

KVANTNA MEHANIKA

Zadaci za vježbe 17. 3. 2025.

4 Slobodna čestica

4.1 Pretpostavimo da česticu koja je lokalizirana u intervalu $-a < x < a$ i ima valnu funkciju

$$\Psi(x, 0) = \begin{cases} A; & -a < x < a \\ 0; & \text{drugo} \end{cases}$$

(A, a su pozitivne realne konstante) oslobodimo u $t = 0$.

(a) Odredite A tako da normalizirate $\Psi(x, 0)$.

(b) Odredite Fourierov transformat funkcije $\Psi(x, 0)$.

(c) Komentirajte ponašanje Fourierovog transformata $\Phi(k)$ za velike i male vrijednosti od a . U kakvoj su vezi ovakvo ponašanje i princip neodređenosti?

4.2 Slobodna čestica ima početnu valnu funkciju

$$\Psi(x, 0) = Ae^{-ax^2}$$

gdje su A i a realne konstante ($a > 0$).

(a) Normalizirajte $\Psi(x, 0)$.

(b) Nađite $\Psi(x, t)$. Po mogućnosti, upotrijebite program *Mathematica*.

(c) Nađite $|\Psi(x, t)|^2$. Izrazite rezultat pomoću veličine $w = \{a / [1 + (2\hbar at / m)^2]\}^{1/2}$. Skicirajte $|\Psi|^2$ kao funkciju od x u $t = 0$ i za veliki t . Što se događa s $|\Psi|^2$ u vremenu?

(d) Nađite $\langle x \rangle, \langle p \rangle, \langle x^2 \rangle, \langle p^2 \rangle, \sigma_x, \sigma_p$.

(e) Da li relacija neodređenosti vrijedi? U kojem trenutku t sustav priđe najbliže granici neodređenosti?

4.3 Zamislite da klizač atomskih dimenzija kliže bez trenja po kružnoj žici duljine a . Uočite da je ovaj problem sličan slobodnoj čestici, ali je uvjet na valnu funkciju $u(x + a) = u(x)$. Nađite stacionarna stanja i odgovarajuće energije. Primijetite da postoje dva nezavisna rješenja za svaku od nađenih energija E_n : jedno rješenje opisuje gibanje u smjeru, a drugo suprotno smjeru gibanja kazaljke na satu. Nazovite ih u_+ i u_- . Kako biste objasnili ovu degeneraciju pozivajući se na teorem kojeg ste pokazali na predavanjima? Odnosno, zašto taj teorem ne vrijedi u ovom problemu?

4.4 Pokažite da je Schrödingerova jednodimenzionalna jednadžba za slobodnu česticu invarijantna na Galilejeve transformacije. Nakon što primijenite Galilejeve transformacije $x' = x - vt, t' = t$, transformirana valna funkcija $\Psi'(x', t') = f(x, t) \Psi(x, t)$ zadovoljava valnu jednadžbu sa crtanim varijablama, gdje je f funkcija od $x, t, \hbar, m, v$. Nađite f i pokažite da se ravni val $\Psi(x, t) = \exp[i(kx - \omega t)]$ transformira na očekivani način.

4.5 Promotrite valnu funkciju koja je, početno, superpozicija dva dobro odvojena i uska valna paketa

$$\psi_1(x, 0) + \psi_2(x, 0)$$

koja su odabrana tako da je apsolutna vrijednost integrala prekrivanja

$$\gamma(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^*(x) \psi_2(x) dx$$

veoma mala. Kako se valni paket giba i širi, hoće li se $|\gamma(t)|$ povećavati u vremenu ako se valni paketi prekrivaju?

4.6 Neutronske interferometar visoke rezolucije sužava energijski rasap termalnih neutrona kinetičke energije 20 meV na rasap $\Delta\lambda/\lambda = 10^{-9}$ po valnim duljinama. Procijenite duljinu valnog paketa neutrona u smjeru gibanja. Za koje vrijeme će se valni paket značajno proširiti?