KVANTNA MEHANIKA

Zadaci za vježbe 2. 6. 2025.

20 WKB aproksimacija

20.1 Upotrijebite WKB aproksimaciju i nađite približne energije za problem s potencijalom

$$V(x) = \begin{cases} mgx, \ x > 0 \\ \infty, \ x < 0 \end{cases}$$

Usporedite točne i približne vrijednosti u tablici. Što se iz tablice može zaključiti?

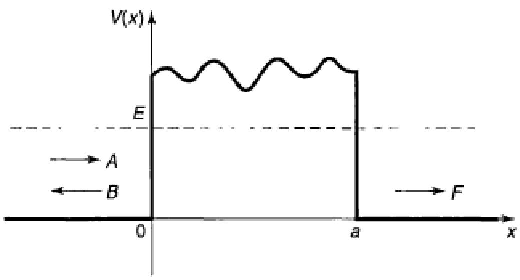
The Quantized Energies of a Bouncing Ball in Units of $(mg^2\hbar^2/2)^{1/3}$

n	WKB	Exact
1	2.320	2.338
2	4.082	4.088
3	5.517	5.521
4	6.784	6.787
5	7.942	7.944
6	9.021	9.023
7	10.039	10.040
8	11.008	11.009
9	11.935	11.936
10	12.828	12.829

20.2 Razmotrite tunel-efekt u problemu 1D potencijalne barijere prikazane na slici. Pokažite da je koeficijent transmisije u WKB aproksimaciji za široku i/ili visoku barijeru

$$T \propto e^{-2\gamma}$$

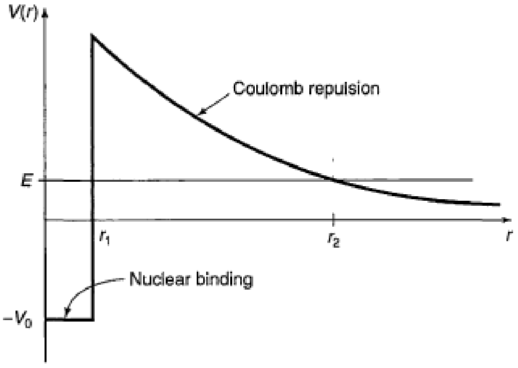
$$\gamma \equiv \frac{1}{\hbar}\int_0^a |p(x)|\,dx$$



20.3 George Gamow je 1928. godine uspješno primijenio formule iz zadatka 20.2 na proces alfa-raspada koji se događa kod radioaktivnih elemenata. Alfa-čestica (dva protona i dva neutrona) je pozitivno nabijena i s ostatkom jezgre međudjeluje repulzivno ako je dovoljno daleko od jezgre kao šte je prikazano na slici. Pokažite da je vrijeme života početne jezgre radioaktivnog elementa u WKB aproksimaciji

$$\tau \simeq \frac{2r_1}{v}e^{2\gamma}$$

gdje je v prosječna brzina alfa-čestice unutar jezgre.



20.4 Za sferno simetrični potencijal WKB aproksimaciju možemo primijeniti na radijalnu Schrödingerovu jednadžbu. U slučaju $l = 0$ možemo primijeniti WKB jednadžbu za energije u obliku

$$\int_0^{r_0} p(r)dr = \left(n - \frac{1}{4}\right)\pi\hbar$$

gdje je r_0 točka obrata, a za točku $r = 0$ uzima se kao da se radi o beskonačno visokoj potencijalnoj barijeri. Primijenite ovu jednadžbu za dobivanje energija u problemu s potencijalom

$$V(r) = V_0 \ln(r/a)$$

gdje su V_0 i a konstante.

20.5 Odredite valne funkcije i energije za problem harmonijskog oscilatora u WKB aproksimaciji. Usporedite valnu funkciju i energiju osnovnog stanja s točnim vrijednostima.

20.6 Alternativan izvod za WKB valnu funkciju temelji se na razvoju u red po potencijama po $\hbar$. Zapišimo valnu funkciju u obliku

$$\psi(x) = \exp(if(x)/\hbar)$$

gdje je $f(x)$ kompleksna funkcija.

