KVANTNA MEHANIKA

Zadaci za vježbe 27. 3. 2025.

6 Harmonički oscilator

6.1 Ako je harmonički oscilator u osnovnom stanju, kolika je vjerojatnost da nađemo česticu izvan klasično dopuštenog područja?

6.2 Nađite dozvoljene energije polu-harmoničkog oscilatora

$$V(x)=\begin{cases}(1/2)m\omega^2x^2\ ;\ x>0\\ \infty\ ;\ x<0\end{cases}$$

Ovaj problem predstavlja, na primjer, elastičnu zavojnicu koja se može rastegnuti, ali ne može stisnuti.

6.3 (a) Pokažite da funkcija

$$\Psi(x,t)=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}\left(x^2+\frac{a^2}{2}\left(1+\mathrm{e}^{-2i\omega t}\right)+\frac{i\hbar t}{m}-2ax\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\right)\right]$$

zadovoljava ***vremenski-ovisnu*** Schrödingerovu jednadžbu za harmonički oscilator. Konstanta a je realna.
(b) Nađite $|\Psi(x,t)|^2$ i opišite gibanje valnog paketa.
(c) Izračunajte $\langle x\rangle$ i $\langle p\rangle$ te provjerite da je Ehrenfestov teorem zadovoljen.

6.4 (a) Pokažite da se vremenski neovisna Schrödingerova jednadžba pomoću operatora podizanja a_+ i spuštanja a_- može zapisati u obliku

$$\hbar\omega\left(a_-a_+-1/2\right)u(x)\ =Eu(x)$$

ili

$$\hbar\omega\left(a_+a_-+1/2\right)u(x)\ =Eu(x)$$

(b) Pokažite da vrijedi

$$\left[a_-,a_+\right]\ =1$$

(c) Dokažite sljedeću tvrdnju: ako valna funkcija u zadovoljava Schrödingerovu jednadžbu s energijom E, tada funkcija a_+u (odnosno a_-u) zadovoljava Schrödingerovu jednadžbu s energijom $E+\hbar\omega$ (odnosno $E-\hbar\omega$).

6.5 (a) Pokažite da su osnovno stanje i energija osnovnog stanja harmoničkog oscilatora jednaki

$$u_0(x)=A_0\,\mathrm{e}^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$$E_0=\frac{\hbar\omega}{2}$$

(b) Pokažite da su pobuđena stanja i energije pobuđenih stanja harmoničkog oscilatora jednake

$$u_n(x)=A_n(a_+)^n\,\mathrm{e}^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$$E_n=\left(n+1/2\right)\hbar\omega$$

6.6 Nađite valne funkcije i energije čestice u potencijalu

$$V(x)=\begin{cases}V_0\left(\dfrac{a}{x}-\dfrac{x}{a}\right)^2\ ;\ x>0\\ \infty\ ;\ x<0\end{cases}$$

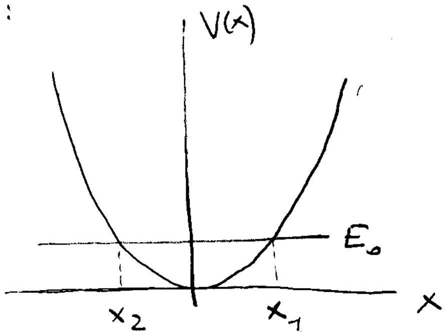
i pokažite da je spektar sličan onome za jednostavni harmonički oscilator. Kako izgleda graf za potencijalnu energiju? Nacrtajte graf $V/V_0=f(x/a)$.

$\boxed{6.1}$

Osnovno stanje

$$u_0(\xi) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

Klasično područje:



$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$$

U tim točkama je kinetička energija jednaka nuli.

$$V(x) = E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$$

$$\frac{m\omega^2 x^2}{2} = \frac{\hbar\omega}{2}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

