KVANTNA MEHANIKA

Zadaci za vježbe 13. 3. 2025.

3 Potencijalna jama

3.1 Čestica u beskonačnoj potencijalnoj jami ima početnu valnu funkciju oblika

$$\Psi(x,0) = A\left\{u_1(x) + u_2(x)\right\}$$

gdje su u_1 i u_2 prva dva stacionarna stanja.
(a) Normalizirajte $\Psi(x, 0)$.
(b) Nađite $\Psi(x, t)$ i $|\Psi(x, t)|^2$.
(c) Izračunajte $\langle x\rangle$. Primijetite da $\langle x\rangle$ oscilira u vremenu. Kolika je frekvencija oscilacije? Kolika je amplituda oscilacije?
(d) Izračunajte $\langle p\rangle$.
(e) Nađite prosječnu vrijednost od H. Usporedite je sa E_1 i E_2.
(f) *Klasična* čestica u beskonačnoj potencijalnoj jami odbija se od zidova. Ako je njena energija jednaka prosječnoj vrijednosti izračunatoj pod (e), kolika je frekvencija klasičnog gibanja? Usporedite je sa frekvencijom nađenom pod (c).

3.2 Izračunajte $\langle x\rangle$, $\langle x^2\rangle$, $\langle p\rangle$, $\langle p^2\rangle$, σ_x i σ_p za n-to stacionarno stanje beskonačne potencijalne jame. Provjerite da li je relacija neodređenosti zadovoljena. Koje stanje je najbliže granici neodređenosti?

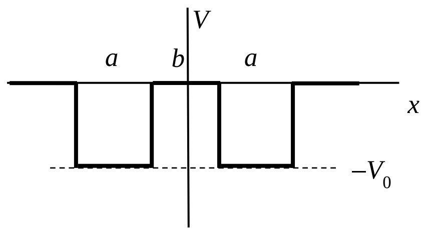
3.3 Za česticu u beskonačnoj potencijalnoj jami, nađite $\Psi(x, t)$ ako je u početnom trenutku

$$\Psi(x,0) = Ax(a-x)$$

Izračunajte koeficijente u razvoju c_1, c_2 i c_3 , numerički do petog decimalnog mjesta, te komentirajte te brojeve. Koeficijent c_n govori, u grubo, koliko je od u_n "sadržano" u $\Psi(x, t)$. Pretpostavimo da ste mjerili energiju u trenutku $t_0 > 0$, i dobili E_3 . Iz činjenice da ponovljeno mjerenje u bliskom trenutku *nakon* predhodnog mjerenja mora dati istu vrijednost za fizičku veličinu kao predhodno mjerenje, što možete reći o koeficijentima c_n *nakon* mjerenja? To je primjer nagle promjene valne funkcije (*collapse of the wave function*) nakon mjerenja.

3.4 Promotrimo konačnu potencijalnu jamu i jednadžbu iz koje se računaju energije za *simetrična stanja*. Pokažite da postoji vezano stanje bez obzira koliko je jama "plitka", odnosno, bez obzira koliko je mali V_0 . Koja veza mora postojati između a i V_0 da postoji bar jedno *antisimetrično* stanje?

3.5 Promotrite dvostruku potencijalnu jamu prikazanu na crtežu. Pretpostavite da su dubina jame V_0 i širina a konstantne i dovoljno velike da imamo veći broj vezanih stanja.
(a) Skicirajte (ne računajte!) valnu funkciju za osnovno stanje u_1 i prvo pobuđeno stanje u_2 za slučajeve: (i) b = 0, (ii) $b \approx 0$, (iii) $b >> 0$.
(b) Kvalitativno, kako se odgovarajuće energije za gornje valne funkcije E_1 i E_2 mijenjaju promjenom širine jame b, ako b mijenjamo od 0 do ∞? Skicirajte $E_1(b)$ i $E_2(b)$ na istom grafu.
(c) Dvostruka potencijalna jama vrlo je primitivan, jednodimenzionalan model za potencijal kojeg elektron osjeća u dvoatomnoj molekuli gdje jame predstavljaju privlačnu silu jezgri. Ako se jezgre mogu micati, zauzet će položaje najmanje energije. U svijetlu vaših zaključaka pod (b), da li elektron nastoji približiti ili odvojiti jezgre?



3.6 Razmotrite potencijal oblika

$$V(x) = -\frac{\hbar^2 a^2}{m}\operatorname{sech}^2(ax)$$

gdje je a pozitivna konstanta.

(a) Pokažite da taj potencijal ima vezano stanje

$$u_0(x) = A\operatorname{sech}(ax)$$

te nađite energiju tog vezanog stanja. Normalizirajte u_0 i nacrtajte graf za tu funkciju.

(b) Pokažite da je funkcija

$$u_k(x) = A\left(\frac{ik - a\tanh(ax)}{ik + a}\right)e^{ikx}$$

gdje je $k^2 = 2mE/\hbar^2$ rješenje Schrödingerove jednadžbe za svaku pozitivnu vrijednost energije E. Budući da vrijedi $\tanh x \to -1$ za $x \to -\infty$ imamo

$$u_k(x) \approx Ae^{ikx} \text{ za veliki i negativni } x.$$

To rješenje predstavlja, onda, val koji dolazi sa lijeva bez dopunskog *reflektiranog* vala. Koji je asimptotski oblik od $u_k(x)$ za velike i *pozitivne* x? Koliki su R i T za ovaj potencijal?

