KVANTNA MEHANIKA

Zadaci za vježbe 10. 5. 2024.

16 Identične čestice

16.1 Pretpostavimo da promatramo tri čestice u stanjima $\psi_a(x)$, $\psi_b(x)$ i $\psi_c(x)$ (u svakom stanju točno jedna čestica). Ako su ova stanja ortonormirana, napišite valnu funkciju za sustav ovih čestica:
(a) ako čestice možemo razlikovati;
(b) ako su čestice identični bozoni;
(c) ako su čestice identični fermioni.

16.2 Zamislite dvije neinteragirajuće čestice, svaka mase m, u potencijalu 1D harmoničkog oscilatora. Ako je jedna čestica u osnovnom stanju, a druga u prvom pobuđenom stanju, izračunajte $\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle$ pretpostavljajući:
(a) da čestice možemo razlikovati;
(b) da su čestice identični bozoni;
(c) da su čestice identični fermioni.

16.3 Dvije čestice spina 1 koje nisu identične i kojima je orbitalni angularni moment nula (nalaze se u s-stanju) mogu imati ukupni angularni moment jednak 0, 1 ili 2. Pretpostavimo da su čestice identične. Koliki je ukupni angularni moment ovog sustava?

16.4 Promotrimo tri identične neinteragirajuće čestice spina 1.
(a) Pretpostavimo da je prostorni dio vektora stanja simetričan na zamjenu stanja bilo koje dvije čestice. Koristite zapis spinskog stanja u obliku $|1\rangle|0\rangle|1\rangle$ za česticu 1 s projekcijom spina $m_s = 1$, česticu 2 s $m_s = 0$ i česticu 3 s $m_s = 1$, itd. te napišite normalizirano spinsko stanje sustava u sljedećim slučajevima:
 (i) sve tri čestice su u stanju $|1\rangle$;
 (ii) dvije čestice su u stanju $|1\rangle$, a jedna u stanju $|0\rangle$;
 (iii) sve tri čestice su u različitim stanjima;
(b) Pokušajte ponoviti račun pod (a), ali sada ako je prostorni dio vektora stanja antisimetričan.

16.5 Promotrimo sustav od N neinteragirajućih čestica spina 1/2. Čestice se nalaze u potencijalu harmoničkog oscilatora kružne frekvencije ω.
(a) Kolika je energija osnovnog stanja? Kolika je Fermijeva energija?
(b) Pretpostavimo da je N jako velik. Kolike su energija osnovnog stanja i Fermijeva energija?

16.6 ***Hundova pravila*** služe za izračun ukupnog angularnog momenta u atomima. Kvantni brojevi S i L odnose se ukupni spin i ukupni orbitalni angularni moment sustava elektrona, respektivno. Kvantni broj J označava njihov zbroj, ukupni angularni moment.
(a) *Prvo Hundovo pravilo* glasi: u skladu s Paulijevim principom, stanje s najvećim ukupnim spinom S ima najnižu energiju. Što ovo pravilo predviđa za pobuđena stanja helijevog atoma?
(b) *Drugo Hundovo pravilo* glasi: za dani spin sustava, stanje s najvećim ukupnim angularnim momentom L, u suglasju s antisimetrizacijom, ima najnižu energiju. Zašto ugljik nema $L = 2$?
(c) *Treće Hundovo pravilo* glasi: ako je podljuska (n, l) popunjena najviše do polovine, tada najniža energijska razina ima $J = |L - S|$. Ako je podljuska popunjena više od polovine, tada najniža energijska razina ima $J = L + S$. Primijenite ovo pravilo na atom bora.
(d) Upotrijebite Hundova pravila i činjenicu da se kod elektronskih sustava simetrično spinsko stanje javlja uz antisimetričnu prostornu valnu funkciju (i obrnuto), te izračunajte ukupni angularni moment u ugljikovom i dušikovom atomu.

