KVANTNA MEHANIKA

Zadaci za vježbe 5. 5. 2025.

12 Zbrajanje angularnih momenata

12.1 Promotrite sustav koji se sastoji od dvije neinteragirajuće čestice spinova 1/2. Mjerenje je pokazalo sljedeće rezultate:

$$s_{1z} = \frac{1}{2};\ s_{2x} = \frac{1}{2}$$

Ovdje su $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$ operatori spina čestice 1, 2, a S_{1z} , S_{2x} operatori projekcije spina na os z za prvu česticu i os x za drugu česticu. Njihove svojstvene vrijednosti su s_{1z} , s_{2x} . Kolika je vjerojatnost da za ukupni spin sustava izmjerimo vrijednost $s = 1$?

12.2 Promotrite dvije čestice sa spinovima $s_1 = 1$ i $s_2 = 1/2$. Poslužite se tablicama za Clebsch-Gordanove koeficijente i izračunajte:
(a) Vjerojatnost da izmjerimo $m_2 = -1/2$ ako je sustav u stanju $|\, s = 3/2, m = -1/2\rangle$.
(b) Vjerojatnost da izmjerimo $s = 1/2$ ako je sustav u stanju $|\, m_1 = -1, m_2 = +1/2\rangle$.
(c) Vjerojatnost da izmjerimo $m = -1/2$ ako je sustav u stanju $|\, m_1 = -1, m_2 = +1/2\rangle$.

12.3 Kvarkovi imaju spin 1/2. Tri kvarka vezana u jednu česticu čine barion (na primjer; proton, neutron), dva kvarka vezana u jednu česticu čine mezon (na primjer; pion, kaon). Pretpostavite da su kvarkovi u osnovnom stanju (pa je orbitalni angulrani moment jednak nuli).
(a) Koje vrijednosti spina mogu imati barioni?
(b) Koje vrijednosti spina mogu imati mezoni?

12.4 (a) Čestica spina 1 i čestica spina 2 miruju u konfiguraciji s totalnim spinom 3 i njegovom z-projekcijom 1 (drugim riječima, svojstvena vrijednost od S_z je $\hbar$). Ako ste mjerili z-komponentu angularnog momenta čestice sa spinom 2, koje vrijednosti ste mogli dobiti i s kojim vjerojatnostima?
(b) Elektron u vodikovom atomu je u stanju $|5, 1, 0, -1/2\rangle$. Kad biste mogli mjeriti kvadrat ukupnog angularnog momenta samog elektrona (bez spina protona), koje vrijednosti biste mogli dobiti i koje su vjerojatnosti za dobivanje svake od vrijednosti?

12.5 Pokažite da za Clebsch-Gordanove koeficijente vrijede sljedeće relacije:

$$\sum_{\substack{m_1 \\ m_1+m_2=m}} \sum_{m_2} C^{j_1 j_2 j}_{m_1 m_2 m} C^{j_1 j_2 j}_{m_1' m_2' m} = \delta_{jj'} \delta_{mm'}$$

$$\sum_{j} C^{j_1 j_2 j}_{m_1 m_2 m} C^{j_1 j_2 j'}_{m_1 m_2 m'} = \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'}$$

12.6 Provjerite sljedeće komutacijske relacije:
(a) $[\mathbf{J}^2, \mathbf{J}_\alpha^2] = 0$, $\alpha = 1, 2$
(b) $[J_i, J_j] = i\hbar \sum_k \varepsilon_{ijk} J_k$

gdje je $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$, a $J_i = J_{1i} + J_{2i}$.