***Napomena*:** potencijal oblika $\operatorname{sech}^2 x$ je primjer potencijala kod kojeg upadna čestica ima vjerojatnost 1 da prođe bez refleksije.

$\boxed{3.1}$

$$\psi(x,0) = A\left(u_1(x) + u_2(x)\right)$$

$$u_1 = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

$$u_2 = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)$$

(a)

$$\int |\psi(x,0)|^2 dx = 1$$

$$\psi^*(x,0)\psi(x,0) = |A|^2 (u_1^* + u_2^*)(u_1 + u_2)$$

Uvrstimo u integral

$$|A|^2 \left\{ \underbrace{\int u_1^* u_1 dx}_{=1} + \underbrace{\int u_1^* u_2 dx}_{=0} + \underbrace{\int u_2^* u_1 dx}_{=0} + \underbrace{\int u_2^* u_2 dx}_{=1} \right\} = 1$$

$$\int u_m^* u_n dx = \delta_{mn}$$

$$2|A|^2 = 1 \Rightarrow A = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(b)

$$\psi(x,t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(u_1(x) e^{-iE_1 t/\hbar} + u_2(x) e^{-iE_2 t/\hbar} \right)$$

$$|\psi(x,t)|^2 = \psi^*\psi = \frac{1}{2}\left(u_1^* u_1 + u_1^* u_2 e^{+i(E_1-E_2)t/\hbar} + u_2^* u_1 e^{+i(E_2-E_1)t/\hbar} + u_2^* u_2 \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(|u_1|^2 + |u_2|^2 + \underbrace{2\mathrm{Re}\left(u_2^* u_1 e^{+i(E_2-E_1)t/\hbar}\right)}_{2 u_2 u_1 \cos\left(\frac{E_2-E_1}{\hbar}t\right)} \right)$$

$$E_2 - E_1 = \frac{4\pi^2\hbar^2}{2ma^2} - \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} = \frac{3\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

Uvodimo:

$$\omega \equiv \frac{\pi^2\hbar}{2ma^2}$$

$$|\psi(x,t)|^2 = \frac{1}{2}\left\{ |u_1|^2 + |u_2|^2 + 2u_1u_2\cos 3\omega t \right\}$$

$$= \frac{1}{a}\left\{ \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{a}x\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\cos 3\omega t \right\}$$

(c)

$$\langle x\rangle = \int_0^a \psi^*(x,t)\, x\, \psi(x,t)\, dx = \int_0^a |\psi(x,t)|^2 x\, dx$$

$$= \frac{1}{a}\underbrace{\int_0^a x\sin^2\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right)dx}_{J_1} + \frac{1}{a}\underbrace{\int_0^a x\sin^2\left(\frac{2\pi x}{a}\right)dx}_{J_2}$$

$$+ \frac{2\cos 3\omega t}{a}\underbrace{\int_0^a x\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)dx}_{J_3}$$

$$J_1 = J_2 = \frac{a^2}{4}$$

$$J_3 = -\frac{8a^2}{9\pi^2}$$

$$\langle x\rangle = \frac{a}{2} - \frac{16a}{9\pi^2}\cos \underbrace{3\omega}_{\omega_B} t$$

Frekvencija: $\nu_B = \frac{\omega_B}{2\pi} = \frac{3\omega}{2\pi}$

$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{\pi\hbar}{ma^2}$$

(d)

$$\langle p\rangle = m\frac{d}{dt}\langle x\rangle = m\cdot\frac{16a}{\cancel{9}_3\pi^2}\cdot\sin 3\omega t\cdot \cancel{3}\omega$$

$$= \frac{16\, ma\omega}{3\pi^2}\sin 3\omega t$$

(e)

$$\langle H\rangle = \int \psi^* H \psi\, dx$$

$$H\psi = H\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{ u_1 e^{-iE_1t/\hbar} + u_2 e^{-iE_2t/\hbar} \right\}$$

$$H u_n = E_n u_n$$

H je linearan operator;

$$H(c\,u_n) = c\,(H u_n)$$

Općenito,
$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

$$H u_1 = E_1 u_1$$
$$H u_2 = E_2 u_2$$

$$H\psi(x,t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(E_1 u_1 e^{-iE_1t/\hbar} + E_2 u_2 e^{-iE_2t/\hbar} \right)$$

$$\psi^*(H\psi) = \frac{1}{2}\left(u_1^* e^{iE_1t/\hbar} + u_2^* e^{iE_2t/\hbar}\right)\left(E_1 u_1 e^{-iE_1t/\hbar} + E_2 u_2 e^{-iE_2t/\hbar}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(E_1 |u_1|^2 + E_2 u_1^* u_2 e^{-i(E_2-E_1)t/\hbar} + E_1 u_2^* u_1 e^{-i(E_1-E_2)t/\hbar} + E_2 |u_2|^2 \right)$$