16.1

(a) čestice koje možemo razlikovati – klasične čestice

$$u(x_1,x_2,x_3) = \psi_a(x_1)\psi_b(x_2)\psi_c(x_3)$$

ψ_a, ψ_b, ψ_c su ortonormirana stanja pa vrijedi

$$\int u^*(x_1,x_2,x_3)\, u(x_1,x_2,x_3)\, dx_1 dx_2 dx_3 = 1$$

(b) bozoni imaju simetričnu valnu funkciju

$$u(x_1,x_2,x_3) = A\big[\psi_a(x_1)\psi_b(x_2)\psi_c(x_3) + \psi_a(x_2)\psi_b(x_1)\psi_c(x_3) + \psi_a(x_3)\psi_b(x_2)\psi_c(x_1) + \psi_a(x_1)\psi_b(x_3)\psi_c(x_2) + \psi_a(x_2)\psi_b(x_3)\psi_c(x_1) + \psi_a(x_3)\psi_b(x_1)\psi_c(x_2)\big]$$

Konstanta A je konstanta normalizacije

$$A = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Valnu funkciju u možemo zapisati i pomoću permanente

$$u(x_1,x_2,x_3) = A\begin{vmatrix} \psi_a(x_1) & \psi_b(x_1) & \psi_c(x_1) \\ \psi_a(x_2) & \psi_b(x_2) & \psi_c(x_2) \\ \psi_a(x_3) & \psi_b(x_3) & \psi_c(x_3) \end{vmatrix}_+$$

Je li $u(x_1,x_2,x_3)$ simetrična funkcija?

(c) fermioni imaju antisimetričnu valnu funkciju

$$u(x_1,x_2,x_3) = B \begin{vmatrix} \psi_a(x_1) & \psi_b(x_1) & \psi_c(x_1) \\ \psi_a(x_2) & \psi_b(x_2) & \psi_c(x_2) \\ \psi_a(x_3) & \psi_b(x_3) & \psi_c(x_3) \end{vmatrix}$$

Zamijenimo li dvama česticama kvantna stanja, zamijene se retci u determinanti. No, zamjena redaka dovodi do zamjene predznaka determinante, pa je uvjet antisimetrije zadovoljen.

$\boxed{16.2}$

Označimo osnovno stanje s u_0, a prvo pobuđeno s u_1.

Valne funkcije koje odgovaraju tim stanjima su:

$$u_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$$u_1(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\, x\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$$\langle (x_1-x_2)^2\rangle = \int \psi^* (x_1-x_2)^2 \psi \, dx_1 dx_2$$

$$= \int x_1^2 |\psi|^2 dx_1 dx_2 - 2\int x_1 x_2 |\psi|^2 dx_1 dx_2$$

$$+ \int x_2^2 |\psi|^2 dx_1 dx_2$$

(a) čestice koje možemo razlikovati

$$\psi(x_1, x_2) = u_0(x_1)\, u_1(x_2)$$

$$\int x_1^2 |\psi|^2 dx_1 dx_2 = \int x_1^2 u_0^2(x_1)\, dx_1 = \langle x_1^2\rangle_0$$

$$\int x_1 x_2 |\psi|^2 dx_1 dx_2 = \int x_1 u_0^2 dx_1 \int x_2 u_1^2 dx_2$$

$$= \langle x_1\rangle_0 \langle x_2\rangle_1$$

$$\int x_2^2 |\psi|^2 dx_1 dx_2 = \int x_2^2 u_1^2(x_2)\, dx_2 = \langle x_2^2\rangle_1$$

$$\langle (x_1-x_2)^2\rangle = \langle x_1^2\rangle_0 - 2\langle x_1\rangle_0 \langle x_2\rangle_1 + \langle x_2^2\rangle_1$$

Virijalni teorem $2\langle T\rangle = \langle x \frac{dV}{dx}\rangle$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega} - 0 + \frac{3\hbar}{2m\omega} = \frac{2\hbar}{m\omega}$$

jer je $\langle x_1\rangle_0 = 0$ zbog neparnosti funkcije na simetričnom intervalu.

