

KVANTNA MEHANIKA

Zadaci za vježbe 5. 5. 2025.

12 Zbrajanje angularnih momenata

12.1 Promotrite sustav koji se sastoji od dvije neinteragirajuće čestice spinova $1/2$. Mjerenje je pokazalo sljedeće rezultate:

$$s_{1z} = \frac{1}{2}; s_{2x} = \frac{1}{2}$$

Ovdje su S_1 , S_2 operatori spina čestice 1, 2, a S_{1z} , S_{2x} operatori projekcije spina na os z za prvu česticu i os x za drugu česticu. Njihove svojstvene vrijednosti su s_{1z} , s_{2x} . Kolika je vjerojatnost da za ukupni spin sustava izmjerimo vrijednost $s = 1$?

12.2 Promotrite dvije čestice sa spinovima $s_1 = 1$ i $s_2 = 1/2$. Poslužite se tablicama za Clebsch-Gordanove koeficijente i izračunajte:

(a) Vjerojatnost da izmjerimo $m_2 = -1/2$ ako je sustav u stanju $|s = 3/2, m = -1/2\rangle$.

(b) Vjerojatnost da izmjerimo $s = 1/2$ ako je sustav u stanju $|m_1 = -1, m_2 = +1/2\rangle$.

(c) Vjerojatnost da izmjerimo $m = -1/2$ ako je sustav u stanju $|m_1 = -1, m_2 = +1/2\rangle$.

12.3 Kvarkovi imaju spin $1/2$. Tri kvarka vezana u jednu česticu čine barion (na primjer; proton, neutron), dva kvarka vezana u jednu česticu čine mezon (na primjer; pion, kaon). Pretpostavite da su kvarkovi u osnovnom stanju (pa je orbitalni angularni moment jednak nuli).

(a) Koje vrijednosti spina mogu imati barioni?

(b) Koje vrijednosti spina mogu imati mezoni?

12.4 (a) Čestica spina 1 i čestica spina 2 miruju u konfiguraciji s totalnim spinom 3 i njegovom z -projekcijom 1 (drugim riječima, svojstvena vrijednost od S_z je $\hbar$). Ako ste mjerili z -komponentu angularnog momenta čestice sa spinom 2, koje vrijednosti ste mogli dobiti i s kojim vjerojatnostima?

(b) Elektron u vodikovom atomu je u stanju $|5, 1, 0, -1/2\rangle$. Kad biste mogli mjeriti kvadrat ukupnog angularnog momenta samog elektrona (bez spina protona), koje vrijednosti biste mogli dobiti i koje su vjerojatnosti za dobivanje svake od vrijednosti?

12.5 Pokažite da za Clebsch-Gordanove koeficijente vrijede sljedeće relacije:

$$\sum_{\substack{m_1 \\ m_1 + m_2 = m}} \sum_{m_2} C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j} C_{m'_1 m'_2 m}^{j_1 j_2 j} = \delta_{jj'} \delta_{mm'}$$

$$\sum_j C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j} C_{m_1 m_2 m'}^{j_1 j_2 j'} = \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2}$$

12.6 Provjerite sljedeće komutacijske relacije:

(a) $[J^2, J_\alpha^2] = 0, \alpha = 1, 2$

(b) $[J_i, J_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} J_k$

gdje je $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$, a $J_i = J_{1i} + J_{2i}$.