Uvrštavamo u integral. Zbog

$$\int u_m^* u_n \, dx = \delta_{mn}$$

imamo

$$\langle H \rangle = \frac{1}{2}(E_1+E_2) = \frac{5\pi^2\hbar^2}{4ma^2}$$; OPREZ: u ovom kvantnom stanju je $\sigma_H \neq 0$!

$$\langle H \rangle > E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$
$$\langle H \rangle < E_2 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\cdot 4$$

(f) Pretpostavka:

$$E_{klasično} \equiv \frac{5\pi^2\hbar^2}{4ma^2}$$
$$\frac{mv^2}{2} = \frac{5\pi^2\hbar^2}{4ma^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{5}{2}}\frac{\pi\hbar}{ma}$$

Pretpostavka: čestica se jednoliko giba između rubova jame

$$\left.\begin{aligned} a &= v\cdot\frac{T}{2} \\ T &= \frac{1}{\nu} \end{aligned}\right\} \quad \nu_{kl} = \frac{v}{2a}$$

$$\nu_{kl} = \sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\frac{\pi\hbar}{2ma^2} = \sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\frac{2}{3}\nu_Q = \sqrt{\frac{10}{9}}\,\nu_Q$$

$$\nu_Q = \frac{\omega_Q}{2\pi} = \frac{3\omega}{2\pi} = \frac{3}{4}\frac{\pi\hbar}{ma^2}$$

$\boxed{3.2}$

$$u(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}\cdot x\right)$$

$$\langle x \rangle = \int_0^a x\,|u|^2 dx = \frac{2}{a}\int_0^a x \cdot \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx = \frac{a}{2}$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_0^a x^2 |u|^2 dx = \frac{2}{a}\int_0^a x^2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{2n^2\pi^2}$$

$$\langle p \rangle = \frac{2}{a}\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\left(\sin \frac{n\pi}{a}x\right) dx$$

$$= \frac{2\hbar}{ia}\cdot\frac{n\pi}{a}\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx = 0$$

$$\langle p^2 \rangle = \frac{2}{a}\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cdot\left(-\hbar^2\frac{d^2}{dx^2}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\right) dx$$

$$= \frac{2\hbar^2}{a}\cdot\frac{n^2\pi^2}{a^2}\int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{a^2}$$

$$\sigma_x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} = \sqrt{\frac{a^3}{3} - \frac{a^2}{2n^2\pi} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{2}{n^2\pi^2}}$$

$$\sigma_p = \frac{n\pi\hbar}{a}$$

Relacija neodređenosti:

$$\sigma_x\sigma_p = \frac{n\pi\hbar}{2}\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{2}{n^2\pi^2}} = \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{3} - 2}$$

Za $n=1$ dobivamo minimum umnoška $\sigma_x\sigma_p$.

$$\sigma_x\sigma_p = \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{\pi^2}{3} - 2} > \frac{\hbar}{2}$$

$\boxed{3.3}$ Normalizacija

$$|A|^2 \int_0^a x^2(a-x)^2 dx = |A|^2 \cdot \frac{a^5}{30} = 1$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{\sqrt{30}}{a^2\sqrt{a}}$$

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x) e^{-iE_n t/\hbar}$$

$$t=0; \quad \psi(x,0) = Ax(a-x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x)$$

$$c_n = \int_0^a u_n^* \psi(x,0) dx = \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot A \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) x(a-x) dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \frac{\sqrt{30}}{a^2\sqrt{a}} \cdot \left(\frac{4a^3}{\pi^3} \cdot \frac{1}{n^3}\right); \quad n \text{ neparan}$$

$$c_n = 0 \quad ; \quad n \text{ paran}$$

Imamo,

$$\psi(x,t) = \sum_{n \text{ neparan}}^{\infty} \left(\frac{8\sqrt{15}}{\pi^3 n^3}\right) u_n(x) e^{-iE_n t/\hbar}$$

$$c_1 = \frac{8\sqrt{15}}{\pi^3} = 0{,}99928$$

$$c_2 = 0$$

$$c_3 = 0{,}03701$$

Odavdje vidimo da je gotovo sva $u_1(x)$ sadržana u $\psi(x,t)$.
Doprinosi ostalih su mali.

Nakon mjerenja, dobivamo E_3 za energiju. Koeficijent $c_3 = 1$, a ostali su jednaki nuli.