Vjerojatnost:

$$W = 1 - \int_{-\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}}^{\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}} |u_0|^2 dx = 1 - \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \int_{-\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}}^{\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}} e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2} dx$$

$$\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x$$

$$d\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, dx$$

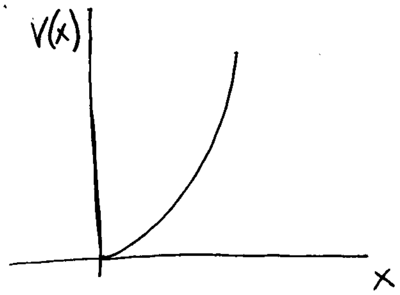
$$W = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-\xi^2} d\xi = 1 - \underbrace{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-\xi^2} d\xi}_{\text{Funkcija greške } Erf(1)}$$

U Bronsteinu: integral vjerojatnosti

$$Erf(1) = 0{,}842701$$

$$W = 0{,}157299$$

6.2



Upotrijebit ćemo već riješen problem za harmonički oscilator.

U području $x>0$ imamo isto rješenja kao i za harmonički oscilator. Od tog skupa rješenje odaberemo ona koje daju $u(0)=0$.

U području $x<0$ rješenje je $u=0$.

To su neparna rješenja:

$$u(x)+u(-x)=0$$

$x=0$

$$u(0)=0$$

Energije su oblika: $E_{2n+1}=\left[(2n+1)+\frac{1}{2}\right]\hbar\omega \quad ; \quad n=0,1,2,\dots$

$\boxed{6.3}$

(a)

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \left[\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}\right)\left(2x - 2a e^{-i\omega t}\right)\right]\psi$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \left(-\frac{m\omega}{\hbar}\right)\psi - \frac{m\omega}{\hbar}\left(x - a e^{-i\omega t}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$= \left(-\frac{m\omega}{\hbar}\right)\psi - \frac{m\omega}{\hbar}\left(x - a e^{-i\omega t}\right)\left(-\frac{m\omega}{\hbar}\right)\left(x - a e^{-i\omega t}\right)\psi$$

$$= \left[-\frac{m\omega}{\hbar} + \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^2\left(x - a e^{-i\omega t}\right)^2\right]\psi$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(-\frac{m\omega}{2\hbar}\right)\left[\frac{a^2}{2}\cdot(-2i\omega)\, e^{-2i\omega t} + \frac{i\hbar}{m} - 2ax e^{-i\omega t}\cdot(-i\omega)\right]\psi$$

Dosadíme do Schrödingerovy rovnice

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[-\frac{m\omega}{\hbar} + \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^2\left(x - a e^{-i\omega t}\right)^2\right]\psi$$

$$+ \frac{1}{2}m\omega^2\psi$$

$$= \left[\frac{\hbar\omega}{2} - \frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2 - 2ax e^{-i\omega t} + a^2 e^{-2i\omega t}\right) + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right]\psi$$

$$= \left[\frac{\hbar\omega}{2} + max\omega^2 e^{-i\omega t} - \frac{1}{2}m\omega^2 a^2 e^{-2i\omega t}\right]\psi$$

$$= i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

$$= \left[\frac{(i\hbar)^2}{m}\cdot\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}\right) + (i\hbar)(-i\omega)\cdot\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}\right)\left(-2ax e^{-i\omega t}\right)\right.$$

$$\left. + (i\hbar)\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}\right)\cdot\frac{a^2}{2}(-2i\omega)e^{-2i\omega t}\right]\psi$$

$$= \left[\frac{\hbar\omega}{2} + ma\omega^2 x e^{-i\omega t} - \frac{1}{2}m\omega^2 a^2 e^{-2i\omega t}\right)\psi \quad \text{ok!}$$

(b)

$$|\psi|^2 = \psi^* \psi$$

$$= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \cdot \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}\left(x^2 + \frac{a^2}{2}\left(1 + e^{+2i\omega t}\right) - \frac{i\hbar t}{m}\right.\right.$$

$$\left. - 2ax\, e^{i\omega t}\right) - \frac{m\omega}{2\hbar}\left(x^2 + \frac{a^2}{2}\left(1 + e^{-2i\omega t}\right) + \frac{i\hbar t}{m}\right.$$

$$\left.\left. - 2ax\, e^{-i\omega t}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{m\omega}{\hbar}x^2 - \frac{m\omega}{2\hbar}a^2 - \frac{m\omega}{2\hbar}\cos 2\omega t \cdot a^2\right.$$

$$\left. + \frac{m\omega}{2\hbar} \cdot (2ax) \cdot 2\cos\omega t\right]$$

$$\cos 2\omega t = 2\cos^2\omega t - 1$$

Eksponent postaje

$$-\frac{m\omega}{\hbar}x^2 - \cancel{\frac{m\omega}{2\hbar}a^2} + \cancel{\frac{m\omega}{2\hbar}a^2} - \frac{m\omega}{2\hbar} \cdot 2\cos^2\omega t$$

$$+ \frac{2m\omega a}{\hbar} x \cos\omega t = -\frac{m\omega}{\hbar}(x - a\cos\omega t)^2$$

