KVANTNA MEHANIKA

Zadaci za vježbe 6. 3. 2025.

1 Valna funkcija

1.1 U trenutku $t = 0$ kvantno stanje čestice određeno je valnom funkcijom

$$\Psi(x,0) = \begin{cases} Ax/a, & \text{za } 0 \le x \le a \\ A(b-x)/(b-a), & \text{za } a \le x \le b \\ 0, & \text{drugo} \end{cases}$$

gdje su A, a, b konstante.
(a) Normalizirajte Ψ.
(b) Nacrtajte Ψ kao funkciju od x.
(c) Gdje je najvjerojatniji položaj čestice u $t = 0$?
(d) Kolika je vjerojatnost da nađemo česticu u lijevo od $x = a$? Provjerite svoj rezultat u graničnim slučajevima $b = a$ i $b = 2a$?
(e) Kolika je prosječna vrijednost od x?

1.2 Razmotrite valnu funkciju

$$\Psi(x,t) = A\mathrm{e}^{-\lambda|x|}\mathrm{e}^{-i\omega t}$$

gdje su A, λ i ω pozitivne realne konstante.
(a) Normalizirajte Ψ.
(b) Odredite prosječne vrijednosti od x i x^2.
(c) Nađite standardnu devijaciju od x. Skicirajte graf od $|\Psi|^2$ kao funkciju od x, te označite točke $\langle x\rangle - \sigma$ i $\langle x\rangle + \sigma$ da pokažete u kojem smislu σ ukazuje na 'rasipanje' vrijednosti od x oko prosječne vrijednosti. Kolika je vjerojatnost da će čestica biti nađena izvan tog intervala?

1.3 Čestica mase m je u stanju

$$\Psi(x,t) = A\mathrm{e}^{-amx^2/\hbar}\cdot\mathrm{e}^{-iat}$$

gdje su A i a pozitivne realne konstante.
(a) Nađite A.
(b) Za koju potencijalnu energiju $V(x)$ zadana valna funkcija zadovoljava Schrödingerovu jednadžbu?
(c) Izračunajte prosječne vrijednosti od x, x^2, p i p^2.
(d) Nađite σ_x i σ_p . Je li njihov produkt u suglasju sa relacijom neodređenosti?

1.4 (a) Pokažite da Schrödingerova jednadžba čuva normalizaciju, odnosno da je

$$\int |\Psi(x,t)|^2\,\mathrm{d}x = 1$$

za svaki trenutak t.
(b) Upotrijebite Schrödingerovu jednadžbu da dokažete jednakost

$$\langle p\rangle = m\frac{\mathrm{d}\langle x\rangle}{\mathrm{d}t} = \frac{\hbar}{i}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}\,\mathrm{d}x \ .$$

1.5 Neka je $P_{ab}(t)$ vjerojatnost nalaženja čestice u intervalu ($a < x < b$), u trenutku t.
(a) Pokažite da vrijedi

$$\frac{\mathrm{d}P_{ab}}{\mathrm{d}t} = J(a,t) - J(b,t)$$

gdje je

$$J(x,t) \equiv \frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial x} - \Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) \ .$$

Koja je jedinica za $J(x, t)$? Veličina J se naziva *strujom vjerojatnosti* zato jer pokazuje brzinu kojom vjerojatnost "protječe" u točki x. Ako $P_{ab}(t)$ raste, tada više vjerojatnosti teče u područje oko x nego što izlazi.
(b) Nađite struju vjerojatnosti za valnu funkciju

$$\Psi(x,t) = A\mathrm{e}^{-\lambda|x|}\mathrm{e}^{-i\omega t}$$

1.6 Pretpostavimo da želite opisati *nestabilnu česticu* koja se spontano raspada s "vremenom života" τ. U tom slučaju ukupna vjerojatnost za nalaženje čestice u nekom dijelu prostora ne bi smjela biti konstantna, već se treba smanjivati eksponencijalnom brzinom

$$P(t) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x,t)|^2 \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-t/\tau}$$

"Grubi" način na koji možemo doći do gornje formule je sljedeći: uobičajeno pretpostavljamo da je potencijalna energija V *realna*. Takva pretpostavka koja je veoma logična, dovodi do *očuvanja vjerojatnosti* što je sadržaj jednadžbe

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x,t)|^2 \,\mathrm{d}x = 0 \qquad (*)$$

Tu smo tvrdnju dokazali u Problemu 1.4. Recimo da potencijalnoj energiji V dodamo i imaginarni dio $V \rightarrow V = V_0 - i\Gamma$, gdje je V_0 prava (realna) potencijalna energija, a Γ pozitivna i realna konstanta.
(a) Pokažite da umjesto (*) dobijemo

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = -\frac{2\Gamma}{\hbar}P$$

(b) Riješite ovu jednadžbu i nađite vrijeme života čestice izraženog pomoću Γ.