$\boxed{3.4}$

Energiju za simetrična stanja računamo po izrazu

$$\varkappa = \ell \, \mathrm{tg}(\ell \cdot a) \qquad (*)$$

$$\varkappa = \frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar}$$

$$\ell = \frac{\sqrt{2m(V_0 - |E|)}}{\hbar}$$

Promotrit ćemo granicu $V_0 \to 0$. Očito tada i $|E| \to 0$. Formalno,

$$|E| < V_0 \ll \frac{\hbar^2}{2ma^2} \leftarrow \text{red veličine energije u beskonačnoj pot. jami}$$

Izraz za energije simetričnih stanja aproksimiramo:

$$\ell \cdot a = \sqrt{\frac{2ma^2}{\hbar^2}(V_0 - |E|)} \ll 1$$

$$\mathrm{tg}(\ell \cdot a) \simeq \ell a$$

Imamo iz $(*)$

$$\varkappa \simeq \ell^2 a$$

$$\frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar} = \frac{2m(V_0 - |E|)}{\hbar^2} \cdot a \Big/^2$$

$$|E|^2 - \left(2V_0 + \frac{\hbar^2}{2ma^2}\right)|E| + V_0^2 = 0$$

$$|E| = \frac{1}{2}\left\{\left(2V_0 + \frac{\hbar^2}{2ma^2}\right) \pm \sqrt{\left(2V_0 + \frac{\hbar^2}{2ma^2}\right)^2 - 4V_0^2}\right\}$$

$$\sqrt{\left(2V_0 + \frac{\hbar^2}{2ma^2}\right)^2 - 4V_0^2} = \sqrt{2V_0 \cdot \frac{\hbar^2}{ma^2} + \left(\frac{\hbar^2}{2ma^2}\right)^2} = \frac{\hbar^2}{2ma^2}\sqrt{1 + \frac{8V_0 \cdot ma^2}{\hbar^2}}$$

$$= \frac{\hbar^2}{2ma^2}\left(1 + 4\,\frac{V_0 \cdot ma^2}{\hbar^2} - \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{8V_0 ma^2}{\hbar^2}\right)^2 + \dots\right)$$

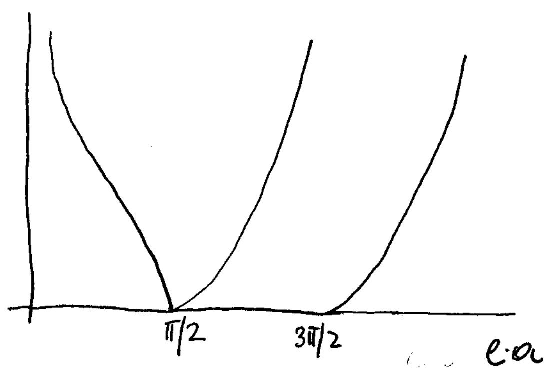
$$|E| = V_0 + \frac{\hbar^2}{4ma^2} \pm \frac{\hbar^2}{4ma^2}\left(1 + \frac{4V_0 ma^2}{\hbar^2} - \frac{8V_0^2 m^2 a^4}{\hbar^4} + \dots\right)$$

Uzimamo "$-$"; za "$+$" dobivamo energije veće od V_0.

$$|E| = \frac{2ma^2}{\hbar^2} V_0^2 = V_0 \left(\frac{V_0}{\hbar^2/2ma^2}\right) \quad \ll 1$$

Odavdje vidimo da za proizvoljno mali V_0, dobivamo još manji $|E|$. Dakle, uvijek postoji bar jedno vezano stanje. Naravno, grafički smo to mogli utvrditi grafički pomoću slike 3.3 (Pregled f.).

Kod antisimetričnih stanja, promotrimo ovakvu situaciju (slika 3.4, Pregled)



Energije za antisimetrična stanja su: $\quad \varkappa \cdot a = -(\ell \cdot a)\,\mathrm{ctg}(\ell \cdot a)$

$$\ell a = x$$

$$x = \sqrt{\frac{2ma^2}{\hbar^2}(V_0 - |E|)}$$

$$\varkappa a = \frac{2ma^2}{\hbar^2}|E| = \frac{2ma^2}{\hbar^2}V_0 - x^2$$

$$-\mathrm{ctg}\, x = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2ma^2}{\hbar^2}V_0 - x^2}$$

Za $x = \frac{\pi}{2}$ lijeva strana je nula (crtež)

$$\frac{2ma^2}{\hbar^2}V_0 = \frac{\pi^2}{4}$$

Dobit ćemo bar jedno vezano stanje ako je

$$\frac{2ma^2V_0}{\hbar^2} > \frac{\pi^2}{4} \implies \frac{8ma^2V_0}{\pi^2\hbar^2} > 1$$

$\boxed{3.5}$

(a) Energija osnovnog stanja odgovara simetričnoj valnoj funkciji što se može vidjeti sa slike 3.3 i 3.4 (iz Pregleda formula). Energija prvog pobuđenog stanja odgovara antisimetričnoj valnoj funkciji.