46. Clebsch-Gordan Coefficients, Spherical Harmonics, and d Functions

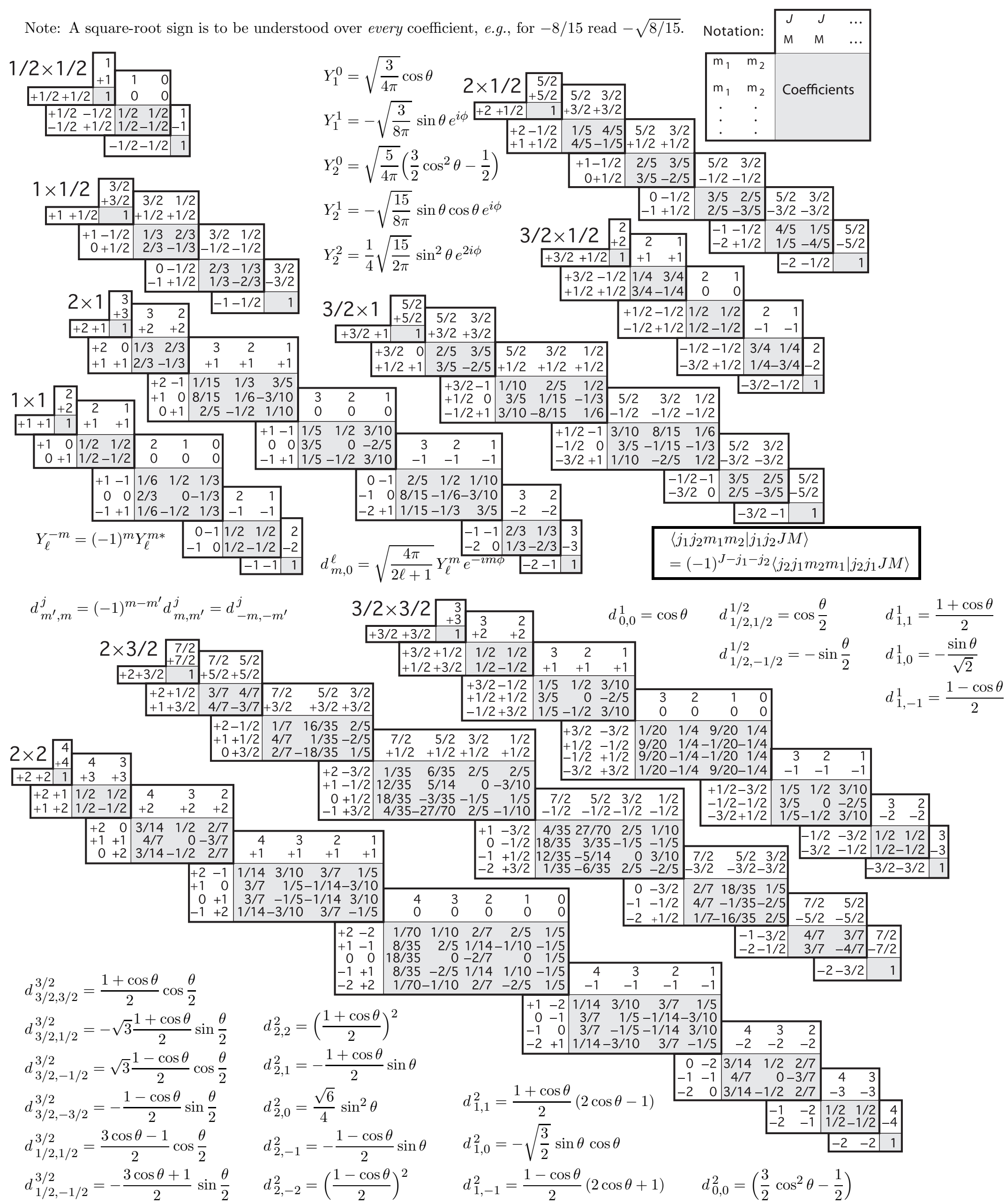

Figure 46.1: The sign convention is that of Wigner (*Group Theory*, Academic Press, New York, 1959), also used by Condon and Shortley (*The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge Univ. Press, New York, 1953), Rose (*Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York, 1957), and Cohen (*Tables of the Clebsch-Gordan Coefficients*, North American Rockwell Science Center, Thousand Oaks, Calif., 1974).

$\boxed{12.1}$ Iz zadatka 12.1(b) imamo

$$|S_x;\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$$

gdje smo sa $|\pm\rangle$ označili kraće vektor

$$|S_z;\pm\rangle$$

Početno je sistem opisan kvantnim brojevima $s_{1z}=\frac{1}{2}$, $s_{2x}=\frac{1}{2}$, odnosno u stanju

$$|+\rangle|S_x;+\rangle = |+\rangle\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle|-\rangle$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}|++\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|+-\rangle$$

U Primjeru u Pregledu formula ili u tablici za C-G koeficijente

1. $|1,1\rangle = |++\rangle$
2. $|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+-\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-+\rangle$
3. $|1,-1\rangle = |--\rangle$
4. $|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+-\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|-+\rangle$

Iz 2. i 4. slijedi

$$|+-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|0,0\rangle$$

Imamo

$$|+\rangle|S_x;+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1,1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|1,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|0,0\rangle\right)$$
$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}|1,1\rangle + \underbrace{\frac{1}{2}}|1,0\rangle + \frac{1}{2}|0,0\rangle$$

Ako mjerimo da je ukupni spin $s=1$, tada je sistem prešao u stanje

$$|1,1\rangle \text{ ili } |1,0\rangle$$

Vjerojatnost za takvo mjerenje je

$$P = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 + \left|\frac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$$

