# KVANTNA MEHANIKA

Zadaci za vježbe 28. 4. 2025.

## 11 Spin

**11.1** Pretpostavimo da je čestica sa spinom 1/2 u stanju

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) Koja je vjerojatnost da mjerenjem $S_z$ dobijemo vrijednost $+\hbar/2$, koja da dobijemo $-\hbar/2$?
(b) Koja je vjerojatnost da mjerenjem $S_x$ dobijemo vrijednost $+\hbar/2$, a koja da dobijemo $-\hbar/2$?
(c) Izračunajte prosječnu vrijednost od $S_x$ u stanju $\chi$.

**11.2** Spinski dio valne funkcije elektrona glasi

$$\chi = A\begin{pmatrix} 3i \\ 4 \end{pmatrix}$$

(a) Odredite konstantu normalizacije $A$.
(b) Nađite prosječne vrijednosti od $S_x$ , $S_y$ , $S_z$ u stanju $\chi$.
(c) Nađite $\langle(\Delta S_x)^2\rangle$, $\langle(\Delta S_y)^2\rangle$, $\langle(\Delta S_z)^2\rangle$ za stanje $\chi$.

**11.3** (a) Nađite svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore za $S_y$ .
(b) Ako mjerimo $S_y$ na čestici u spinskom stanju

$$\chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\chi_+ + b\chi_-$$

koje vrijednosti možete dobiti i koje su vjerojatnosti dobivanja tih vrijednosti? Za $a$ i $b$ vrijedi $|a|^2 + |b|^2 = 1$.
(c) Ako mjerimo $S_y^2$ koje vrijednosti možete dobiti i s kojim vjerojatnostima?

**11.4** Definirajmo operatore spuštanja $J_-$ i podizanja $J_+$ na sljedeći način:

$$J_+ \equiv J_x + iJ_y$$
$$J_- \equiv J_x - iJ_y$$

gdje su $J_x$ i $J_y$ komponente angularnog momenta (orbitalnog, spina ili ukupnog). Koristeći samo osnovne komutacijske relacije za komponente $J_i$ pokažite da vrijedi:
(a) $[\mathbf{J}^2, J_i] = 0$ za $i = 3$
(b) $[J_+, J_-] = 2\hbar J_z$
(c) $[J_z, J_\pm] = \pm\,\hbar J_\pm$
(d) Zbog (a) vrijede sljedeće relacije $\mathbf{J}^2|\,a, b\rangle = a|\,a, b\rangle$ i $J_z|\,a, b\rangle = b|\,a, b\rangle$. Ovdje su $\{|\,a, b\rangle\}$ zajednički svojstveni vektori za $\mathbf{J}^2$ i $J_z$ , a skup $\{a\}$ svojstvene vrijednosti za $\mathbf{J}^2$ i skup $\{b\}$ svojstvene vrijednosti za $J_z$ . Dokažite relaciju

$$J_\pm\,|\,a, b\rangle = c_\pm\,|\,a, b \pm \hbar\rangle$$

gdje je $c_\pm$ normalizacijska konstanta. Može se pokazati da $a = j(j + 1)\hbar^2$ i $b = m\hbar$ gdje $j = 0, 1/2, 1, 3/2,\ldots$, a $m = -j, -j + 1,\ldots, 0,\ldots, j - 1, j$.

**11.5** Konstruirajte matrice projekcija spina za česticu spina $s = 1$ u bazi $\{|\,1, -1\rangle, |\,1, 0\rangle, |\,1, 1\rangle\}$ što su svojstveni vektori za $S_z$ . Koristite relaciju 12.4(d) u obliku

$$S_\pm\,|\,s, m_s\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1) - m_s(m_s \pm 1)}\,|\,s, m_s \pm 1\rangle$$

**11.6** Za matrice spina 1/2 vrijede antikomutacijske relacije

$$\left\{ S_i, S_j \right\} = \frac{1}{2}\hbar^2 \delta_{ij}$$

u što se možemo uvjeriti direktnim uvršavanjem matrica, zapisanih u bilo kojoj bazi, u gornju relaciju. Pomoću te relacije dokažite da vrijedi

$$\mathbf{S}^2 = \frac{3}{4}\hbar^2$$

gdje je $\mathbf{S}^2 = \mathbf{S} \cdot \mathbf{S} = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$.