

KVANTNA MEHANIKA

Zadaci za vježbe 9. 6. 2025.

22 Teorija raspršenja. Bornova aproksimacija

22.1 Upotrijebite Bornovu aproksimaciju da izračunate diferencijalni $d\sigma/d\Omega$ i totalni udarni presjek σ_{tot} za centralni Gaussov potencijal oblika

$$V(r) = \frac{V_0}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{r^2}{4a^2}}$$

Usporedite vaš rezultat sa diferencijalnim presjekom za Yukawa-in potencijal

$$V(r) = \frac{V_0 a}{r} e^{-r/a}$$

22.2 Za potencijal oblika $V(r) = V_0 R \delta(r - R)$ izračunajte amplitudu raspršenja $f(\theta)$ i diferencijalni udarni presjek $d\sigma/d\Omega$ u Bornovoj aproksimaciji. Odredite granice valjanosti vašeg računa za niske i visoke energije.

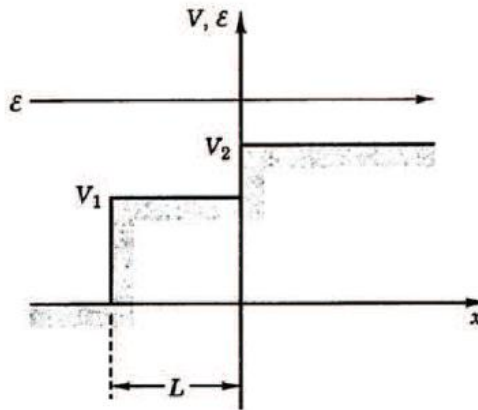
23.3 Dokažite sljedeću tvrdnju: promatramo raspršenje na periodičnom potencijalu $V(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = V(\mathbf{r})$ gdje je $\mathbf{R}$ konstantan vektor. Tada je amplituda raspršenja u Bornovoj aproksimaciji uvijek jednaka nuli osim u slučaju da je ispunjen uvjet $\mathbf{q} \cdot \mathbf{R} = 2\pi n$, n je cijeli broj.

22.4 Iskoristite integralnu Schrödingerovu jednadžbu da nađete uvjet za valjanost prve Bornove aproksimacije. Primijenite dobiveni uvjet na problem sferne potencijalne jame radijusa R

$$V(r) = \begin{cases} V_0 & ; r < R \\ 0 & ; r > R \end{cases}$$

i procijanite valjanost Bornove aproksimacije za visoke i niske energije.

22.5 Razmotrite raspršenje na potencijalu prikazanom na slici.



Nađite V_1 i L tako da se česticima upadne energije $\mathcal{E}$ potpuno spriječi refleksija na potencijalu V_2 . Ovo je kvantno-mehanička verzija anti-refleksivnog sloja u valnoj optici.

22.6 (a) Nađite Greenovu funkciju za 1D Schrödingerovu jednadžbu i pokažite da je, analogno postupku u 3D, integralni oblik Schrödingerove jednadžbe oblika

$$\psi(x) = u(x) - \frac{im}{\hbar^2 k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik|x-x'|} V(x') \psi(x') dx'$$

(b) Izvedite izraz za Bornovu aproksimaciju postavljajući $u(x) = e^{ikx}$, te $\psi(x) \approx u(x)$. Pokažite da je koeficijent refleksije

$$R \approx \left(\frac{m}{\hbar^2 k} \right)^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{2ikx} V(x) dx \right|^2$$

(c) Koliki je koeficijent refleksije u problemu s potencijalom $V(x) = -a\delta(x)$? Usporedite s točnim rezultatom

$$R = \frac{1}{1 + \frac{2\hbar^2 E}{ma^2}}$$