta N I_c}{\Delta L}}_{K_c} d\vec{l} \quad / \cdot \Delta L \int$$

$$I_c \mathcal{F} = \int \oint_C \vec{A} \cdot \vec{K}_c \, dl \, dL$$

gdje je $\mathcal{F} = N \mathcal{F}_c$. Sada smijemo zamijeniti

$$\int \oint \vec{A} \cdot \vec{K}_c \, dl \, dL \to \int_V \vec{A} \cdot \vec{J}_c \, d^3 r$$

gdje je $\vec{J}_c$ gustoća struje i očito je proporcionalna delta funkciji. Također, V je <u>cijeli prostor</u>! Imamo,

$$\vec{J}_c = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B}_c$$

pa je

$$\int_V \vec{A} \cdot \vec{J}_c \, d^3 r = \frac{1}{\mu_0} \int_V \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}_c) \, d^3 r$$

Vektorski identitet daje

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}_c) = \vec{B}_c \cdot \overbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{A})}^{\vec{B}} - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}_c)$$

$$\int_{V \to \infty} \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}_c) \, d^3 r = \int_{S \to \infty} \vec{A} \times \vec{B}_c \, d^3 r \to 0$$

Ostaje

$$\int_V \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}_c) \, d^3 r = \int_V \vec{B}_c \cdot \vec{B} \, d^3 r$$

Na drugoj strani,

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{M} + \vec{H})$$

pa je

$$\mathcal{I}_c \mathcal{F} = \int d^3r\, \vec{B}_c \cdot (\vec{M} + \vec{H})$$

No, integral s $\vec{B}_c \cdot \vec{H}$ je nula: budući da nema struja slobodnog naboja

$$\vec{H} = -\vec{\nabla}\Phi_M$$

pa je

$$\vec{B}_c \cdot \vec{\nabla}\Phi_M = \vec{\nabla}\cdot(\Phi_M \vec{B}_c) - \Phi_M \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{B}_c}_{=0}$$

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot(\Phi_M \vec{B}_c)\, d^3r = \oint \Phi_M \vec{B}_c \cdot d\vec{S} \xrightarrow[S\to\infty]{} 0$$

Prema tome,

$$\mathcal{F} = \frac{1}{\mathcal{I}_c} \int d^3r\, \vec{B}_c \cdot \vec{M}(t)$$

Upotrijebimo li pravilo fluksa

$$\mathcal{E} = -\frac{d\mathcal{F}}{dt} = -\frac{1}{\mathcal{I}_c}\frac{d}{dt}\int d^3r\, \vec{B}_c \cdot \vec{M}(t)$$

$$= -\frac{1}{\mathcal{I}_c}\int d^3r\, \vec{B}_c \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial t}$$

$\boxed{2.}$

(a) Magnetsko polje možemo izračunati iz relacije koja vrijedi za ravni val, budući je cirkularno polarizirani val jednostavna superpozicija ravnih valova.

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega}(\vec{k} \times \vec{E})$$

$$= \frac{1}{\omega} \cdot k\vec{e}_z \times E_0 \left[\cos(kz-\omega t)\vec{e}_x + \sin(kz-\omega t)\vec{e}_y\right]$$

$$= \frac{k}{\omega} E_0 \cdot \left[\cos(kz-\omega t)\,\vec{e}_y - \sin(kz-\omega t)\,\vec{e}_x\right]$$

Možemo provjeriti pomoću

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \cos(kz-\omega t) & \sin(kz-\omega t) & 0 \end{vmatrix} \cdot E_0$$

$$= \left[\vec{e}_x \cdot (-1) \cdot \cos(kz-\omega t) \cdot k \right.$$
$$\left. - \sin(kz-\omega t) \cdot k\,\vec{e}_y + 0\right] E_0$$