Gustoća je

$$|\psi(x,t)|^2 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \cdot \exp\left[-\frac{m\omega}{\hbar}(x - a\cos\omega t)^2\right]$$

Ovaj valni paket je Gaussovog tipa. Oblik paketa se ne mijenja u vremenu. Središte paketa titra frekvencijom ω i amplitudom a što se vidi usporedbom $x - a\cos\omega t$ s $x - \langle x \rangle$.

(c) Usporedbom ili direktnim računom (ψ je normalizirana funkcija) dobivamo

$$\langle x \rangle = a \cos \omega t$$

Tada je

$$\langle p \rangle = m \frac{d}{dt} \langle x \rangle = -m a \sin \omega t \cdot \omega$$

Ehrenfestov teorem: $\frac{d}{dt}\langle p \rangle = -\left\langle \frac{dV}{dx} \right\rangle$

$$\frac{d}{dt}\langle p \rangle = -m a \omega^2 \cos \omega t$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2} m \omega^2 x^2\right) = m\omega^2 x$$

$$\left\langle \frac{dV}{dx} \right\rangle = m\omega^2 \langle x \rangle = m\omega^2 a \cos \omega t$$

Vidimo da je zadovoljen!

$\boxed{6.4}$

(a) $f(x)$ proizvoljna funkcija

$$a_- a_+ f(x) = \frac{1}{2m\hbar\omega}\left(\hbar\frac{d}{dx} + m\omega x\right)\left(-\hbar\frac{d}{dx} + m\omega x\right) f(x)$$

$$= \frac{1}{2m\hbar\omega}\left(\hbar\frac{d}{dx} + m\omega x\right)\left(-\hbar\frac{df}{dx} + m\omega x f\right)$$

$$= \frac{1}{2m\hbar\omega}\left(-\hbar^2\frac{d^2 f}{dx^2} + \hbar m\omega\frac{d}{dx}(xf) - \hbar m\omega x\frac{df}{dx} + (m\omega x)^2 f\right)$$

$$= \frac{1}{2m\hbar\omega}\left(\left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\right)^2 + (m\omega x)^2 + \hbar m\omega\right) f$$

Budući je f proizvoljna funkcija

$$a_- a_+ = \frac{1}{2m\hbar\omega}\left[\left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\right)^2 + (m\omega x)^2\right] + \frac{1}{2}$$

Slično,

$$a_+ a_- = \frac{1}{2m\hbar\omega}\left[\left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\right)^2 + (m\omega x)^2\right] - \frac{1}{2}$$

Schrödingerova jednadžba glasi

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\right)^2 + (m\omega x)^2\right] u(x) = E\,u(x)$$

Pomoću operatora podizanja i spuštanja

$$\hbar\omega\left(a_- a_+ - \frac{1}{2}\right) u(x) = E\,u(x)$$

$$\hbar\omega\left(a_+ a_- + \frac{1}{2}\right) u(x) = E\,u(x)$$

Vidimo da H ima dva oblika!

(b)

Oduzmemo Schrödingerove jednadžbe

$$\hbar\omega\left(a_- a_+ - \frac{1}{2}\right)u(x) = E u(x)$$
$$\hbar\omega\left(a_+ a_- + \frac{1}{2}\right)u(x) = E u(x)$$
$\ominus$

$$\hbar\omega\left(a_- a_+ - a_+ a_- - 1\right)u(x) = 0$$

$u(x) \neq 0$

$$a_- a_+ - a_+ a_- = 1$$

$$[a_-, a_+] = 1$$

(c) Neka u zadovoljava jednadžbu

$$\hbar\omega\left(a_- a_+ - \frac{1}{2}\right)u(x) = E u(x)$$

Gledamo što je $H(a_+ u)$

$$\underbrace{\hbar\omega\left(a_+ a_- + \frac{1}{2}\right)}_{H}(a_+ u) = \hbar\omega\left(a_+ a_- a_+ + \frac{1}{2} a_+\right)u$$