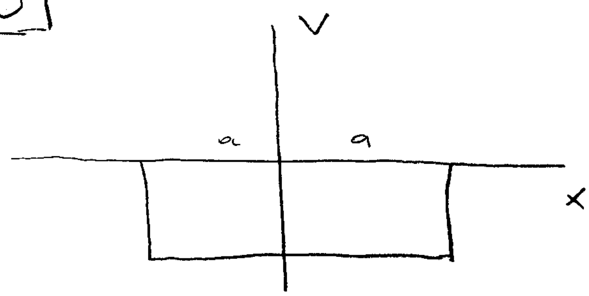
Osnovno stanje:

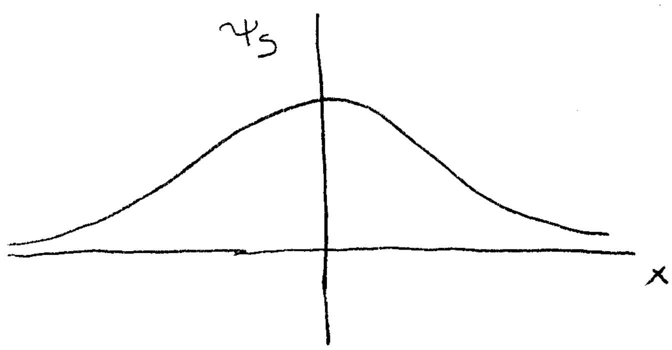
$$\psi_S = \begin{cases} A e^{\varkappa x}, & x < -a \\ D\cos(\ell x), & -a < x < a \\ A e^{-\varkappa x}, & x > a \end{cases}$$

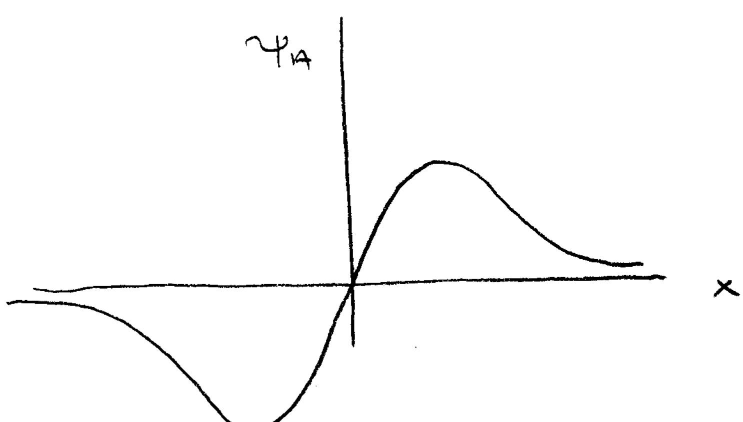
Prvo pobuđeno stanje:

$$\psi_A = \begin{cases} B e^{\varkappa x}, & x < -a \\ C\sin(\ell x), & -a < x < a \\ -B e^{-\varkappa x}, & x > a \end{cases}$$