Integriramo gornji izraz po t

$$\vec{B} = -\left[\vec{e}_x \cdot (-1) \cdot k \cdot \frac{1}{-\omega} \sin(kz-\omega t)\right.$$
$$\left. - \vec{e}_y \cdot \frac{k}{+\omega} \cos(kz-\omega t)\right] E_0$$

$$= \underbrace{\frac{kE_0}{\omega}}_{\frac{E_0}{v}} \cdot \left[-\sin(kz-\omega t)\,\vec{e}_x + \cos(kz-\omega t)\,\vec{e}_y\right]$$

v je fazna brzina širenja kroz optičko sredstvo

(b) Poyntingov vektor

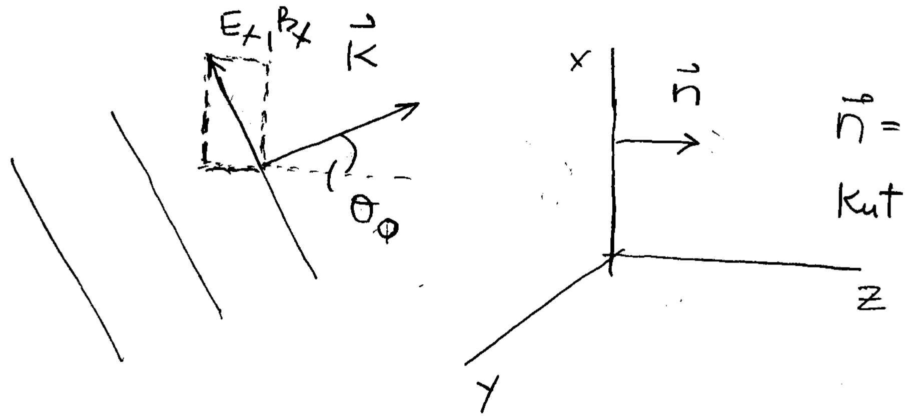
$$\vec{S}(\vec{r},t) = \frac{1}{\mu_r \mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

$$= \frac{1}{\mu_r \mu_0} \cdot \frac{k}{\omega} E_0^2 \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \cos(\ldots) & \sin(\ldots) & 0 \\ -\sin(\ldots) & \cos(\ldots) & 0 \end{vmatrix}$$

gdje je $(\ldots) = (kz - \omega t)$. Imamo: $v = \frac{\omega}{k}$

$$= \frac{E_0^2}{\mu_r \mu_0} \vec{e}_z \left[\underbrace{\cos^2(kz-\omega t) + \sin^2(kz-\omega t)}_{=1} \right] = \frac{1}{v \mu_0 \mu_r} E_0^2 \vec{e}_z$$

(c) Postavimo koordinatni sustav kao na slici



$\vec{n} = \vec{e}_z$

Kut između $\vec{k}$ i $\vec{n}$ je θ_0

Vidimo da imamo promjene u odnosu na koordinatni sustav pod (a)

$$k = k_z \longrightarrow k \cos\theta_0 = k_z'$$

$$k_x = 0 \longrightarrow k \sin\theta_0 = k_x'$$

Dok se y-komponente ne mijenjaju, u novom sustavu imamo i z-komponente

$$E_z = 0 \longrightarrow -E_x \sin\theta_0 = E_z'$$

Slično je i za B_z

$$B_z = 0 \longrightarrow -B_x \sin\theta_0 = B_z'$$

Tražimo tlak na plohu $z=0$ pa nam treba samo T_{zz} komponenta čija je interpretacija upravo tlak.

$$T_{zz} = \epsilon_r \epsilon_0 \left(E_z'^2 - \frac{1}{2} E^2 \right) + \frac{1}{\mu_r \mu_0} \left(B_z'^2 - \frac{1}{2} B^2 \right)$$

U novom koordinatnom sustavu je

$$E_z' = -E_x \sin\vartheta_0 = -E_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \sin\vartheta_0$$

$$B_z' = -B_x \sin\vartheta_0 = \frac{kE_0}{\omega} \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \sin\vartheta_0$$

Uvrstimo u T_{zz}

$$T_{zz} = \epsilon_r \epsilon_0 \left[E_0^2 \sin^2\vartheta_0 \cos^2(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) - \frac{1}{2} E_0^2 \right]$$
$$+ \frac{1}{\mu_r \mu_0} \left[\frac{E_0^2}{v^2} \sin^2\vartheta_0 \sin^2(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) - \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{v^2} \right]$$

Uzmemo li vremenski prosjek

$$\langle \cos^2(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \rangle = \langle \sin^2(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \rangle = \frac{1}{2}$$

$$T_{zz} = \epsilon_r \epsilon_0 \cdot \frac{1}{2} \left[-E_0^2 (1 - \sin^2\vartheta_0) \right]$$
$$+ \frac{1}{\mu_r \mu_0} \cdot \frac{1}{2 v^2} \left[-E_0^2 (1 - \sin^2\vartheta_0) \right]$$

$$v^2 = \frac{1}{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_0 \mu_r}$$

$$T_{zz} = -\epsilon_r \epsilon_0 E_0^2 \cdot \cos^2\vartheta_0$$

Sila je

$$\vec{F} = \oint_S \overleftrightarrow{T} \cdot d\vec{S} - \underbrace{\epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_V \vec{S}\, dV}_{=0 \text{ jer je } S \text{ neovisan o vremenu}}$$

gdje je V poluprostor $z<0$ koji je omeđen plohom $z=0$ i plohom u beskonačnosti. Tlak na plohu $z=0$ je