$$= \hbar\omega\, a_+\left(a_- a_+ + \underbrace{\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2}+1}\right)u = a_+\left[\left(a_- a_+ - \frac{1}{2}\right) + 1\right](\hbar\omega)\, u$$

$$= a_+\left[E u + \hbar\omega\, u\right] = (E + \hbar\omega)(a_+ u)$$

Dobili smo

$$H(a_+ u) = (E + \hbar\omega)\, a_+ u$$

Slično,

$$H(a_- u) = (E - \hbar\omega)\, a_- u$$

6.5

(a) Primijenimo operator spuštanja na bilo koju svojstvenu funkciju $u(x)$, uzastopno. Indeks n i odgovarajuća energija će se smanjivati diskretno; energije u obrocima $\hbar\omega$

Ne možemo ići u $-\infty$ jer energija osnovnog stanja mora biti veća od minimuma potencijalne energije; za harmonički oscilator to je 0. Dakle,

$$E_0 \geq 0$$

Za osnovno stanje u_0 mora vrijediti

$$a_- u_0 = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(\hbar \frac{du_0}{dx} + m\omega x u_0\right) = 0$$

Odavdje,

$$\frac{du_0}{dx} = -\frac{m\omega}{\hbar} x u_0$$

$$\frac{du_0}{u_0} = -\frac{m\omega}{\hbar} x\,dx \Big/ \int$$

$$\ln u_0 = -\frac{m\omega}{2\hbar} x^2 + C_0 \quad , \; C_0 \text{ konstanta}$$

$$u_0 = A_0 e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

Energija koja odgovara stanju u_0 (osnovnom stanju)

$$\hbar\omega\left(a_+ a_- + \frac{1}{2}\right) u_0 = H u_0 = E u_0$$

$$\hbar\omega\left(a_+ \underbrace{a_- u_0}_{=0} + \frac{1}{2} u_0\right) = \frac{\hbar\omega}{2} u_0 = E u_0 \Rightarrow E = \frac{\hbar\omega}{2}$$

(b) Prema prijašnjim razmatranjima vidjeli smo da stanje

$$a_+ u$$

Ima za $\hbar\omega$ veću energiju od u. Ako krenemo od osnovnog stanja

$$a_+ u_0 \ldots \quad \frac{\hbar\omega}{2} + \hbar\omega$$

$$(a_+)^2 u_0 \ldots \quad \frac{\hbar\omega}{2} + 2\hbar\omega$$

$$\vdots$$

$$(a_+)^n u_0 \ldots \quad \frac{\hbar\omega}{2} + n\hbar\omega$$

Pobuđena stanja su oblika

$$u_n = A_n (a_+)^n e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

$\boxed{6.6}$

Vremenski-neovisna Schrödingerova jednadžba glasi

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u}{dx^2} + V_0\left(\frac{a}{x} - \frac{x}{a}\right)^2 u = E u \quad , \quad E > 0$$

Nakon sređivanja

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left[\left(E + 2V_0\right) - \frac{V_0}{a^2}x^2 - \frac{V_0 a^2}{x^2}\right]u = 0$$

Asimptotsko ponašanje: $x \to \infty$

dominantni član je $\sim x^2$ u kvadratnoj zagradi

Imamo

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{2mV_0}{\hbar^2 a^2}x^2 u(x) = 0$$

Približno rješenje gornje jednadžbe potražit ćemo u obliku

$$u \simeq e^{-Ax^2}$$

$$\frac{du}{dx} = e^{-Ax^2}\cdot(-2Ax)$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = (-2A)\left\{e^{-Ax^2} + x e^{-Ax^2}\cdot(-2Ax)\right\}$$

$$= (-2A)e^{-Ax^2} + \underbrace{4A^2x^2e^{-Ax^2}}$$

ovaj član je dominantan za $x \to \infty$; prvi član možemo zanemariti

$$4A^2x^2e^{-Ax^2} - \frac{2mV_0}{\hbar^2a^2}x^2\cdot e^{-Ax^2} \simeq 0 \quad ; \quad \text{za } x \to \infty$$

