

KVANTNA MEHANIKA

Zadaci za vježbe 5. 6. 2025.

21 Vremenski ovisan račun smetnje

21.1 Čestica mase m početno je u osnovnom stanju jednodimenzionalne beskonačne potencijalne jame. U trenutku $t = 0$, "ciglu" ubacimo u jamu pa potencijal postaje

$$V(x) = \begin{cases} V_0, & 0 \leq x \leq a/2 \\ 0, & a/2 \leq x \leq a \\ \infty, & \text{drugo} \end{cases}$$

pri čemu je $V_0 \ll E_1$. Nakon vremena T , "ciglu" izvadimo iz jame i izmjerimo energiju čestice. Nadite vjerojatnost da ćemo izmjeriti energiju E_2 u prvom redu računa smetnje.

21.2 U sljedećim primjerima upotrijebite prvi red računa smetnje.

(a) Neka je H' konstantna smetnja koju smo uključili u $t = 0$ i isključili u nekom kasnijem vremenu t . Pokažite da je vjerojatnost prijelaza jednaka

$$P_{i \rightarrow n} = |c_n(t)|^2 \approx 4 |H'_{ni}|^2 \frac{\sin^2[(E_n - E_i)t / 2\hbar]}{(E_n - E_i)^2}$$

(b) Neka je H' harmonička smetnja oblika $H' = V \cos(\omega t)$. Pod uobičajenim uvjetima, pokažite da je prijelaz moguć samo za stanja s energijama $E_n = E_i \pm \hbar\omega$ i da je vjerojatnost prijelaza

$$P_{i \rightarrow n} = |c_n(t)|^2 \approx |V_{ni}|^2 \frac{\sin^2[(E_n - E_i \pm \hbar\omega)t / 2\hbar]}{(E_n - E_i \pm \hbar\omega)^2}$$

21.3 (a) Provjerite uvjet normalizacije

$$\sum_k |c_k(t)|^2 = 1$$

za primjer (a) iz zadatka 21.2 i komentirajte.

(b) Pretpostavimo da želite izračunati vjerojatnost da je sustav ostao u početnom stanju $|\psi_i\rangle$. Je li bolje računati pomoću formule

$$1 - \sum_{k \neq i} |c_k(t)|^2$$

ili upotrijebiti $|c_i(t)|^2$?

21.4 Promotrimo sustav s dva kvantna stanja $|a\rangle$ i $|b\rangle$. Pretpostavimo da smetnja ima oblik Diracove delta funkcije:

$$H' = U\delta(t),$$

da su matrični elementi $U_{aa} = U_{bb} = 0$, a $U_{ab} = U_{ba}^* = \alpha$, te vrijedi $c_a(-\infty) = 1$ i $c_b(-\infty) = 0$.

(a) Nađite **točne** izraze za $c_a(t)$ i $c_b(t)$.

(b) Provjerite je li $|c_a(t)|^2 + |c_b(t)|^2 = 1$.

(c) Kolika je vjerojatnost prijelaza

$$P_{a \rightarrow b}(t \rightarrow \infty) ?$$

Uputa: Diracovu delta funkciju napišite u obliku

$$\delta_\varepsilon = \begin{cases} 1/2\varepsilon, & -\varepsilon \leq t \leq \varepsilon \\ 0, & \text{drugo} \end{cases}$$

i na kraju računa uzmite $\varepsilon \rightarrow 0$.

21.5 Čestica je početno (u trenutku $t \rightarrow -\infty$) u osnovnom stanju u beskonačnoj potencijalnoj jami čiji su rubovi na $x = 0$ i $x = a$. Uključimo vremenski ovisnu smetnju

$$V(t) = \varepsilon x e^{-t^2}$$

gdje je ε mali broj, u trenutku $t = 0$. Izračunajte vjerojatnost da česticu nađemo u prvom pobuđenom stanju nakon dugog vremena (u trenutku $t \rightarrow \infty$).

21.6 Magnetska rezonancija Čestica spina $1/2$ sa žiromagnetskim omjerom γ miruje u statičkom magnetskom polju $B_0 \mathbf{e}_z$ u odnosu na ishodište koordinatnog sustava, no precesira Larmorovom frekvencijom $\omega_0 = \gamma B_0$. Uključimo malo, transversalno magnetsko polje s radijskom frekvencijom (rf) ω

$$\mathbf{B} = B_{\text{rf}} (\cos \omega t \mathbf{e}_x - \sin \omega t \mathbf{e}_y)$$

tako da ukupno magnetsko polje glasi

$$\mathbf{B} = B_{\text{rf}} (\cos \omega t \mathbf{e}_x - \sin \omega t \mathbf{e}_y) + B_0 \mathbf{e}_z$$

(a) Napišite 2×2 matricu hamiltonijana za ovaj sustav.

(b) Ako je

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$$

spinsko stanje u trenutku t , pokažite da su jednadžbe za komponente spinora

$$\dot{a} = \frac{i}{2} (\Omega e^{i\omega t} b + \omega_0 a)$$

$$\dot{b} = \frac{i}{2} (\Omega e^{-i\omega t} a - \omega_0 b)$$

gdje je $\Omega \equiv \gamma B_{\text{rf}}$ te riješite ovaj sustav diferencijalnih jednadžbi.

(c) Ako je čestica početno u stanju χ_+ (spin gore), pokažite da je vjerojatnost da prijeđe u stanje χ_- (spin dolje) jednaka

$$P(t) = P(\omega) \sin(\omega' t / 2) = \frac{\Omega^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \Omega^2} \sin(\omega' t / 2)$$

gdje je

$$\omega' \equiv \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \Omega^2}$$

i nacrtajte $P(\omega)$.

(d) Pomoću $\omega_0 = \gamma B_0$ možemo eksperimentalno opažati rezonanciju i odrediti magnetski dipolni moment čestice. Pri nuklearnoj magnetskoj rezonanciji (NMR) mjerimo g-faktor protona. Pretpostavimo da je statičko polje 10 000 gaussa (1 T), dok je amplituda rf polja jednaka 0,01 gauss (10^{-6} T). Kolika je rezonantna frekvencija?