KVANTNA MEHANIKA

Prvi kolokvij 18. 4. 2025.

ZADATAK 1 Izračunajte prosječnu vrijednost kinetičke energije za česticu u osnovnom stanju beskonačne potencijalne jame širine a.

ZADATAK 2 Čestica mase m giba se u antisimetričnom potencijalu oblika delta funkcije

$$V(x) = V_0\delta(x+a) - V_0\delta(x-a)$$

gdje je $V_0 > 0$. Nađite jednadžbu iz koje se energije vezanih stanja mogu numerički izračunati te pokažite da uvijek postoji jedno i samo jedno vezano stanje.
***Uputa*:** nacrtajte i pogledajte postoji li rješenje za $ka >> 1$ i $ka << 1$.

ZADATAK 3 Razmotrite sustav čije je početno stanje u $t = 0$ zadano pomoću potpunog i ortonormiranog skupa vektora $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle, |\phi_4\rangle\}$ izrazom:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{A}{\sqrt{12}}\sqrt{2}\,|\phi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|\phi_2\rangle + \frac{2}{\sqrt{12}}|\phi_3\rangle + \frac{1}{2}|\phi_4\rangle$$

gdje je A realna konstanta.
(a) Nađite A tako da ket $|\psi(0)\rangle$ bude normaliziran.
(b) Ako su energije koje odgovaraju stanjima $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle, |\phi_4\rangle$ jednake E_1 , E_2 , E_3 i E_4 respektivno, napišite stanje $|\psi(t)\rangle$ u nekom kasnijem trenutku t.
(c) Odredite vjerojatnost nalaženja sustava u trenutku t u stanju $|\phi_2\rangle$.

ZADATAK 4 (a) Lokalni potencijal opisan je operatorom W čiji je matrični element dijagonalan u koordinatnoj reprezentaciji $\langle x|W|x'\rangle = \delta(x - x')W(x)$. Kako glasi matrični element u impulsnoj reprezentaciji $\langle p|W|p'\rangle$?
(b) Izračunajte $\langle p|W|p'\rangle$ ako je $W(x) = -W_0 e^{-a|x|}$, $W_0 > 0$, $a > 0$.

$\boxed{1.}$ Na intervalu $(0, a)$ potencijalna energija $V = 0$ i

$$T = H$$

zbog $H\psi_n = E_n \psi_n$ imamo

$$\langle \psi_n | T | \psi_n \rangle = \int \psi_n^* T \psi_n \, dx = \int \psi_n^* \underbrace{H \psi_n}_{E_n \psi_n} dx$$

$$= E_n \underbrace{\int \psi_n^* \psi_n dx}_{1} = E_n$$

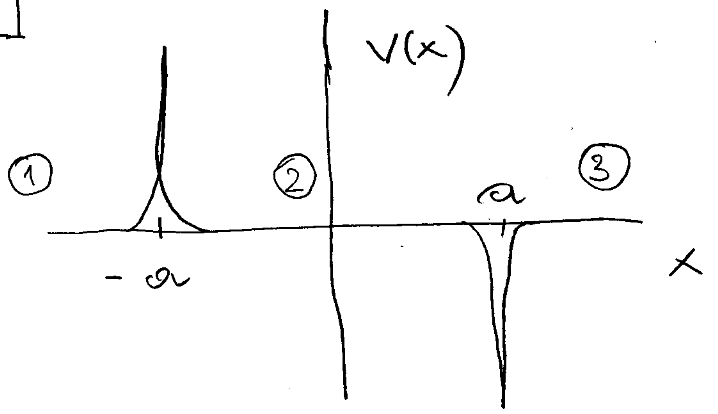
gdje je

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} n^2$$

Za osnovno stanje je $n = 1$ pa imamo

$$\langle T \rangle_{n=1} = E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$$

$\boxed{2.}$



Rješavamo Schrödingerovom jednadžbu za $E = -|E|$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{d^2u}{dx^2} + V_0\,\delta(x+a)\,u - V_0\,\delta(x-a)\,u = -|E|\,u$$

U područjima 1, 2 i 3 te $x \neq -a, a$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}u'' = -|E|u$$

$$u'' - \underbrace{\frac{2m|E|}{\hbar^2}}_{K^2}u = 0 \quad ; \quad K^2 = \frac{2m|E|}{\hbar^2}$$

U području ①

$$u_1 = A e^{K(x+a)} \quad ; \quad x \le -a$$

U području ②

$$u_2 = B e^{K(x-a)} + C e^{-K(x-a)} \quad ; -a \le x \le a$$

U području ③

$$u_3(x) = D e^{-K(x-a)} \quad ; \quad x \ge a$$

Rubni uvjeti na $x = -a$:

$$u_1(-a) = u_2(-a)$$

$$u_2'(-a) - u_1'(-a) = \frac{2mV_0}{\hbar^2}u_1(-a)$$

Jednadžbe za koeficijente glasi

$$A = Be^{-2ka} + Ce^{2ka}$$

$$\left(B\cdot K e^{-2ka} - CK e^{2ka}\right) - A\cdot K = \frac{2mV_0}{\hbar^2} A$$