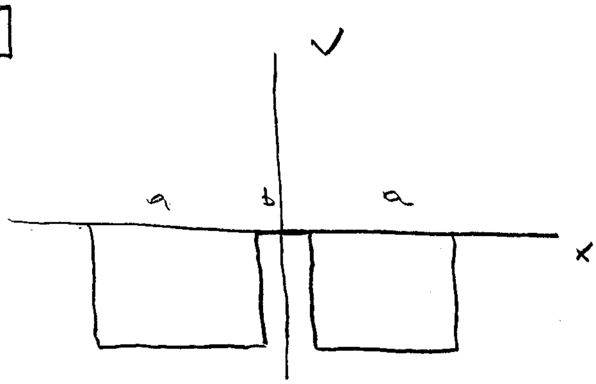
$\boxed{b = 0}$

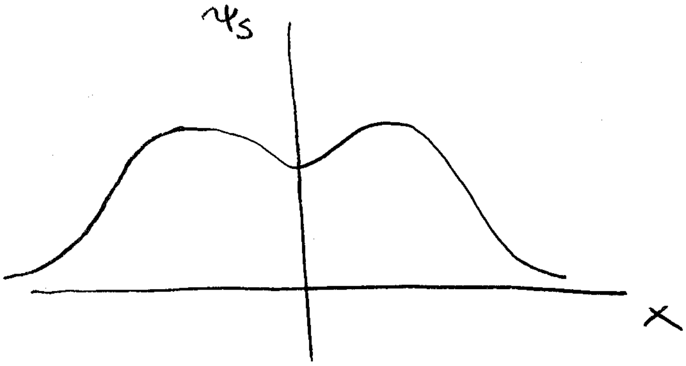


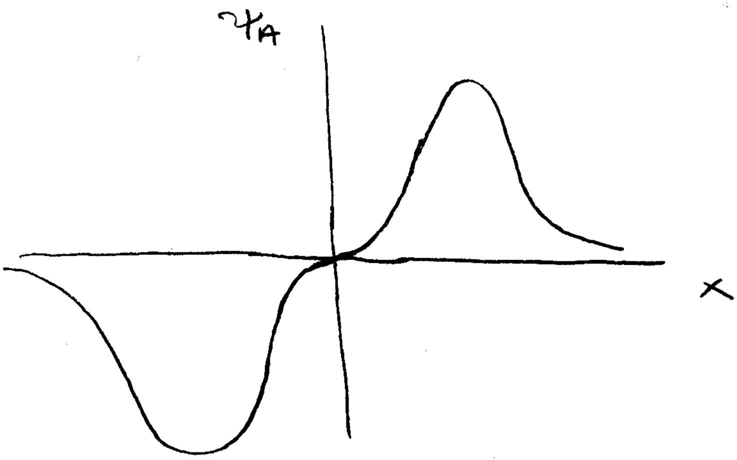




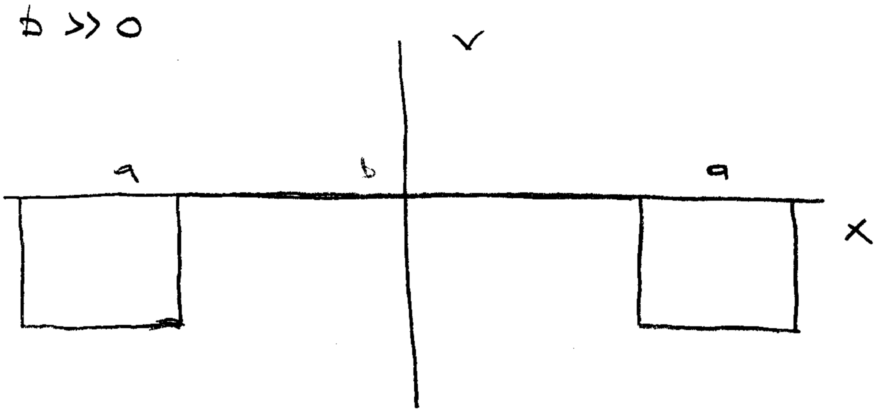
$\boxed{b \approx 0}$

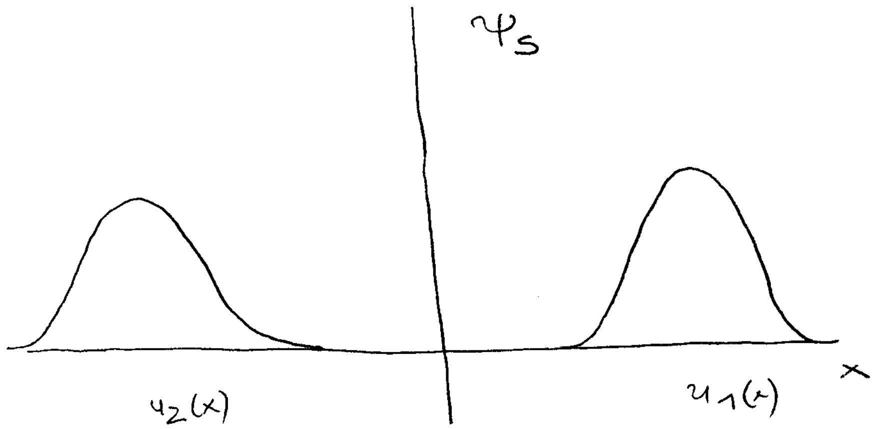


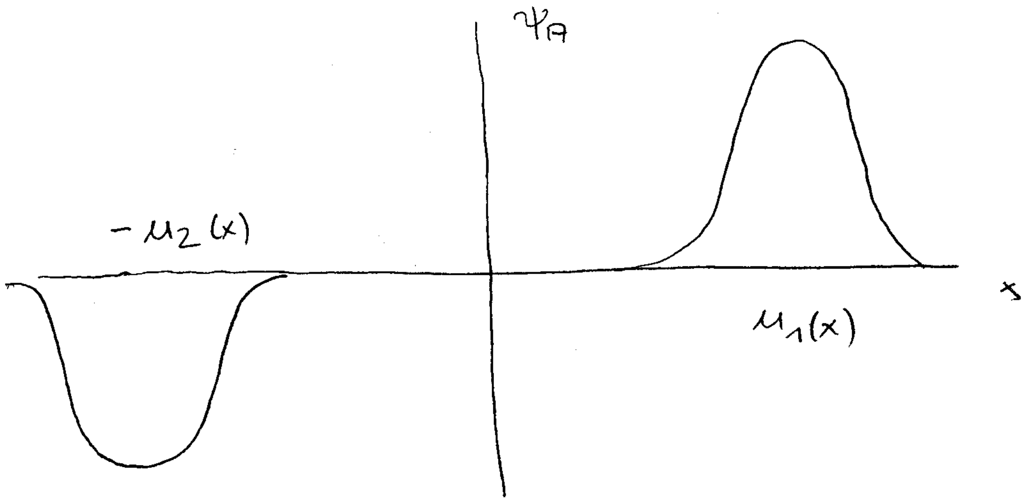




$b \gg 0$







U području barijere valne funkcije su skoro nula zbog velike širine barijere. Dobivamo dvije odvojene potencijalne jame. Stanja ψ_S i ψ_A su degenerirana: postaju simetrična i antisimetrične superpozicija osnovnih stanja za jame širine a

$$\psi_S = u_1 + u_2$$
$$\psi_A = u_1 - u_2$$

(b) $\underline{b \to \infty}$; $E_1(b) \simeq E_2(b) = E(b)$ iz razmatranja s grafova za $b \gg 0$

Energiju $E(b)$ odredit ćemo aproksimativno iz izraza za energiju osnovnog stanja za potencijalnu jamu širine a.

$$\frac{\sqrt{2m(V_0-|E|)}}{\hbar}\tan\left(\frac{\sqrt{2m(V_0-|E|)}}{\hbar}\cdot\frac{a}{2}\right)=\frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar}$$