(b) i (c)

bozoni: $\psi(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[u_0(x_1)\, u_1(x_2) + u_0(x_2)\, u_1(x_1)\right]$

fermioni: $\psi(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[u_0(x_1)\, u_1(x_2) - u_0(x_2)\, u_1(x_1)\right]$

$$\int x_1^2 |\psi|^2 dx_1 dx_2 = \frac{1}{2}\int x_1^2 \left[u_0(x_1)\, u_1(x_2) \pm u_0(x_2) u_1(x_1)\right]^2 dx_1 dx_2$$
$$= \frac{1}{2}\int x_1^2 u_0^2 u_1^2\, dx_1 dx_2$$
$$\pm \int x_1^2 u_0(x_1) u_0(x_2) u_1(x_1) u_1(x_2)\, dx_1 dx_2$$
$$+ \frac{1}{2}\int x_1^2 u_0^2 u_1^2\, dx_1 dx_2$$

Drugi integral je nula zbog

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_0(x_2)\, u_1(x_2)\, dx_2 = 0$$

Imamo:

$$\int x_1^2 |\psi|^2 dx_1 dx_2 = \frac{1}{2}\int x_1^2 u_0^2\, dx_1 + \frac{1}{2}\int x_1^2 u_1^2 dx_1$$
$$= \frac{1}{2}\langle x_1^2\rangle_0 + \frac{1}{2}\langle x_1^2\rangle_1$$

$$\int x_1 x_2 |\psi|^2 dx_1 dx_2 = \frac{1}{2}\int x_1 x_2\, u_0^2(x_1)\, u_1^2(x_2)\, dx_1 dx_2$$
$$\pm \int x_1 x_2\, u_0(x_1) u_0(x_2) u_1(x_1) u_1(x_2)\, dx_1 dx_2$$
$$+ \frac{1}{2}\int x_1 x_2\, u_0^2(x_2)\, u_1^2(x_1)\, dx_1 dx_2$$

$$= \frac{1}{2}\langle x_1\rangle_0\langle x_2\rangle_1 \pm \langle x_1\rangle_{01}\langle x_2\rangle_{01} + \frac{1}{2}\langle x_1\rangle_1\langle x_2\rangle_0$$

Integral $\int x_2^2 |\psi|^2 dx_1 dx_2$ jednak je prvom integralu

$$\int x_2^2 |\psi|^2 dx_1 dx_2 = \frac{1}{2}\langle x_2^2\rangle_0 + \frac{1}{2}\langle x_2^2\rangle_1$$

Treba primijetiti da su pri integraciji x_1, x_2 varijable integracije pa ih možemo na kraju označiti s x

$$\langle x_1\rangle_0 = \langle x_2\rangle_0 = \langle x\rangle_0 \,;\quad \langle x_1^2\rangle_0 = \langle x_2^2\rangle_0 = \langle x^2\rangle_0$$

Imamo,

$$\langle (x_1-x_2)^2\rangle = \underbrace{\langle x^2\rangle_0}_{\frac{\hbar}{2m\omega}} + \underbrace{\langle x^2\rangle_1}_{\frac{3\hbar}{2m\omega}} - 2\underbrace{\langle x\rangle_0\langle x\rangle_1}_{0} \mp 2|\langle x\rangle_{01}|^2$$

U odnosu na čestice koje možemo razlikovati, javio se član $\mp 2|\langle x\rangle_{01}|^2$.

$$\langle x\rangle_{01} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, u_0^* u_1\, dx = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

$$\langle (x_1-x_2)^2\rangle = \frac{2\hbar}{m\omega} - 2\frac{\hbar}{2m\omega} = \frac{\hbar}{m\omega} \quad \text{(bozoni)}$$

$$\langle (x_1-x_2)^2\rangle = \frac{2\hbar}{m\omega} + 2\frac{\hbar}{2m\omega} = \frac{3\hbar}{m\omega} \quad \text{(fermioni)}$$

Možemo zapaziti:

1. Dodatni član kod fermiona i bozona sadrži

$$\langle x \rangle_{01} = \int x \, u_0^* \, u_1 \, dx$$

odnosno ovisi o prekrivanju valnih funkcija.

