ODJEL ZA FIZIKU SVEUČILIŠTE U RIJECI

Preddiplomski studij Fizika

Ak. god. 2019./2020.

KVANTNA FIZIKA I PRIMJENE

Treći kolokvij 12.06.2020.

1. Čestica mase m giba se u dvodimenzionalnom potencijalu oblika

$$V(x,y) = \beta |x||y|$$

(a) Upotrijebite probnu funkciju oblika

$$\psi(x,y) = Ae^{-b(x^2+y^2)}$$

da izračunate varijacijski izraz $E(b) = \langle H \rangle$.
(b) Nađite vrijednost varijacijskog parametra b koji minimizira $E(b)$.
(c) Pokažite da je gornja granica za energiju osnovnog stanja

$$E_{\min} = \hbar\sqrt{\frac{2\beta}{\pi m}}$$

2. Hamiltonijan dvodimenzionalnog izotropnog harmoničkog oscilatora glasi

$$H_0 = H_x + H_y$$

gdje je

$$H_x = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \quad H_y = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dy^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 y^2$$

Označite svojstvene vektore za H_x s $|k\rangle$, a svojstvene vektore za H_y s $|l\rangle$, gdje su k i l nenegativni cijeli brojevi.
(a) Kolike su energije osnovnog i prvog pobuđenog stanja za H_0? Kolika je degeneracija osnovnog i prvog pobuđenog stanja?
(b) Pretpostavimo da na sustav počne djelovati smetnja $V = gxy$, gdje je g realna konstanta tako da je ukupni hamilotnijan sustava

$$H = H_0 + V$$

(b1) Izračunajte energiju osnovnog stanja do drugog reda po V.
(b2) Izračunajte vektor osnovnog stanja za H do prvog reda po V. Izrazite svoj odgovor pomoću direktnog produkta stanja $|k\rangle|l\rangle$.
(b3) Izračunajte energiju prvog pobuđenog stanja do prvog reda po V.

***Uputa*:** smijete upotrijebiti matrični element

$$\langle k' | x | k \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{k+1}\,\delta_{k',k+1} + \sqrt{k}\,\delta_{k',k-1}\right)$$

3. Razmotrite "polarizacijski" potencijal

$$V(r) = \frac{V_0}{\left(r^2 + d^2\right)^2}$$

gdje su V_0 i d realne konstante.
(a) Upotrijebite prvu Bornovu aproksimaciju da izračunate amplitudu raspršenja $f(\theta)$ za navedeni potencijal. Rezultat trebate izraziti pomoću q, V_0 , d i temeljnih konstanti ($\hbar$, m, …).
(b) Nađite diferencijalni udarni presjek $d\sigma/d\Omega$.
(c) Pokažite da je totalni udarni presjek

$$\sigma = \frac{A}{k^2}\left[1 - \left(4kd + 1\right)e^{-4kd}\right]$$

Kolika je konstanta A?
(d) Pokažite da je pri visokim energijama ($kd >> 1$) udarni presjek $\sigma \sim E^{-1}$.
(e) Pokažite da je za bilo koji sferno-simetričan potencijal, udarni presjek u prvoj Bornovoj aproksimaciji na visokim energijama ($k \to \infty$) uvijek $\sigma \sim E^{-1}$.

***Uputa*:** pod (a) upotrijebite parcijalnu integraciju, uzmite $u = \sin(qr)$ i $dv = rdr/(r^2 + d^2)^2$. Pod (e), pokažite najprije da vrijedi relacija $k^2 \sin\theta d\theta = qdq$, gdje je valni vektor $k^2 = 2mE/\hbar^2$, a promjena valnog vektora $q = |\mathbf{k}' - \mathbf{k}|$ te zamijenite integraciju po θ s integracijom po q u izrazu za totalni udarni prosjek.