

KVANTNA MEHANIKA

Zadaci za vježbe 6. 5. 2025.

13 Sferno-simetrični potencijal

13.1 Riješite Schrödingerovu jednadžbu u sfernim koordinatama za slobodnu česticu. Usporedite ta rješenja s rješenjem za isti problem u Kartezijevim koordinatama.

13.2 Riješite Schrödingerovu jednadžbu za česticu u sfernoj, beskonačnoj potencijalnoj jami

$$V(r) = \begin{cases} 0, & r < a \\ \infty, & r > a \end{cases}$$

13.3 Odredite valne funkcije i energije trodimenzionalnog, izotropnog harmoničkog oscilatora. Usporedite ta rješenja s rješenjima za isti problem u Kartezijevim koordinatama.

13.4 Čestica mase m nalazi se u sferno-simetričnom potencijalu $V(r)$ u s -stanju ($l = 0$). Pokažite da vrijedi

$$|\psi_{l=0}(0)|^2 = C \left\langle \frac{dV(r)}{dr} \right\rangle$$

te odredite konstantu C .

13.5 Promatrajmo dvije čestice mase m_1 i m_2 u sferno-simetričnom potencijalu $V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$. Uvedimo sljedeće koordinate:

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}; \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

i konjugirane impulse

$$\mathbf{p} = \frac{m_2 \mathbf{p}_1 - m_1 \mathbf{p}_2}{m_1 + m_2}; \mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$$

Provjerite da li su $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ i $(\mathbf{R}, \mathbf{P})$ doista kanonske varijable, odnosno da li za njih vrijede osnovne komutacijske relacije. Pokažite da hamiltonijan u novim koordinatama i impulsima glasi

$$K = \frac{\mathbf{P}^2}{2M} + \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + V(|\mathbf{r}|)$$

gdje je $M = m_1 + m_2$ i $\mu = m_1 m_2 / M$. Nađite rješenje stacionarne Schrödingerove jednadžbe za hamiltonijan K . Diskutirajte i usporedite sa sličnim problemom iz klasične mehanike.

13.6 Potencijalna energija za nuklearnu silu između protona i neutrona približno ima oblik

$$V(r) = -Ae^{-r/a}$$

Nađite valnu funkciju za energiju osnovnog stanja ($l = 0$). Odredite uvjet koji povezuje dubinu jame A i veličinu a koja opisuje doseg gornje interakcije tako da nastane bar jedno vezano stanje.