2. Ako se u_0 i u_1 prekrivaju i ako je potencijalna energija između dvije čestice $\propto (x_1 - x_2)^2$, tada vidimo da je ukupna energija kod fermiona nešto povišena, a kod bozona nešto snižena u odnosu na klasične čestice. Integral tipa

$$\int f(x_1, x_2) \, u_0(x_1) \, u_0(x_2) \, u_1(x_1) \, u_1(x_2) \, dx_1 dx_2$$

nazivamo integralom izmjene. Kao da između fermiona postoji repulzija, a između bozona privlačenje (exchange forces!). To je posljedica simetrizacije valne funkcije.

$\boxed{16.3}$

U tablici za Clebsch-Gordanove koeficijente izaberemo podtablicu 1×1. Pogled na stanja ukupnog angularnog momenta upućuje da su neka stanja simetrična, a neka antisimetrična.

Na primjer, stanje

$$|j=2, m=1\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,|m_1=1, m_2=0\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,|m_1=0, m_2=1\rangle$$

je simetrično stanje. Na drugoj strani, stanje

$$|j=1, m=1\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,|m_1=1, m_2=0\rangle - \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,|m_1=0, m_2=1\rangle$$

je antisimetrično. Ispišemo li sva stanja vidimo da su stanja s $j=0$ i $j=2$ simetrična, a ona s $j=1$ antisimetrična.

Za dva identična bozona spina 1, ukupni spin sustava može biti samo jednak 0 ili 2.

$\boxed{16.4}$

(a) Prostorni dio valne funkcije je simetričan pa spinski dio mora biti također simetričan jer se radi o bozonima. Tada je ukupna valna funkcija simetrična.

(i) $|\chi_1^S\rangle = |1\rangle|1\rangle|1\rangle$

(ii) $|\chi_2^S\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|1\rangle|1\rangle|0\rangle + |1\rangle|0\rangle|1\rangle + |0\rangle|1\rangle|1\rangle\right)$

(iii) $|\chi_3^S\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\Big(|1\rangle|0\rangle|-1\rangle + |1\rangle|-1\rangle|0\rangle + |0\rangle|1\rangle|-1\rangle$

$\qquad + |0\rangle|-1\rangle|1\rangle + |-1\rangle|0\rangle|1\rangle + |-1\rangle|1\rangle|0\rangle\Big)$

(b) Za slučajeve (i) i (ii) ne možemo napisati spinske valne funkcije. Za (iii) imamo

$$|\chi_3^A\rangle = \begin{vmatrix} |1\rangle & |0\rangle & |-1\rangle \\ |1\rangle & |0\rangle & |-1\rangle \\ |1\rangle & |0\rangle & |-1\rangle \end{vmatrix}$$

$= |1\rangle|0\rangle|-1\rangle - |1\rangle|-1\rangle|0\rangle - |0\rangle|1\rangle|-1\rangle + |0\rangle|-1\rangle|1\rangle$

$\quad + |-1\rangle|1\rangle|0\rangle - |-1\rangle|0\rangle|1\rangle$

Uzmimo zamjenu čestice 2 i 3

$|1\rangle|-1\rangle|0\rangle - |1\rangle|0\rangle|-1\rangle - |0\rangle|-1\rangle|1\rangle + |0\rangle|1\rangle|-1\rangle$

$\quad + |-1\rangle|0\rangle|1\rangle - |-1\rangle|1\rangle|0\rangle$

$= -\Big(|1\rangle|0\rangle|-1\rangle - |1\rangle|-1\rangle|0\rangle - |0\rangle|1\rangle|-1\rangle + |0\rangle|-1\rangle|1\rangle$

$\quad + |-1\rangle|1\rangle|0\rangle - |-1\rangle|0\rangle|1\rangle\Big) \propto -|\chi_3^A\rangle$ ✓

PODATNO

Želimo odrediti koliki je ukupni spin za neka od navedenih simetričnih i antisimetričnih stanja.

Najprije ćemo zbrojiti spin za 2 čestice, a zatim dobiveno zbrojiti s trećom česticom.