(a) Uvrstite ovo rješenje u Schrödingerovu jednadžbu i pokažite da je

$$i\hbar f'' - (f')^2 + p^2 = 0$$

(b) Napišite $f(x)$ u obliku reda potencija po $\hbar$

$$f(x) = f_0(x) + \hbar f_1(x) + \hbar^2 f_2(x) + \ldots$$

i, grupirajući članove po potencijama za $\hbar$, pokažite da je

$$(f_0')^2 = p^2$$

$$if_0'' = 2 f_0' f_1'$$

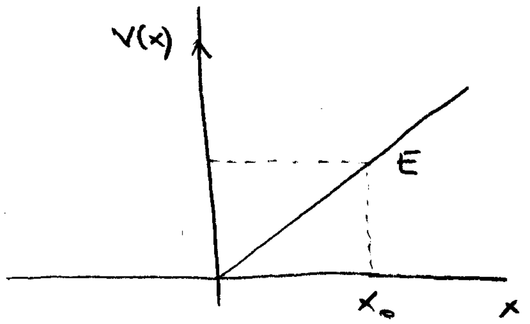
$$if_1'' = 2 f_0' f_2' + (f_1')^2$$

$$\vdots$$

(c) Riješite jednadžbe za f_0 i f_1 i pokažite da, do prvog reda po $\hbar$, dobivate WKB valnu funkciju

$$\psi_{WKB}(x) = \frac{C}{\sqrt{p(x)}} \exp\left[\pm \frac{i}{\hbar} \int p(x)dx\right]$$

20.1



$$V(x) = \begin{cases} mgx, & x>0 \\ \infty, & x<0 \end{cases}$$

Uvjet: $\int_0^{x_0} p(x)\,dx = (n-\frac{1}{4})\pi\hbar$

Ovaj se problem naziva "bouncing ball" problem.

Točka obrata:

$$x_0 = \frac{E}{mg}$$

$$\int_0^{x_0} dx\sqrt{2m(E-mgx)} = -\frac{2\sqrt{2}}{3g\sqrt{m}}\cdot(E-mgx)^{3/2}\Big/_0^{x_0}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3g\sqrt{m}}\cdot E^{3/2}$$

Uvrstimo u uvjet

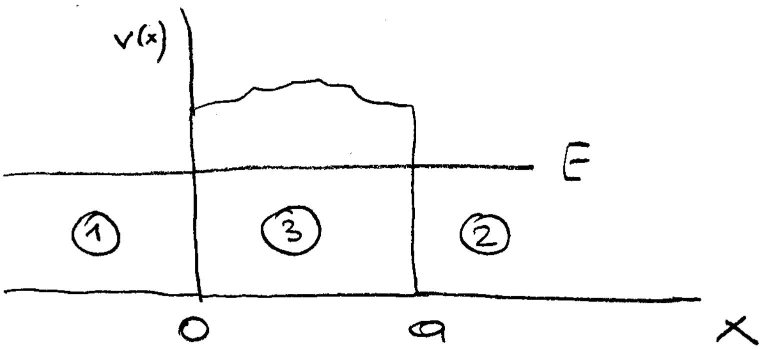
$$\frac{2\sqrt{2}}{3g\sqrt{m}}E_n^{3/2} = \left(n-\frac{1}{4}\right)\pi\hbar$$

$$E_n = \left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^{2/3}\cdot\left(g\sqrt{m}\,\hbar\right)^{2/3}\cdot\left[\left(n-\frac{1}{4}\right)\pi\right]^{2/3}$$

$$= \frac{1}{2}\left(9g^2\hbar m\right)^{1/3}\left[\left(n-\frac{1}{4}\right)\pi\right]^{2/3}$$

Tablica pokazuje da za veći n dobivamo izvrsno slaganje s točnim vrijednostima.

20.2



Rješavamo Schrödingerovu jednadžbu u područjima 1, 2 i 3. OPREZ: radi se stanjima raspršenja.

Rješenje za područje ①:

$$\psi_1 = A e^{ikx} + B e^{-ikx} , \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

Rješenje za područje ②:

$$\psi_3 = F e^{ikx}$$

U području ③ primijenit ćemo WKB aproksimaciju. Budući je $E < V$, imamo za $0 \le x \le a$

$$\psi_2(x) = \frac{C}{\sqrt{|p(x)|}} \exp\left[\frac{1}{\hbar}\int_0^x |p(x')|\,dx'\right] + \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} \exp\left[-\frac{1}{\hbar}\int_0^x |p(x')|\,dx'\right]$$

Koeficijent transmisije je

$$T = \frac{|F|^2}{|A|^2}$$

Koeficijente B, C, D, F treba odrediti pomoću rubnih uvjeta, neprekidnost valne funkcije i derivacije na rubovima $x = 0$ i $x = a$. U ovom slučaju nema točaka obrata u kojima je $E = V(x)$.