$\boxed{12.2}$ (a) U tabeli tražimo

$$1 \times 1/2$$

$$|s=\tfrac{3}{2}, m=-\tfrac{1}{2}\rangle = \underbrace{\sqrt{\tfrac{2}{3}}}\,|m_1=0, m_2=-\tfrac{1}{2}\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|m_1=-1, m_2=\tfrac{1}{2}\rangle$$

Vjerojatnost da izmjerimo $m_2=-\frac{1}{2}$ jednaka je

$$P = \left|\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right|^2 = \tfrac{2}{3}$$

(b)

$$|m_1=-1, m_2=\tfrac{1}{2}\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|s=\tfrac{3}{2}, m=-\tfrac{1}{2}\rangle \underbrace{-\sqrt{\tfrac{2}{3}}}\,|s=\tfrac{1}{2}, m_s=-\tfrac{1}{2}\rangle$$

Vjerojatnost da izmjerimo $s=\frac{1}{2}$ jednaka je

$$P = \left|-\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right|^2 = \tfrac{2}{3}$$

(c) Vjerojatnost je

$$P = \left|\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right|^2 + \left|-\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right|^2 = 1$$

$\boxed{12.3}$

Kvarki: $s = \frac{1}{2}$

(a) barioni – sastoje se od tri kvarka sa spinovima s_1, s_2, s_3

Pogledajmo prvo za dva kvarka: $s_{12} = |s_1 - s_2|, \ldots, s_1 + s_2$
$= 0, 1$

Ukupno: $s_{uk} = |s_{12} - s_3|, \ldots, s_{12} + s_3$

$s_{12} = 0$; $s_{uk} = \frac{1}{2}$

$s_{12} = 1$; $s_{uk} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$

(b) mezoni – sastoje se od dva kvarka sa spinovima s_1, s_2

Za njih $s_{uk} = 0, 1$

$\boxed{12.4}$

(a) $s_1 = 2$

$s_2 = 1$

Stanje: $|s = 3, m = 1\rangle$

Iz tablica: 2×1

$$|s=3, m=1\rangle = \sqrt{\frac{1}{15}}\,|m_1=2, m_2=-1\rangle + \sqrt{\frac{8}{15}}\,|m_1=1, m_2=0\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}}\,|m_1=0, m_2=1\rangle$$

Očito, mogli smo dobiti vrijednosti $m_1 = 0, 1, 2$; dakle, $0, \hbar, 2\hbar$.

Vjerojatnosti: $0 \ldots \; w_{m=0} = \left|\sqrt{\frac{2}{5}}\right|^2 = \frac{2}{5}$

$\hbar \ldots \; w_{m=1} = \left|\sqrt{\frac{8}{15}}\right|^2 = \frac{8}{15}$

$2\hbar \ldots \; w_{m=2} = \left|\sqrt{\frac{1}{15}}\right|^2 = \frac{1}{15}$

(b)

Elektron u vodikovom atomu

$|5, 1, 0, -1/2\rangle$

$n = 5$

$l = 1$

$m_l = 0$

$m_s = -\frac{1}{2}$ $\left(s = \frac{1}{2}\right)$

Iz tablica je: $1 \times \frac{1}{2}$

Gledamo stanje: $|m_1 = 0, m_2 = -\frac{1}{2}\rangle$

$$|m_1=0, m_2=-\tfrac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\,|j=3/2, m=-\tfrac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\,|j=1/2, m=-1/2\rangle$$

Kvadrat ukupnog angularnog momenta ima vrijednosti: $j(j+1)\hbar^2$

$j = \frac{3}{2} \ldots \quad \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)\hbar^2 = \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\hbar^2 = \frac{15}{4}\hbar^2; \quad P_{j=3/2} = \frac{2}{3}$

$j = \frac{1}{2} \ldots \quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\hbar^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\hbar^2 = \frac{3}{4}\hbar^2; \quad P_{j=1/2} = \frac{1}{3}$

$\boxed{12.5}$

Znamo da vrijedi relacija

$$|j_1 j_2 ; j m\rangle = \sum_{m_1} \sum_{\substack{m_2 \\ m_1+m_2=m}} C^{j_1 j_2 j}_{m_1 m_2 m} \, |j_1 j_2 ; m_1 m_2\rangle \quad / \langle j_1 j_2 ; j' m'|$$

$$\underbrace{\langle j_1 j_2 ; j' m' | j_1 j_2 ; j m\rangle}_{\delta_{jj'}\delta_{mm'}} = \sum_{m_1} \sum_{\substack{m_2 \\ m_1+m_2=m}} C^{j_1 j_2 j}_{m_1 m_2 m} \langle j_1 j_2 ; \underbrace{j' m' | j_1 j_2 ; m_1 m_2}_{C^{j_1 j_2 j'}_{m_1 m_2 m'}}\rangle$$

$$\delta_{jj'}\delta_{mm'} = \sum_{m_1} \sum_{\substack{m_2 \\ m_1+m_2=m}} C^{j_1 j_2 j}_{m_1 m_2 m} \, C^{j_1 j_2 j'}_{m_1 m_2 m'}$$