Za dvije čestice spina 1, ukupni spin je

$$s_{12} = |s_1 - s_2|, \dots, s_1 + s_2$$
$$= 0, 1, 2$$

Ako to zbrojimo s trećom česticom

$$s_{12} = 0 \,; \quad s = |s_3 - s_{12}|, \dots, s_3 + s_{12}$$
$$= 1$$

$$s_{12} = 1 \,; \quad s = 0, 1, 2$$

$$s_{12} = 2 \,; \quad s = 1, 2, 3$$

Stanje $|\chi_1\rangle$ iz (i) očito odgovara $s = 3$. Naime, zbrojimo li najprije dvije čestice

$$|s_{12} = 2, m_{12} = 2\rangle = |1\rangle|1\rangle$$

Zbrojimo li $s_{12} = 2$ i $s_3 = 1$, u tablici 2×1 s C-G koeficijentima

$$|m_{12} = 2, m_3 = 1\rangle = |s = 3, m = 3\rangle$$

je stanje ukupnog spina $s = 3$.

stanje $|\chi_2\rangle$ mora biti oblika

$$c_1 |m_{12} = ?\rangle |m_3 = 1\rangle + c_2 |m_{12} = ?\rangle |m_3 = 0\rangle$$

Treba pogoditi koja stanja $|m_{12} = ?\rangle$ daju konačno $|\chi_2\rangle$.

Nije teško vidjeti da se u drugom članu (uz c_2) treba pisati

$$|s_{12}=2, m_{12}=2\rangle = |m_1=1, m_2=1\rangle$$

U prvom članu (uz c_1), stanje koje odgovara onom što trebamo dobiti za $|\chi_2\rangle$ je

$$|s_{12}=2, m_{12}=1\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,|m_1=1, m_2=0\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,|m_1=0, m_2=1\rangle$$

U tablici 2×1 (zbog $s_{12}=2$ i $s_3=1$) stanje ukupnog spina je

$$|s=3, m=2\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|m_{12}=2, m_3=0\rangle + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|m_{12}=1, m_3=1\rangle$$

Odaberemo li $c_1=1$ i $c_2=1$, uz navedene jednakosti imamo

$$\begin{aligned}|\chi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|1\rangle|1\rangle|0\rangle + |1\rangle|0\rangle|1\rangle + |0\rangle|1\rangle|1\rangle\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|s_{12}=2, m_{12}=2\rangle|0\rangle + \sqrt{2}\,|s_{12}=2, m_{12}=1\rangle|1\rangle\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\,|m_{12}=2, m_3=0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\,|m_{12}=1, m_3=1\rangle\\ &= |s=3, m=2\rangle\end{aligned}$$

Slično bismo računali i za stanje pod (iii) i pod (b). Stanje $|\chi_3\rangle$ nije svojstveno stanje za ukupni spin, dok stanje pod (b) ima ukupni spin jednak 0.

16.5

(a) Hamiltonijan sustava

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i=1}^{N} \frac{m\omega^2 x_i^2}{2}$$

Energija za jedan HO

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

Stanje kojim opisujemo fermion $s = \frac{1}{2}$

$$|n, s_z\rangle$$

gdje je s_z projekcija spina na z-os.

Fermioni ne smiju biti u dva ista kvantna stanja prema Paulijevom principu isključenja. Istu energiju mogu imati samo 2 čestice, jedna u stanju $|\uparrow\rangle$, a druga u stanju $|\downarrow\rangle$.

Neka je broj čestica <u>N paran</u>, $N \geq 2$. Energija osnovnog stanja sustava ($T=0$)

$$E_g = 2\hbar\omega \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(k + \frac{1}{2}\right) = 2\hbar\omega \left[\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} 1\right]$$

$$= 2\hbar\omega \cdot \left[\frac{1}{2}\left(\frac{N}{2}-1\right)\frac{N}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{N}{2}\right]$$

$$= \hbar\omega\left(\frac{N}{2}\right)^2$$

Fermijeva energija je najveća energija koju fermion može imati u sustavu

$$E_F = \hbar\omega\left[\left(\frac{N}{2}-1\right) + \frac{1}{2}\right] = \frac{\hbar\omega}{2}(N-1)$$

