

KVANTNA MEHANIKA

Zadaci za vježbe 24. 4. 2025.

10 Orbitalni angularni moment

10.1 Čestica u sferno-simetričnom potencijalu nalazi se u stanju opisanom valnom funkcijom

$$\psi(x, y, z) = C(xy + yz + zx)e^{-\alpha r^2}$$

Koja je vjerojatnost da mjerenjem $\mathbf{L}^2$ dobijemo vrijednost 0? A vjerojatnost da dobijemo $6\hbar^2$? Ako za vrijednost l dobijemo 2, koje su relativne vjerojatnosti za $m_l = -2, -1, 0, 1, 2$?

10.2 Valna funkcija čestice u sferno-simetričnom potencijalu $V(r)$ glasi

$$\psi(x, y, z) = (x + y + 3z)f(r)$$

(a) Da li je ψ svojstvena funkcija od $\mathbf{L}^2$? Ako jest, koliki je l ? Ako nije, koje moguće vrijednosti od l možemo dobiti mjerenjem $\mathbf{L}^2$?

(b) Koje su vjerojatnosti da nađemo česticu sa različitim vrijednostima od m_l ?

(c) Pretpostavimo da nekako saznamo da je ψ svojstvena funkcija hamiltonijana s energijom E . Naznačite kako da iz toga doznamo $V(r)$.

10.3 (a) Dokažite da je za česticu u potencijalu $V(\mathbf{r})$ brzina promjene prosječne vrijednosti orbitalnog angularnog momenta jednaka prosječnoj vrijednosti momenta sile

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{L} \rangle = \langle \mathbf{N} \rangle$$

gdje je $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times (-\nabla V)$. Ovo je rotacijska verzija Ehrenfestovog teorema.

(b) Pokažite da je $d\langle \mathbf{L} \rangle / dt = 0$ za sferno-simetrični potencijal. Ovo je kvantno-mehanička verzija zakona očuvanja angularnog momenta.

10.4 (a) Upotrijebite činjenicu da operatori orbitalnog angularnog momenta L_x, L_y, L_z zadovoljavaju osnovne komutacijske relacije i pokažite da vrijedi

$$\mathbf{L}^2 = L_z^2 + L_+ L_- - \hbar L_z$$

$$\mathbf{L}^2 = L_z^2 + L_- L_+ + \hbar L_z$$

gdje je $L_+ \equiv L_x + iL_y$ operator podizanja i $L_- \equiv L_x - iL_y$ operator spužtanja.

(b) Operatori podizanja i spužtanja imaju sljedeće svojstvo

$$L_{\pm} |l, m_l\rangle = c_{\pm} |l, m_l \pm 1\rangle$$

gdje je $c_{\pm}$ normalizacijska konstanta. Pokažite da je

$$\langle L_+ L_- \rangle \geq 0$$

$$\langle L_- L_+ \rangle \geq 0$$

(c) Pomoću rezultata pod (a) i (b) pokažite da vrijede jednakosti

$$l(l+1) \geq m^2 + m$$

$$l(l+1) \geq m^2 - m$$

te iz njih zaključite da vrijedi $-l \leq m \leq l$.

10.5 Čestica u sferno-simetričnom potencijalu nalazi se u svojstvenom stanju operatora $\mathbf{L}^2$ i L_z sa svojstvenim vrijednostima $l(l+1)\hbar^2$ i $m\hbar$. Dokažite da su prosječne vrijednosti u stanju $|l, m\rangle$ jednake

$$\langle L_x \rangle = \langle L_y \rangle = 0, \quad \langle L_x^2 \rangle = \langle L_y^2 \rangle = [l(l+1)\hbar^2 - m^2\hbar^2]/2$$

Interpretirajte ovaj rezultat poluklasično.

10.6 Dokažite komutacijske relacije za angularni moment pomoću fundamentalnih komutacijskih relacija.