Odavdje,

$$A = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2mV_0}}{a\hbar}$$

Za $x \to 0$ dominantni član je $\sim x^{-2}$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2} \cdot \frac{1}{x^2} u$$

Pokušajmo rješenje : $u \propto x^{\ell}$

$$\ell(\ell-1)\, x^{\ell-2} - \frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2} \cdot x^{\ell-2} = 0$$

Imamo
$$\ell^2 - \ell - \frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2} = 0$$

čije je rješenje
$$\ell = \frac{1 \pm \sqrt{1 + \frac{8mV_0 a^2}{\hbar^2}}}{2}$$

Rješenje s $\ominus$ daje $\ell < 0$ te dobijemo divergentno rješenje za u kad $x \to 0$. Uzet ćemo $\oplus$.

$$\ell = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{8mV_0 a^2}{\hbar^2}}\right)$$

Uzmimo novu varijablu
$$\eta = \frac{\sqrt{2mV_0}}{a\hbar} x^2$$

Napisat ćemo Schrödingerovu jednadžbu u novoj koordinati

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{d\eta} \cdot \frac{d\eta}{dx} = \frac{du}{d\eta} \cdot \frac{\sqrt{2mV_0}}{a\hbar} \cdot 2x$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2mV_0}}{a\hbar} \cdot \left[\frac{d^2 u}{d\eta^2} \cdot \frac{d\eta}{dx} \cdot x + \frac{du}{d\eta} \right]$$

$$= 2 \frac{\sqrt{2mV_0}}{a\hbar} \left[u'' \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{2mV_0}}{a\hbar} \cdot 2x^2}_{2\eta} + u' \right]$$

$$= 4 \frac{\sqrt{2mV_0}}{a\hbar} u'' \eta + 2 \frac{\sqrt{2mV_0}}{a\hbar} u'$$

Uvrstimo u Schrödingerovu jednadžbu

$$4\,\frac{\sqrt{2mV_0}}{a\hbar}\,u''\eta + 2\,\frac{\sqrt{2mV_0}}{a\hbar}\,u' + \frac{2m}{\hbar^2}\Big[(E+2V_0)$$

$$-\frac{2V_0}{a^2}\,\frac{a\hbar}{\sqrt{2mV_0}}\,\eta - V_0 a^2\,\frac{\sqrt{2mV_0}}{a\hbar}\cdot\frac{1}{\eta}\Big]u(\eta) = 0$$

Podijelimo cijelu jednadžbu

$$4\,\frac{\sqrt{2mV_0}}{a\hbar}$$

$$\eta u'' + \frac{1}{2}u' + \frac{2m}{\hbar^2}(E+2V_0)\cdot\frac{a\hbar}{4\sqrt{2mV_0}}\,u(\eta)$$

$$-\frac{4mV_0}{a\hbar^2}\cdot\frac{\hbar}{\sqrt{2mV_0}}\cdot\frac{a\hbar\cdot\eta}{4\sqrt{2mV_0}}\,u(\eta)$$

$$-\frac{2mV_0a^2}{\hbar^2}\cdot\frac{\sqrt{2mV_0}}{a\hbar}\cdot\frac{a\hbar}{4\sqrt{2mV_0}}\cdot\frac{1}{\eta}\,u(\eta) = 0$$

$$\eta u'' + \frac{1}{2}u' + \left[\frac{ma(E+2V_0)}{2\hbar\sqrt{2mV_0}} - \frac{\eta}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{mV_0a^2}{\hbar^2}\cdot\frac{1}{\eta}\right]u(\eta)$$

Rješenje ove jednadžbe tražit ćemo u obliku

$$u(\eta) = e^{-\eta/2}\,\eta^{\ell/2}\,v(\eta)$$

u skladu s asimptotskim ponašanjem i ponašanjem oko nule. Uvrštavanjem dobije se jednadžba [Mathematica]

$$\eta v'' + \left(\ell + \frac{1}{2} - \eta\right)v' - \underbrace{\left[\frac{\ell}{2} + \frac{1}{4} - \frac{ma(E+2V_0)}{2\hbar\sqrt{2mV_0}}\right]}_{\alpha}v = 0 \qquad (*)$$

Ova se jednadžba može rješavati pomoću redova ili prepoznavanjem.