S grafa 3.3 vidimo da je sjecište približno u točki $\frac{\pi}{2}$ $(V_0 \gg E)$

$$\frac{\sqrt{2m(V_0-|E|)}}{\hbar}\cdot\frac{a}{2}\simeq\frac{\pi}{2}$$

$$|E|\simeq V_0-\frac{\pi^2\cdot\hbar^2}{2a^2m}$$

Znak jednakosti u gornjoj formuli bi vrijedio za beskonačnu potencijalnu jamu širine a čije su energije

$$\frac{\pi^2\hbar^2}{2a^2m}n^2\ ;\ n=1,2,$$

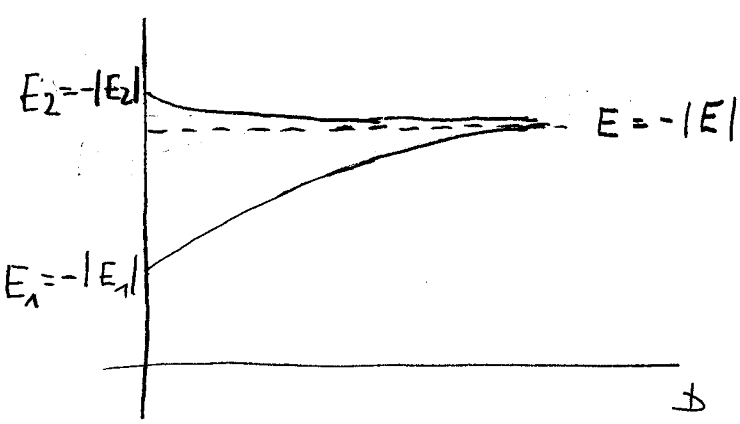
za $-V_0\to\infty$.

Slično, za $b=0$, približne energije osnovnog i prvog pobuđenog stanja za jamu širine $2a$

$$|E_1|\simeq V_0-\frac{\pi^2\hbar^2}{2\cdot(2a)^2m}=-\frac{\pi^2\hbar^2}{8a^2m}+V_0$$

$$|E_2|\simeq V_0-\frac{\pi^2\hbar^2}{2\cdot(2a)^2m}\cdot 2^2=-\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}+V_0$$

Graf za energije izgleda ovako:



(c) Elektron ima nižu energiju osnovnog stanja u potencijalnoj jami širine 2a, nego u jami širine a. Elektron, zato, nastoji približiti jezgre i tako smanjiti energiju cijelom sustavu.

$\boxed{3.6}$

(a) $V(x) = -\frac{\hbar^2 a^2}{m} \operatorname{sech}^2(ax)$; $\operatorname{sech} x = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$

Schrödingerova jednadžba

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{\hbar^2 a^2}{m}\operatorname{sech}^2(ax)\, u(x) = E\, u(x)$$

$$E = -|E|$$

Vezano stanje je: $u_0(x) = A \operatorname{sech}(ax)$

$$\frac{du_0}{dx} = -A\frac{1}{\operatorname{ch}^2(ax)}\operatorname{sh}(ax)\cdot a$$

$$\frac{d^2u_0}{dx^2} = -A\cdot a\left\{(-2)\operatorname{ch}^{-3}(ax)\cdot\operatorname{sh}^2(ax)\cdot a + \operatorname{ch}^{-2}(ax)\cdot\operatorname{ch}(ax)\cdot a\right\}$$

$$= \frac{Aa^2}{\operatorname{ch}^3(ax)}\left\{2\operatorname{sh}^2(ax) - \operatorname{ch}^2(ax)\right\}$$

$$\frac{\cancel{A}a^2}{\operatorname{ch}^3(ax)}\left\{2\operatorname{sh}^2(ax) - \operatorname{ch}^2(ax)\right\} + 2a^2\frac{1}{\operatorname{ch}^2(ax)}\cdot\cancel{A}\cdot\frac{1}{\operatorname{ch}(ax)}$$

$$= |E|\cdot\cancel{A}\cdot\frac{2m}{\hbar^2}\cdot\frac{1}{\operatorname{ch}(ax)} \quad /\cdot\operatorname{ch}(ax)$$

$$\frac{a^2}{\operatorname{ch}^2(ax)}\cdot\left\{\operatorname{ch}^2(ax) - 2 + 2\right\} = |E|\cdot\frac{2m}{\hbar^2}$$

$$\frac{\hbar^2 a^2}{2m} = |E|$$

Energija za stanje u_0 je

$$\underline{\underline{E = -\frac{\hbar^2 a^2}{2m}}}$$

Normalizacija

$$|A|^2\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{sech}^2(ax)\, dx = 1$$

$$\int \frac{1}{ch^2(ax)}\,dx = \int \frac{sh(ax)\,dx}{sh(ax)\cdot ch^2(ax)} = \left[ch(ax) = y\ ;\ sh(ax)\cdot a\,dx = dy \right]$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{dy}{y^2\sqrt{y^2-1}} = \frac{\sqrt{y^2-1}}{y}$$

Granice: $x \to -\infty\ ;\ ch(ax) \to \infty$

$x \to 0\ ;\ ch(ax) \to 1$

Očito;