Slično,

$$|j_1 j_2 ; m_1 m_2\rangle = \sum_{j} C^{j_1 j_2 j}_{m_1 m_2 m} \, |j_1 j_2 ; j m\rangle \quad / \langle j_1 j_2 ; m_1' m_2'|$$

$$\langle j_1 j_2 ; \underbrace{m_1' m_2' | j_1 j_2}_{\delta_{m_1 m_1'}\delta_{m_2 m_2'}} ; m_1 m_2\rangle = \sum_{j} C^{j_1 j_2 j}_{m_1 m_2 m} \langle j_1 j_2 ; \underbrace{j m | j_1 j_2 ; m_1' m_2'}_{C^{j_1 j_2 j}_{m_1' m_2' m}}\rangle$$

$$\delta_{m_1 m_1'}\delta_{m_2 m_2'} = \sum_{j} C^{j_1 j_2 j}_{m_1 m_2 m} \, C^{j_1 j_2 j}_{m_1' m_2' m}$$

$\boxed{12.6}$

(a) $\alpha = 1$

$$J^2 = (\vec{J}_1 + \vec{J}_2)^2 = \vec{J}_1^{\,2} + \vec{J}_2^{\,2} + 2\vec{J}_1 \cdot \vec{J}_2$$

$$[\vec{J}_1^{\,2} + \vec{J}_2^{\,2} + 2\vec{J}_1 \vec{J}_2, \vec{J}_1^{\,2}] = [\vec{J}_1^{\,2}, \vec{J}_1^{\,2}] + [\vec{J}_2^{\,2}, \vec{J}_1^{\,2}] +$$
$$+ 2[\vec{J}_1 \cdot \vec{J}_2, \vec{J}_1^{\,2}]$$

$$[\vec{J}_1^{\,2}, \vec{J}_1^{\,2}] = 0$$

$$[\vec{J}_2^{\,2}, \vec{J}_1^{\,2}] = 0$$

$$[J_{1x} J_{2x} + J_{1y} J_{2y} + J_{1z} J_{2z}, \vec{J}_1^{\,2}] =$$

$$= [J_{1x}, \vec{J}_1^{\,2}] J_{2x} + J_{1x} \underbrace{[J_{2x}, \vec{J}_1^{\,2}]}_{=0} +$$
$$+ [J_{1y}, \vec{J}_1^{\,2}] J_{2y} + J_{1y} \underbrace{[J_{2y}, \vec{J}_1^{\,2}]}_{=0} +$$
$$[J_{1z}, \vec{J}_1^{\,2}] J_{2z} + J_{1z} \underbrace{[J_{2z}, \vec{J}_1^{\,2}]}_{=0}$$

Iz zadatka 12.4 (a)

$$[J_{1x}, \vec{J}_1^{\,2}] = [J_{1y}, \vec{J}_1^{\,2}] = [J_{1z}, \vec{J}_1^{\,2}] = 0$$

$$\Rightarrow \quad [\vec{J}^{\,2}, \vec{J}_1^{\,2}] = 0$$

Slično,

$$[\vec{J}^{\,2}, \vec{J}_2^{\,2}] = 0$$

(b) $$[J_i, J_j] = [J_{1i} + J_{2i}, J_{1j} + J_{2j}] =$$
$$= [J_{1i}, J_{1j}] + [J_{1i}, J_{2j}] + [J_{2i}, J_{1j}]$$
$$+ [J_{2i}, J_{2j}]$$

$$[J_{1i}, J_{1j}] = i\hbar \sum_k \varepsilon_{ijk} J_{1k}$$

$$[J_{1i}, J_{2j}] = 0$$

$$[J_{2i}, J_{1j}] = 0$$

$$[J_{2i}, J_{2j}] = i\hbar \sum_k \varepsilon_{ijk} J_{2k}$$

Imamo

$$[J_i, J_j] = i\hbar \sum_k \varepsilon_{ijk} (J_{1k} + J_{2k}) = i\hbar \sum_k \varepsilon_{ijk} J_k$$