KVANTNA FIZIKA I PRIMJENE

Prvi kolokvij 29.04.2020.

1. Neka su $\{E_n\}$ energije vezanih stanja za 1D sustav kojima pripadaju normalizirane valne funkcije $\{\psi_n\}$. U trenutku $t = 0$ normalizirana valna funkcija sustava zadana je izrazom:

$$\Psi(x,t=0)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\alpha_1}\psi_1(x)+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\alpha_2}\psi_2(x)+\frac{1}{\sqrt{6}}e^{i\alpha_3}\psi_3(x)$$

gdje su α_i konstante.

(a) Napišite valnu funkciju $\Psi(x, t)$.

(b) Nađite vjerojatnost da u trenutku t mjerenje energije sustava pokaže vrijednost E_2 .

(c) Da li $\langle x\rangle$ ovisi o vremenu? Da li $\langle p\rangle$ ovisi o vremenu? Da li $E = \langle H\rangle$ ovisi o vremenu? Sve prosječne vrijednosti računaju se obzirom na zadano kvantno stanje $\Psi(x, t)$.

2. Razmotrite sustav dva identična jednostavna harmonička oscilatora kružne frekvencije ω i mase m.

(a) Napišite hamiltonijan ovog sustava neovisnih oscilatora i nađite energije sustava.

(b) Prepostavimo da su sada oscilatori vezani interakcijom $-\lambda x_1 x_2$, gdje je λ realna konstanta, a koordinate x_1 i x_2 odnose se na oscilator 1 i 2, respektivno. Napišite hamilotonijan ovog sustava vezanih oscilatora i nađite energije sustava.

(c) Prepostavljajući da je $\lambda << m\omega^2$ (granica slabog vezanja) nađite aproksimativne energije do prvog reda po $\lambda/m\omega^2$ pomoću izraza izračunatog pod (b).

***Uputa*:** pod (b), u hamilotonijanu sustava promijenite koordinate

$$\eta=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1+x_2)$$

$$\xi=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1-x_2)$$

3. Zadana su dva operatora A i B. Ako je $[A, B] = c$, gdje je c skalar (broj), pokažite da vrijedi:

(a) $e^A B e^{-A} = B + c$

(b) $e^{A+B} = e^A e^B e^{-c/2}$

***Uputa*:** pod (a), izračunajte $[e^A, B]$ na dva načina: upotrijebite definiciju komutatora i definiciju

$$e^A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}$$

Pod (b), uvedite operator

$$T(\lambda)=e^{\lambda A}e^{\lambda B}$$

i diferencirajte po λ. Koristite rezultat pod (a), a ne kraju računa postavite $\lambda = 1$.