Neka je broj čestica neparan, $N \geq 1$. Energija osnovnog stanja sustava

$$\frac{N-1}{2}-1 = \frac{N-3}{2}$$

$$E_g = 2\hbar\omega \sum_{k=0}^{\frac{N-3}{2}} \left(k+\frac{1}{2}\right) + \hbar\omega\left[\left(\frac{N-3}{2}+1\right)+\frac{1}{2}\right]$$

$$= 2\hbar\omega\left(\sum_{k=0}^{\frac{N-3}{2}} k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\frac{N-3}{2}} 1\right) + \hbar\omega\frac{N}{2}$$

$$= 2\hbar\omega\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{N-3}{2}\cdot\frac{N-1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{N-1}{2}\right) + \frac{\hbar\omega}{2}N$$

$$= \hbar\omega\cdot\left[\frac{N-1}{2}\cdot\left(\frac{N-3}{2}+1\right)+\frac{1}{2}N\right]$$

$$= \hbar\omega\left[\frac{(N-1)^2}{4}+\frac{1}{2}N\right]$$

$$E_F = \hbar\omega\left[\left(\frac{N-3}{2}+1\right)+\frac{1}{2}\right] = \hbar\omega\frac{N}{2}$$

(b) $N \gg 1$

N paran; $E_g = \hbar\omega\frac{N^2}{4}$

N neparan; $E_g \approx \hbar\omega\frac{N^2}{4}$

$$E_F = \frac{\hbar\omega}{2}N$$

16.6

(a) Pobuđena stanja helija: jedan je elektron u osnovnom stanju, a drugi u pobuđenom.

Za ortohelij, elektroni su u tripletnom stanju čiji je ukupni spin $S=1$. Za parahelij, elektroni su u singletnom stanju sa $S=0$.

Ortohelij ima nižu energiju prema Hundovom pravilu, što je zaista točno.

(b) Ugljik ima 6 elektrona i konfiguracija je

$$1s^2 \; 2s^2 2p^2$$

Promatramo samo zadnju, nepopunjenu podljusku ($2p^2$). Prema 1. Hundovom pravilu, dva elektrona imaju $S=1$ pa se radi o tripletnom, simetričnom stanju. Prostorni dio valne funkcije mora biti antisimetričan. Oba elektrona imaju $\ell=1$ pa u tablici 1×1 vidimo da su stanja $L=2$ (ukupni angularni moment) simetrična. Ostaju stanja s $L=1$ jer su ona $L=0$ također antisimetrična.

(c) Bor ima 5 elektrona i konfiguraciju

$$1s^2 \; 2s^2 2p^1$$

Zadnja podljuska ($2p$) popunjena je manje od polovine pa imamo

$$S = \frac{1}{2}$$

$$L = 1$$

$$J = |L-S| = \frac{1}{2}$$

Spektroskopska oznaka

$$^{2S+1}L_J$$

gdje je S ukupni spin, J ukupni angularni moment, a L oznaka za podljusku: S, P, D, F (sharp, principal, diffuse, fundamental) i odgovara $L = 0, 1, 2, 3$.

Za bor je $L = 1$ pa imamo

$$^2P_{1/2}$$

(d) Ugljik ima 6 elektrona i konfiguraciji

$$1s^2 \; 2s^2 2p^2$$

Pod (b) smo izračunali da je $L=1$ i $S=1$. Tada je

$$J = |L-S| = 0$$

Spektroskopska oznaka

$$^3P_0$$

Dušik ima 7 elektrona i konfiguraciji

$$1s^2 \; 2s^2 2p^3$$

Prema 1. Hundovom pravilu $S = \frac{3}{2}$. To je stanje simetrično, na primjer, $|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\rangle|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\rangle|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\rangle = |\frac{3}{2}\,\frac{3}{2}\rangle$. Dakle, stanje orbitalnog angularnog momenta mora biti antisimetrično. Budući su elektroni u istim spinskim stanjima, očito moraju biti u različitim orbitalama (Pauli!) pa je jedan elektron u stanju $|s_z = \frac{1}{2}, m_\ell = -1\rangle$ drugi u $|s_z = \frac{1}{2}, m_\ell = 0\rangle$, a treći $|s_z = \frac{1}{2}, m_\ell = 1\rangle$. Iz zadatka 7.4(b), antisimetrična kombinacija postoji i ima $L = 0$. Dakle,

$$J = |L-S| = \frac{3}{2} \;; \quad ^4S_{3/2}$$