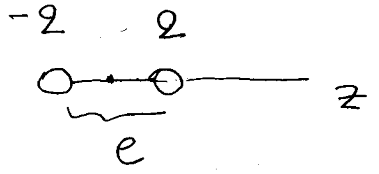
$$F_z = \oint_S T_{zz}\, dS$$

To je sila kojim $z=0$ djeluje na EM polje. Suprotno

$$\frac{F_z}{S} = -T_{zz} = \epsilon_r \epsilon_0 E_0^2 \cos^2\theta_0$$

je sila kojom polje djeluje na $z=0$ što je konačan rezultat.

3.



$$q = q_0 \sin \omega t$$

(a) $\vec{p} = l q_0 \sin \omega t \, \vec{e_z}$

(b) $I = \dfrac{dq}{dt} = l q_0 \omega \cos \omega t$

(c) $$\left.\frac{d^2 \vec{p}}{dt^2}\right|_{t' = t - r/c} = - l q_0 \omega^2 \sin[\omega(t - r/c)] \, \vec{e_z}$$

Električna i magnetska komponenta polja zračenja su

$$\vec{E}_R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{1}{r} \left[\vec{e_r}(\vec{e_r} \cdot \ddot{\vec{p}}) - \ddot{\vec{p}} \right]$$

$$= - \frac{l q_0 \omega^2}{4\pi \epsilon_0 c^2} \cdot \frac{1}{r} \left[\vec{e_r}(\vec{e_r} \cdot \vec{e_z}) - \vec{e_z} \right] \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]$$

$$\vec{B}_R = \frac{l \mu_0 q_0 \omega^2}{4\pi c} \cdot \frac{1}{r} \, \vec{e_r} \times \vec{e_z} \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]$$

$$\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) = \omega t - kr$$

(d) Po z-osi je $\vec{e_r} \times \vec{e_z} = 0$ jer je $\vec{e_r} \to \vec{e_z}$. Također,

$$\vec{e_r}(\vec{e_r} \cdot \vec{e_z}) - \vec{e_z} = 0$$

Dakle, $\vec{E_R} = 0$ i $\vec{B_R} = 0$ po osi z.

(e) $$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = - \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{l^2 q_0^2 \omega^4 \mu_0}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c^3} \sin^2[\omega t - kr] \cdot \frac{1}{r^2}$$

$$\left[\vec{e_r}(\vec{e_r} \cdot \vec{e_z}) - \vec{e_z} \right] \times (\vec{e_r} \times \vec{e_z})$$

$$\vec{e}_r \times (\vec{e}_r \times \vec{e}_z) = \vec{e}_r(\vec{e}_r \cdot \vec{e}_z) - \underbrace{(\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r)}_{=1} \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_z \times (\vec{e}_r \times \vec{e}_z) = \vec{e}_r \underbrace{(\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z)}_{=1} - (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_z$$

Sve skupa,

$$[\vec{e}_r(\vec{e}_r \cdot \vec{e}_z) - \vec{e}_z] \times (\vec{e}_r \times \vec{e}_z) = \vec{e}_r(\vec{e}_r \cdot \vec{e}_z)^2 - (\vec{e}_r \cdot \vec{e}_z)\vec{e}_z$$

$$- \vec{e}_r + (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_r)\vec{e}_z = \vec{e}_r [\underbrace{(\vec{e}_r \cdot \vec{e}_z)}_{\cos\theta}{}^2 - 1] = \vec{e}_r \sin^2\theta \cdot (-1)$$

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{e^2 z_0^2 \omega^4}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c^3} \cdot \frac{1}{r^2} \sin^2\theta \sin^2[\omega t - kr] \vec{e}_r$$

Uzmemo li prosjek po vremenu

$$\langle \sin^2(\omega t - kr) \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\frac{d}{dt}\langle P \rangle = \frac{e^2 z_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \sin^2\theta$$