Eliminiramo A

$$\left(BKe^{-2ka} - CKe^{2ka}\right) - KBe^{-2ka} - CKe^{2ka} =$$

$$\frac{2mV_0}{\hbar^2}\left(Be^{-2ka} + Ce^{2ka}\right)$$

$$\frac{2mV_0}{\hbar^2} e^{-2ka} \cdot B + \left(\frac{2mV_0}{\hbar^2} e^{2ka} + 2ke^{2ka}\right) C = 0 \qquad (*)$$

Rubni uvjeti na $x = a$:

$$u_2(a) = u_3(a)$$

$$u_3'(a) - u_2'(a) = -\frac{2mV_0}{\hbar^2} u_3(a)$$

Jednadžbe glase

$$B + C = D$$

$$-KD - (kB - kC) = -\frac{2mV_0}{\hbar^2} D$$

Eliminiramo D

$$-K(B+C) - kB + kC = -\frac{2mV_0}{\hbar^2}(B+C)$$

$$\left(-2k + \frac{2mV_0}{\hbar^2}\right) B + \frac{2mV_0}{\hbar^2} C = 0 \qquad (**)$$

Dvije jednadžbe (*) i (**) imaju netrivijalno rješenje za B i C ako je

$$\det\begin{pmatrix} \frac{2mV_0}{\hbar^2} e^{-2ka} & \left(\frac{2mV_0}{\hbar^2} + 2k\right) e^{2ka} \\ \left(-2k + \frac{2mV_0}{\hbar^2}\right) & \frac{2mV_0}{\hbar^2} \end{pmatrix} = 0$$

Imamo

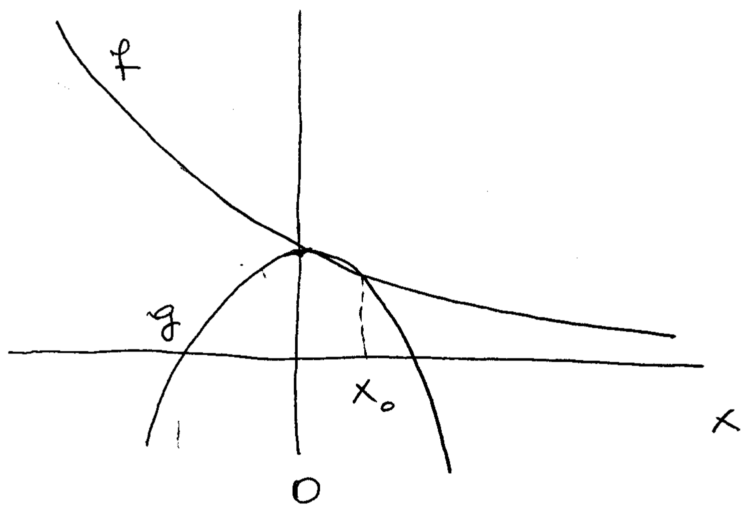
$$\left(\frac{2mV_0}{\hbar^2}\right)^2 e^{-2ka} - \left[\left(\frac{2mV_0}{\hbar}\right)^2 - 4k^2\right] e^{2ka} = 0$$

$$e^{-4ka} = 1 - \frac{4k^2}{\left(\frac{2mV_0}{\hbar^2}\right)^2}$$

Neka je $ka = x$. Tada je

$$\underbrace{e^{-4x}}_{f(x)} = \underbrace{1 - \frac{4x^2}{\left(\frac{2mV_0}{\hbar^2}\right)^2}}_{g(x)}$$

Slika izgleda ovako.



Pitanje je da li za svaki V_0 dobijemo točku x_0. Naime, V_0 utječe na širinu parabole!

Neka je $x \ll 1$. Tada je

$$e^{-4x} \simeq 1-4x$$

Jednadžbu tada možemo riješiti

$$1-4x = 1 - \frac{4x^2}{\left(\frac{2mV_0}{\hbar^2}\right)^2}$$

$x \neq 0$; za $x=0$ nemamo vezano stanje

$$1 = \frac{x}{\left(\frac{2mV_0}{\hbar^2}\right)^2} \Rightarrow \boxed{x_0 = \left(\frac{2mV_0}{\hbar^2}\right)^2}$$

Rješenje postoji (točno jedno!) kad je $2mV_0/\hbar^2 \ll 1$ odnosno, V_0 mali.

