KVANTNA MEHANIKA

Zadaci za vježbe 29. 5. 2025.

19 Vremenski neovisan račun smetnje: degenerirana stanja

19.1 Promotrimo česticu mase m koja se slobodno može gibati u jednodimenzionalnom području duljine L čije su krajnje točke spojene. Na primjer, možemo zamisliti klizač koji se giba bez trenja po kružnoj žici duljine L.
(a) Pokažite da stacionarna stanja mogu biti zapisana u obliku

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \mathrm{e}^{2\pi i n x/L} \; ; -L/2 < x < L/2$$

gdje je $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, a da su energije jednake

$$E_n = \frac{2}{m}\left(\frac{n\pi\hbar}{L}\right)^2$$

Primijetite da su sva stanja, osim osnovnog, dvostruko degenerirana.
(b) Pretpostavimo da na ovaj sustav počne djelovati smetnja

$$H' = -V_0\, \mathrm{e}^{-x^2/a^2}$$

gdje je $a \ll L$. Smetnju možemo zamisliti kao "jamicu" na mjestu $x = 0$, kao da smo savili žicu pa klizač može biti "uhvaćen" u jamici. Nađite korekcije prvog reda za energije E_n .
(c) Koje linearne kombinacije od ψ_n i ψ_{-n} su "dobre", odnosno koje dijagonaliziraju smetnju H' ?
(d) Nađite hermitski operator A koji zadovoljava pretpostavke Teorema o dijagonalizaciji smetnje. Pokažite da su stanja nađena pod (c) svojstvena stanja za H_0 i A.

19.2 Promotrite trodimenzionalnu, beskonačnu, potencijalnu jamu

$$V(x,y,z) = \begin{cases} 0 \; ; 0 < x < a, 0 < y < a, 0 < z < a \\ \infty \; ; \text{drugo} \end{cases}$$

Neka na sustav počne djelovati smetnja

$$H' = \begin{cases} V_0 \; ; 0 < x < a/2, 0 < y < a/2 \\ 0 \; ; \text{drugo} \end{cases}$$

Nađite energije u prvom redu računa smetnje za osnovno i prvo pobuđeno stanje. Uzmite da je $V_0 > 0$.

19.3 ***Normalni Zeemanov efekt*** Hamiltonijan za elektron u vodikovom atomu kojeg smo stavili u konstantno magnetsko polje **B**, zanemarujući spin elektrona, glasi

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e'^2}{r} + \left(\frac{e}{2m}\right)\mathbf{L}\cdot\mathbf{B}$$

gdje je **L** angularni moment elektrona, a $e'^2 = e^2/(4\pi\epsilon_0)$. Prije uključivanja magnetskog polja, postojat će samo jedna spektralna linija za prijelaz iz stanja $n = 4$, $l = 3$ u stanje $n = 3$, $l = 2$ sukladno ***izbornim pravilima*** ($\Delta m = \pm 1, 0$ i $\Delta l = \pm 1$).
(a) Kako će se navedena linija promijeniti u prisutnosti magnetskog polja? Nacrtajte dijagram sa mogućim prijelazima i pri tome uzmite u obzir izborna pravila.
(b) Kakav će efekt na linije imati električno polje **K** koje je paralelno polju **B**?

19.4 ***Fina struktura vodika*** Energije elektrona u atomu vodika (Bohrove energije) mijenjaju se ako uzmemo u obzir sljedeće efekte:
1. Relativistička korekcija
2. Interakcija spin-orbita (spin-staza)
3. Lambov pomak
4. Hiperfina struktura

U donjoj tablici dani su redovi veličina svih doprinosa. Broj α naziva se ***konstanta fine strukture*** i jedna je od najvažnijih konstanti u fizici:

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \cong \frac{1}{137{,}036}$$

Energije	Red veličine
Bohrove	$\alpha^2 mc^2$
Fina struktura = relativistička korekcija + interakcija spin-orbita	$\alpha^4 mc^2$
Lambov pomak	$\alpha^5 mc^2$
Hiperfina struktura	$(m/m_p)\alpha^4 mc^2$

Fina struktura vodika je ***relativistička korekcija*** energija i korekcija zbog ***interakcija spin-staza***. Napomenimo da se u finu strukturu također, ubraja i ***Darwinov član*** kojeg ćemo zanemariti.
(a) Izračunajte relativističku korekciju energija u vodikovom atomu. Krenite od relativističke formule za kinetičku energiju

$$T = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - mc^2$$

(b) Potencijalna energija za opis interakcije spin-orbita za vodik glasi

$$H_{LS} = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)\frac{1}{2m^2c^2}\frac{1}{r^3}\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}$$

Izračunajte korekciju energija elektrona u vodikovom atoma zbog interakcije spin-orbita.
(c) Zbrojite doprinose u (a) i (b) da dobijete finu strukturu vodika. Zbrojite te doprinose sa Bohrovim energijama.

19.5 ***Zeemanov efekt*** Stavimo atom vodika u magnetsko polje **B**. Hamiltonijan za vodikov elektron glasi

$$H = H_0 + H_{LS} + H_B$$

gdje su

$$H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}\,; \quad H_{LS} = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)\frac{1}{2m^2c^2}\frac{1}{r^3}\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}\,; \quad H_B = \frac{e}{2m}(\mathbf{L}+2\mathbf{S})\cdot\mathbf{B}$$

(a) Pretpostavimo da je magnetsko polje **B** slabo. Uzmite da H_B slaba smetnja i izračunajte korekcije za energije hamiltonijana $H_0 + H_{LS}$ koje ste već izračunali u 19.4 (c).
(b) ***Paschen-Backov efekt*** Pretpostavimo da je magnetsko polje **B** jako. Uzmite da H_{LS} slaba smetnja i izračunajte korekcije za energije hamiltonijana $H_0 + H_B$.

19.6 Promotrimo molekulu čija 4 atoma leže u jednoj ravnini: jedan atom je tipa A, ostala tri su tipa B kao što je prikazano na crtežu. Elektron se može naći u blizini svakog od atoma. Ako je elektron blizu atoma A njegova energija jednaka je E_1^0; ako je u blizini nekog od atoma tipa B energija je E_2^0, gdje je $E_1^0 < E_2^0$. Stanja koja opisuju nalaženje elektrona u blizini nekog od atoma su

$$|1\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}; |2\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}; |3\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}; |4\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

(a) U prvoj aproksimaciji, elektron se ne može gibati s jednog na drugi atom. Upotrijebite gornje vektore i napišite odgovarajući hamiltonijan za taj problem.
(b) Promotrimo slučaj kad se elektron može gibati sa atoma A na B i natrag, ali se ne može gibati s B na B. Označimo energiju prijelaza $A \leftrightarrow B$ s ε, gdje je $\varepsilon << E_1^0$. Napišite matricu za smetnju u ovom slučaju.
(c) Upotrijebite korekciju drugog reda u računu smetnje za energiju stanja $|1\rangle$, te korekciju prvog reda računa smetnje za energiju stanja $|2\rangle$, $|3\rangle$, $|4\rangle$.
(d) Izračunajte ***točno*** korekcije za energije E_1^0, E_2^0. Pokažite da u granici $\varepsilon << E_1^0$ dobijete rezultat pod (c).