

KVANTNA MEHANIKA

Zadaci za vježbe 13. 3. 2025.

3 Potencijalna jama

3.1 Čestica u beskonačnoj potencijalnoj jami ima početnu valnu funkciju oblika

$$\Psi(x, 0) = A \{u_1(x) + u_2(x)\}$$

gdje su u_1 i u_2 prva dva stacionarna stanja.

(a) Normalizirajte $\Psi(x, 0)$.

(b) Nađite $\Psi(x, t)$ i $|\Psi(x, t)|^2$.

(c) Izračunajte $\langle x \rangle$. Primijetite da $\langle x \rangle$ oscilira u vremenu. Kolika je frekvencija oscilacije? Kolika je amplituda oscilacije?

(d) Izračunajte $\langle p \rangle$.

(e) Nađite prosječnu vrijednost od H . Usporedite je sa E_1 i E_2 .

(f) *Klasična* čestica u beskonačnoj potencijalnoj jami odbija se od zidova. Ako je njena energija jednaka prosječnoj vrijednosti izračunatoj pod (e), kolika je frekvencija klasičnog gibanja? Usporedite je sa frekvencijom nađenom pod (c).

3.2 Izračunajte $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $\langle p \rangle$, $\langle p^2 \rangle$, σ_x i σ_p za n -to stacionarno stanje beskonačne potencijalne jame. Provjerite da li je relacija neodređenosti zadovoljena. Koje stanje je najbliže granici neodređenosti?

3.3 Za česticu u beskonačnoj potencijalnoj jami, nađite $\Psi(x, t)$ ako je u početnom trenutku

$$\Psi(x, 0) = Ax(a - x)$$

Izračunajte koeficijente u razvoju c_1 , c_2 i c_3 , numerički do petog decimalnog mjesta, te komentirajte te brojeve. Koeficijent c_n govori, u grubo, koliko je od u_n "sadržano" u $\Psi(x, t)$. Pretpostavimo da ste mjerili energiju u trenutku $t_0 > 0$, i dobili E_3 . Iz činjenice da ponovljeno mjerenje u bliskom trenutku *nakon* predhodnog mjerenja mora dati istu vrijednost za fizičku veličinu kao predhodno mjerenje, što možete reći o koeficijentima c_n *nakon* mjerenja? To je primjer nagle promjene valne funkcije (*collapse of the wave function*) nakon mjerenja.

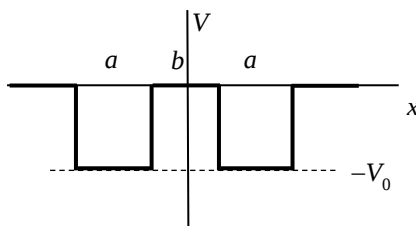
3.4 Promotrimo konačnu potencijalnu jamu i jednadžbu iz koje se računaju energije za *simetrična stanja*. Pokažite da postoji vezano stanje bez obzira koliko je jama "plitka", odnosno, bez obzira koliko je mali V_0 . Koja veza mora postojati između a i V_0 da postoji bar jedno *antisimetrično* stanje?

3.5 Promotrite dvostruku potencijalnu jamu prikazanu na crtežu. Pretpostavite da su dubina jame V_0 i širina a konstantne i dovoljno velike da imamo veći broj vezanih stanja.

(a) Skicirajte (ne računajte!) valnu funkciju za osnovno stanje u_1 i prvo pobuđeno stanje u_2 za slučajeve: (i) $b = 0$, (ii) $b \approx 0$, (iii) $b \gg 0$.

(b) Kvalitativno, kako se odgovarajuće energije za gornje valne funkcije E_1 i E_2 mijenjaju promjenom širine jame b , ako b mijenjamo od 0 do ∞ ? Skicirajte $E_1(b)$ i $E_2(b)$ na istom grafu.

(c) Dvostruka potencijalna jama vrlo je primitivan, jednodimenzionalan model za potencijal kojeg elektron osjeća u dvoatomnoj molekuli gdje jame predstavljaju privlačnu silu jezgri. Ako se jezgre mogu micati, zauzet će položaje najmanje energije. U svijetlu vaših zaključaka pod (b), da li elektron nastoji približiti ili odvojiti jezgre?



3.6 Razmotrite potencijal oblika

$$V(x) = -\frac{\hbar^2 a^2}{m} \operatorname{sech}^2(ax)$$

gdje je a pozitivna konstanta.

(a) Pokažite da taj potencijal ima vezano stanje

$$u_0(x) = A \operatorname{sech}(ax)$$

te nađite energiju tog vezanog stanja. Normalizirajte u_0 i nacrtajte graf za tu funkciju.

(b) Pokažite da je funkcija

$$u_k(x) = A \left(\frac{ik - a \tanh(ax)}{ik + a} \right) e^{ikx}$$

gdje je $k^2 = 2mE/\hbar^2$ rješenje Schrödingerove jednadžbe za svaku pozitivnu vrijednost energije E . Budući da vrijedi $\tanh x \rightarrow -1$ za $x \rightarrow -\infty$ imamo

$$u_k(x) \approx A e^{ikx} \text{ za veliki i negativni } x.$$

To rješenje predstavlja, onda, val koji dolazi sa lijeva bez dopunskog *reflektiranog* vala. Koji je asimptotski oblik od $u_k(x)$ za velike i *pozitivne* x ? Koliki su R i T za ovaj potencijal?

Napomena: potencijal oblika $\operatorname{sech}^2 x$ je primjer potencijala kod kojeg upadna čestica ima vjerojatnost 1 da prođe bez refleksije.