Prepoznamo li da se radi o konfluentnoj hipergeometrijskoj jednadžbi rješenje je oblika

$$v(\eta) = c_1 F\left(\alpha, l + \frac{1}{2}, \eta\right) + c_2 F\left(\alpha - l + \frac{1}{2}, \frac{3}{2} - l, \eta\right) \cdot \eta^{1/2 - l}$$

Valna funkcija mora biti konačna u $\eta \to 0$. No,

$$F\left(\alpha - l + \frac{1}{2}, \frac{3}{2} - l, \eta\right) \eta^{1/2 - l} \sim \eta^{1/2 - l}$$

a cijela funkcija ponaša se kao

$$F\left(\alpha - l + \frac{1}{2}, \frac{3}{2} - l, \eta\right) \eta^{1/2 - l} \cdot e^{-\eta/2} \cdot \eta^{l/2} \sim \eta^{-l/2 + 1/2}$$

pa stavljamo $c_2 = 0$. Također, konačno rješenje za $\eta \to \infty$ dobijemo za

$$\alpha = -n$$

tj. konfluentna hipergeometrijska funkcija $F\left(\alpha, l + \frac{1}{2}, \eta\right)$ mora se ponašati kao polinom jer bismo u suprotnom dobili divergentno rješenje. Odavde

$$E = \frac{2\hbar}{a}\sqrt{\frac{2V_0}{m}}\left[n + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{8mV_0a^2}{\hbar^2} + 1} - \sqrt{\frac{8mV_0a^2}{\hbar^2}}\right)\right]$$

Ovo je, do na konstantu, identično energiji harmoničkog oscilatora frekvencije $\omega = \sqrt{8V_0/ma^2}$.

Rješenje pomoću razmatranja redova: vratimo se na jednadžbu (*) i uvrstimo red

$$v(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \eta^n$$

Dobyemo

$$\sum_{\substack{n=0 \\ \text{ili} \\ n=2}}^{\infty} a_n n(n-1)\,\eta^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\ell+\frac{1}{2}-\eta\right) a_n n\,\eta^{n-1}$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty} \alpha\, a_n \eta^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[n(n-1)+\left(\ell+\tfrac{1}{2}\right)n\right] a_n \eta^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha)\, a_n \eta^n = 0$$

$\downarrow$

$n-1 \rightarrow m$

n ide od 1

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[(m+1)m+\left(\ell+\tfrac{1}{2}\right)(m+1)\right] a_{m+1}\eta^m - \sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha)a_n\eta^n = 0$$

$m \rightarrow n$

Faktori uz η^n moraju biti nula

$$(n+1)n+\left(\ell+\frac{1}{2}\right)(n+1)\, a_{n+1} = (n+\alpha)\, a_n$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+\alpha}{(n+1)\left(n+\ell+\frac{1}{2}\right)}$$

Kako se ponaša funkcija ϑ za veliki η? Ponašanje će odrediti članovi s velikim n, odnosno, $n \gg 1$.

Tada je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n\gg 1]{} \frac{n}{n^2} \sim \frac{1}{n}$$

Pogledajmo funkciju e^{η}; to je red

$$e^{\eta} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\eta^n}{n!} \;; \quad a_n = \frac{1}{n!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n\gg 1]{} \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$$

Za velike η, funkcija $v(\eta)$ ponaša se kao e^{η}, a ukupna valna funkcija

$$u(\eta) \sim e^{-\eta/2} \cdot e^{\eta} \cdot \eta^{c/2} \sim e^{\eta/2} \underset{\eta\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

No, valna funkcija mora biti nula za $\eta \to \infty$!

Ako je za $n = n_0$

$$n_0 = -\alpha$$

tada su

$$a_{n_0+1},\ a_{n_0+2}, \dots$$

jednaki nuli, a funkcija $v_{n_0}(\eta)$ je polinom. Tada je

$$u(\eta) \sim e^{-\eta/2} \quad \text{za } \eta \to \infty$$

i $u \to 0$.

Potencijalna energija izgleda ovako