

KVANTNA MEHANIKA

Zadaci za vježbe 2. 6. 2025.

20 WKB aproksimacija

20.1 Upotrijebite WKB aproksimaciju i nađite približne energije za problem s potencijalom

$$V(x) = \begin{cases} mgx, & x > 0 \\ \infty, & x < 0 \end{cases}$$

Usporedite točne i približne vrijednosti u tablici. Što se iz tablice može zaključiti?

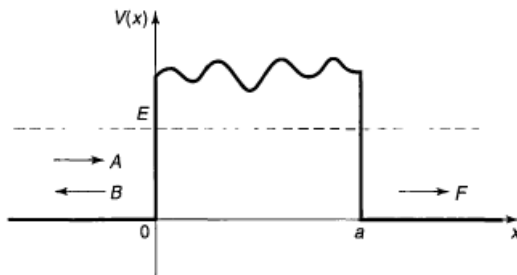
The Quantized Energies of a Bouncing Ball in Units of $(mg^2\hbar^2/2)^{1/3}$

n	WKB	Exact
1	2.320	2.338
2	4.082	4.088
3	5.517	5.521
4	6.784	6.787
5	7.942	7.944
6	9.021	9.023
7	10.039	10.040
8	11.008	11.009
9	11.935	11.936
10	12.828	12.829

20.2 Razmotrite tunel-efekt u problemu 1D potencijalne barijere prikazane na slici. Pokažite da je koeficijent transmisije u WKB aproksimaciji za široku i/ili visoku barijeru

$$T \propto e^{-2\gamma}$$

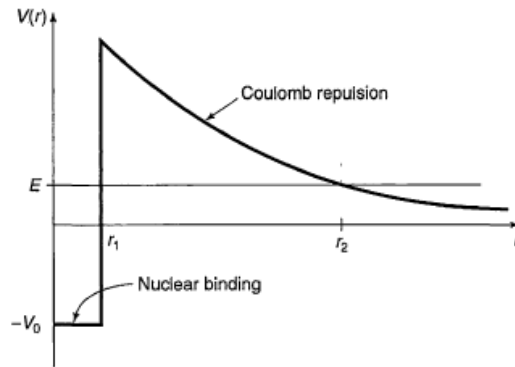
$$\gamma \equiv \frac{1}{\hbar} \int_0^a |p(x)| dx$$



20.3 George Gamow je 1928. godine uspješno primijenio formule iz zadatka 20.2 na proces alfa-raspada koji se događa kod radioaktivnih elemenata. Alfa-čestica (dva protona i dva neutrona) je pozitivno nabijena i s ostatkom jezgre međudjeluje repulzivno ako je dovoljno daleko od jezgre kao što je prikazano na slici. Pokažite da je vrijeme života početne jezgre radioaktivnog elementa u WKB aproksimaciji

$$\tau \simeq \frac{2r_1}{v} e^{2\gamma}$$

gdje je v prosječna brzina alfa-čestice unutar jezgre.



20.4 Za sferno simetrični potencijal WKB aproksimaciju možemo primijeniti na radialnu Schrödingerovu jednadžbu. U slučaju $l = 0$ možemo primijeniti WKB jednadžbu za energije u obliku

$$\int_0^{r_0} p(r) dr = \left(n - \frac{1}{4} \right) \pi \hbar$$

gdje je r_0 točka obrata, a za točku $r = 0$ uzima se kao da se radi o beskonačno visokoj potencijalnoj barijeri. Primijenite ovu jednadžbu za dobivanje energija u problemu s potencijalom

$$V(r) = V_0 \ln(r/a)$$

gdje su V_0 i a konstante.

20.5 Odredite valne funkcije i energije za problem harmonijskog oscilatora u WKB aproksimaciji. Usporedite valnu funkciju i energiju osnovnog stanja s točnim vrijednostima.

20.6 Alternativan izvod za WKB valnu funkciju temelji se na razvoju u red po potencijama po $\hbar$. Zapišimo valnu funkciju u obliku

$$\psi(x) = \exp(if(x)/\hbar)$$

gdje je $f(x)$ kompleksna funkcija.

(a) Uvrstite ovo rješenje u Schrödingerovu jednadžbu i pokažite da je

$$i\hbar f'' - (f')^2 + p^2 = 0$$

(b) Napišite $f(x)$ u obliku reda potencija po $\hbar$

$$f(x) = f_0(x) + \hbar f_1(x) + \hbar^2 f_2(x) + \dots$$

i, grupirajući članove po potencijama za $\hbar$, pokažite da je

$$(f_0')^2 = p^2$$

$$if_0'' = 2f_0' f_1'$$

$$if_1'' = 2f_0' f_2' + (f_1')^2$$

$$\vdots$$

(c) Riješite jednadžbe za f_0 i f_1 i pokažite da, do prvog reda po $\hbar$, dobivate WKB valnu funkciju

$$\psi_{\text{WKB}}(x) = \frac{C}{\sqrt{p(x)}} \exp \left[\pm \frac{i}{\hbar} \int p(x) dx \right]$$