

KVANTNA MEHANIKA

Zadaci za vježbe 20. 3. 2025.

5 Potencijal oblika delta-funkcije

5.1 Nađite rješenja Schrödingerove jednadžbe ako je potencijalna energija oblika

$$V(x) = -\alpha\delta(x)$$

Razmotrite posebno slučajeve $E < 0$ i $E > 0$.

5.2 Riješite vremenski nezavisnu Schrödingerovu jednadžbu za beskonačnu potencijalnu jamu u kojoj se potencijalna barijera oblika delta-funkcije nalazi u centru:

$$V(x) = \begin{cases} \alpha\delta(x) & ; -a < x < a \\ \infty & ; |x| \geq a \end{cases}$$

Nađite dozvoljene energije (grafički, ako je potrebno). Kakve su u odnosu na energije bez delta-funkcije?

5.3 Promotrite vremenski zavisani potencijal oblika

$$V(x, t) = -\alpha\delta(x - vt)$$

gdje je v konstantna brzina jame.

(a) Pokažite da Schrödingerova jednadžba daje točno rješenje

$$\Psi(x, t) = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar} e^{-m\alpha|x-vt|/\hbar^2} e^{-i\{(E+mv^2/2)t-mvx\}/\hbar}$$

gdje je $E = -m\alpha^2/2\hbar^2$ energija vezanog stanja *mirujuće* delta-funkcije. **Uputa:** Schrödingerova jednadžba invarijantna je na Galileove transformacije $x' = x - vt$, $t' = t$ (zadatak 4.4). Tada se valna funkcija u laboratorijskom (necrtanom) sustavu i koordinatnom sustavu koji se giba brzinom v (crtanom) razlikuju do na fazni faktor

$$\Psi(x', t') = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(\frac{mv^2}{2}t - mvx\right)\right] \Psi(x, t)$$

(b) Nađite prosječnu vrijednost za Hamiltonian u navedenom stanju i komentirajte.

5.4 Čestica mase m giba se u polju privlačnog potencijala oblika delta-funkcije

$$V(x) = -\frac{\hbar^2 g^2}{2m} \delta(x)$$

gdje je g konstanta. Na vježbama smo izračunali valnu funkciju za (jedino!) vezano stanje u ovom problemu koja glasi

$$\psi_0(x) = \sqrt{\kappa} e^{-\kappa|x|}$$

Pretpostavimo da na česticu djeluje trenutna sila koja joj preda impuls p_0 . Novo stanje čestice postaje:

$$\psi_1 = \psi_0(x) e^{ip_0 x/\hbar}$$

(a) Pokažite da je prosječni impuls u stanju ψ_0 jednak nuli, a u stanju ψ_1 jednak p_0 .

(b) Izračunajte vjerojatnost da česticu, nakon dobivanja impulsa p_0 (kad je u stanju ψ_1), nađemo u stanju ψ_0 .

5.5 Čestica mase m giba se u polju potencijala oblika

$$V(x) = \begin{cases} \infty & ; x \leq 0 \\ V_0\delta(x-a) & ; x > 0 \end{cases}$$

gdje je $V_0 > 0$.

(a) Nađite valnu funkciju.

(b) Nađite koeficijent transmisije.

5.6 Čestica mase m giba se u jednodimenzionalnom potencijalu oblika

$$V(x) = -g\delta(x-a) - g\delta(x+a)$$

- (a) Ako je $g > 0$, napišite transcendentne jednačbe za energije vezanih stanja u ovom sustavu.
- (b) Izračunajte i nacrtajte energijske razine u jedinicama od $\hbar^2/ma^2$ kao funkciju od $mag/\hbar^2$. Objasnite grafove.
- (c) U granici velike udaljenosti između delta funkcija, $2a \rightarrow \infty$, izvedite jednostavnu formulu za cijepanje ΔE između parnog osnovnog stanja energije E_+ i neparnog pobuđenog stanja energije E_- .