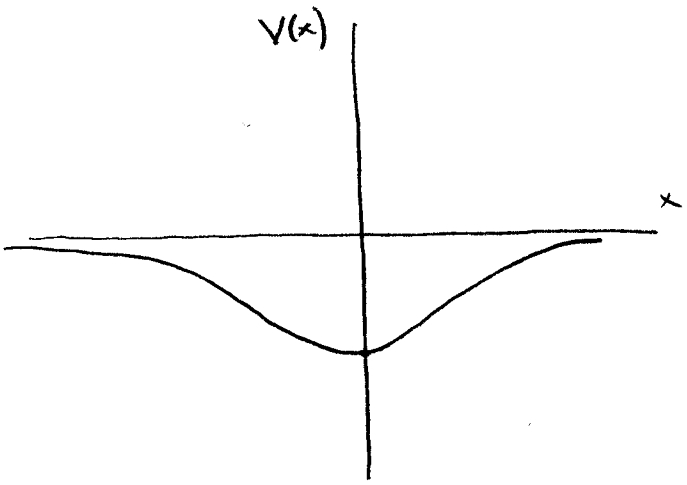
$$|A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{ch^2(ax)} = 2|A|^2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{ch^2(ax)} = 1$$

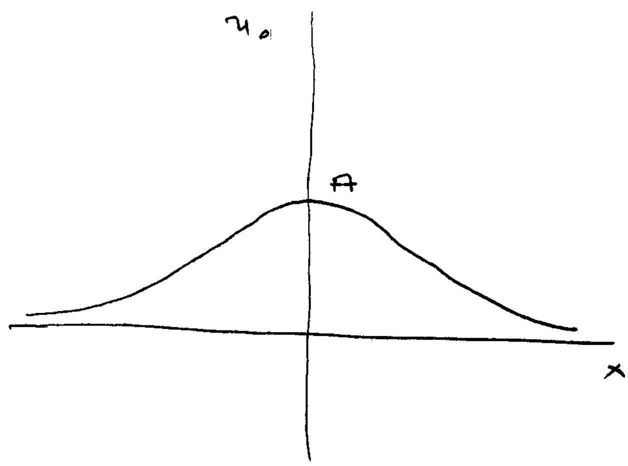
$$\frac{2|A|^2}{a}\cdot \int_1^{\infty} \frac{dy}{y^2\sqrt{y^2-1}} = \frac{2|A|^2}{a}\cdot \frac{\sqrt{y^2-1}}{y}\Bigg/_1^{\infty}$$

$$= \frac{2|A|^2}{a}$$

Konstanta normalizacije je

$$|A|^2 = \frac{a}{2}$$





(b)

$$u_k(x) = A\left(\frac{ik - a\tanh(ax)}{ik+a}\right) e^{ikx}$$

$$\frac{du_k}{dx} = \frac{A}{ik+a}\left\{(-a)\cdot\frac{1}{ch^2(ax)}\cdot a\, e^{ikx} + \left(ik - a\tanh(ax)\right)\cdot e^{ikx}\cdot ik\right\}$$

$$\frac{d^2u_k}{dx^2} = \frac{A}{ik+a}\cdot(-a^2)\cdot\left\{\frac{-2a}{ch^3(ax)}\cdot sh(ax)e^{ikx} + \frac{1}{ch^2(ax)}\cdot e^{ikx}\cdot ik\right\}$$

$$+\frac{ikA}{ik+a}\left\{(-a)\cdot\frac{a}{ch^2(ax)}\, e^{ikx} + \left(ik - a\tanh(ax)\right)e^{ikx}\cdot ik\right\}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{d^2u_k}{dx^2} - \frac{\hbar^2 a^2}{m}\,\mathrm{sech}^2(ax)\,u_k(x) = E\,u_k(x)$$

$$-\underline{\underline{\frac{2Aa^3}{ik+a}\cdot\frac{sh(ax)}{ch^3(ax)}}}\,e^{ikx} + \frac{2A\cdot ika^2}{ik+a}\,\frac{e^{ikx}}{ch^2(ax)}$$

$$+\frac{k^2\cdot A}{ik+a}\left(ik - a\tanh(ax)\right)e^{ikx} - \frac{2a^2A}{ik+a}\cdot\frac{1}{ch^2(ax)}\cdot e^{ikx}$$

$$\times\left(ik - a\tanh(ax)\right) =$$

$$= \frac{2mE}{\hbar^2}\cdot\frac{A}{ik+a}\left(ik - a\tanh(ax)\right)e^{ikx}$$

Ostaje

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad \text{za svaki } E.$$

Za $x \to \infty$

$$\tanh(ax) \to 1$$

$$u_k(x) \sim A \underbrace{\left(\frac{ik-a}{ik+a}\right)}_{= e^{i\alpha}} e^{ikx} \qquad \left|\frac{ik-a}{ik+a}\right| = 1$$

Prolaskom područje sa potencijalom valna funkcija dobije fazni pomak.

Koeficijent refleksije je: $R=0$

Koeficijent transmisije: $T=1$