Ako je $x \gg 1$, tada je

$$e^{-4x} \to 0$$

pa je

$$1 - \frac{4x^2}{\left(\frac{2mV_0}{\hbar^2}\right)^2} \simeq 0$$

$$\boxed{x_0 = \frac{mV_0}{\hbar^2}}$$

Postoji presjek i kad je V_0 jako velik, točno jedan!

3.

(a) $\langle \psi(0) | \psi(0) \rangle = 1$

$$\left(\frac{A}{\sqrt{6}} \langle \phi_1 | + \frac{1}{\sqrt{6}} \langle \phi_2 | + \frac{2}{\sqrt{12}} \langle \phi_3 | + \frac{1}{2} \langle \phi_4 |\right) \cdot$$

$$\left(\frac{A}{\sqrt{6}} | \phi_1 \rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} | \phi_2 \rangle + \frac{2}{\sqrt{12}} | \phi_3 \rangle + \frac{1}{2} | \phi_4 \rangle\right)$$

Vrijedi

$$\langle \phi_i | \phi_j \rangle = \delta_{ij} \quad , \quad i,j = 1,2,3,4$$

Imamo

$$\frac{A^2}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = 1$$

$$\frac{A^2}{6} = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{12-2-4-3}{12}$$

$$= \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$A^2 = \frac{6}{4} \Rightarrow \boxed{A = \frac{\sqrt{6}}{2}}$$

(b)

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2} |\phi_1\rangle e^{-iE_1 t/\hbar} + \frac{1}{\sqrt{6}} |\phi_2\rangle e^{-iE_2 t/\hbar}$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{12}} |\phi_3\rangle e^{-iE_3 t/\hbar} + \frac{1}{2} |\phi_4\rangle e^{-iE_4 t/\hbar}$$

(c) Vjerojatnost nalaženja u stanju $|\phi_2\rangle$ je

$$|\langle \phi_2 | \psi(t) \rangle|^2 = \frac{1}{6}$$

$\boxed{4.}$

(a) $\langle p|W|p'\rangle = \int dx \int dx' \langle p|x\rangle\langle x|W|x'\rangle\langle x'|p'\rangle$

$$\langle x|W|x'\rangle = \delta(x-x')W(x)$$

$$\langle x'|p'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{ix'p'/\hbar}$$

$$\langle p|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{-ixp/\hbar}$$

$$= \int dx \int dx' \,\delta(x-x')\, W(x)\, e^{-ixp/\hbar} \cdot e^{ix'p'/\hbar} \cdot \frac{1}{2\pi\hbar}$$

$$= \int dx'\, W(x')\, e^{-ix'(p-p')/\hbar} \cdot \frac{1}{2\pi\hbar}$$

(b) Neka je

$$W(x) = -W_0\, e^{-|x|a}, \quad W_0 > 0$$

Imamo

$$\langle p|W|p'\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,(-W_0)\, e^{-|x|a} \cdot e^{-ix(p-p')/\hbar} \cdot \frac{1}{2\pi\hbar}$$

$$e^{-|x|a} = \begin{cases} e^{ax}; & x<0 \\ e^{-ax}; & x>0 \end{cases}$$

$$\langle p|W|p'\rangle = \int_{-\infty}^{0} dx\,(-W_0)\cdot\frac{1}{2\pi\hbar} \cdot e^{ax}\cdot e^{-ix(p-p')/\hbar}$$

$$= \int_{0}^{\infty} dx\,(-W_0)\cdot\frac{1}{2\pi\hbar}\, e^{-ax}\cdot e^{-ix(p-p')/\hbar}$$

Raciniamo integrale

$$\int_0^{\infty} e^{-x(\alpha + i(p-p')/\hbar)}\, dx = \left. \frac{e^{-x(\alpha + i(p-p')/\hbar)}}{\alpha + i(p-p')/\hbar} \right|_0^{\infty}$$

$$= - \frac{1}{\alpha + i(p-p')/\hbar}$$

$$\int_{-\infty}^{0} dx \ldots = [x \to -x]$$

$$\int_0^{\infty} dx\, e^{-x(\alpha - i(p-p')/\hbar)} = \left. \frac{e^{-x(\alpha - i(p-p')/\hbar)}}{\alpha - i(p-p')\hbar} \right|_0^{\infty}$$

$$= - \frac{1}{\alpha - i(p-p')/\hbar}$$

Prendo tutto,

$$\langle p | W | p' \rangle = \frac{W_0}{2\pi\hbar} \cdot \left(\frac{1}{\alpha - i(p-p')/\hbar} + \frac{1}{\alpha + i(p-p')/\hbar} \right)$$

$$= \frac{W_0}{2\pi\hbar} \cdot \frac{2\alpha}{\alpha^2 + (p-p')^2/\hbar^2}$$