Postavit ćemo: $A=1$; $T=|F|^2$

1. $\psi_1(0)=\psi_2(0)$

2. $\psi_1'(0)=\psi_2'(0)$

3. $\psi_2(a)=\psi_3(a)$

4. $\psi_2'(a)=\psi_3'(a)$

Imamo jednadžbe (zanemariti derivacije za $P^{-1/2}$ ⟹ napomena)

1. $$\overset{=1}{A}+B=\frac{C}{\sqrt{p(0)}}+\frac{D}{\sqrt{p(0)}}$$

$$p(0)=\sqrt{2m(V(0)-E)}$$
$$p(a)=\sqrt{2m(V(a)-E)}$$

2. $$ik\overset{=1}{A}-ikB=\frac{1}{\hbar}\sqrt{p(0)}\,(C-D)$$

3. $$Fe^{ika}=\frac{C}{\sqrt{p(a)}}\exp[\gamma]+\frac{D}{\sqrt{p(a)}}\exp[-\gamma]$$

4. $$ikFe^{ika}=\frac{1}{\hbar}\sqrt{p(a)}\left(C\exp[\gamma]-D\exp[-\gamma]\right)$$

gdje je

$$\gamma=\frac{1}{\hbar}\int_0^a p(x')\,dx'$$

Iz ovih jednadžbi slijedi [Mathematica]

$$F=-\frac{4\hbar\sqrt{p(0)p(a)}\,k\,e^{-ika}\cdot e^{\gamma}}{(e^{2\gamma}-1)(ik^2\hbar^2-i\,p(0)p(a))-(e^{2\gamma}+1)\left[k\hbar(p(a)+p(0))\right]}$$

$\gamma \gg 1$ visoka ili široka barijera; nazivnik

$$(e^{2\gamma} \mp 1) \approx e^{2\gamma}$$

$$F \propto e^{-\gamma}$$

$$|F|^2 \propto e^{-2\gamma} \quad \text{pokazati}$$

NAPOMENA: WKB uvjet glasi

$$\frac{\hbar}{\sqrt{2m(E-V(x))}} \ll \frac{2m(E-V(x))}{m \cdot dV/dx}$$

ili

$$\boxed{\frac{m\hbar \frac{dV}{dx}}{p^3} \ll 1}$$

Računamo derivacije za $p^{-1/2}$

$$(p^{-1/2})' = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot p^{-3/2} \cdot p'$$

$$p' = \left(\sqrt{2m(E-V(x))}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{(-2m) \cdot \frac{dV}{dx}}{\sqrt{2m(E-V(x))}} = -\frac{m \frac{dV}{dx}}{p}$$

Imamo:

$$(p^{-1/2})' = \frac{1}{2} \cdot p^{-3/2} \cdot \frac{m\frac{dV}{dx}}{p} \cdot \frac{p^{1/2}}{p^{1/2}} = \underbrace{\frac{m\hbar\frac{dV}{dx}}{p^3}}_{\ll 1} \cdot \frac{p^{1/2}}{2\hbar}$$

Zbog WKB uvjeta je

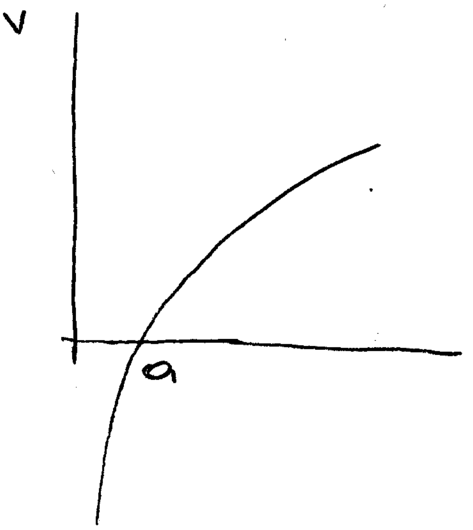
$$(p^{-1/2})' \ll \frac{p^{1/2}}{\hbar}$$

No, $p^{1/2}/\hbar$ je red veličine članova koje dobijemo deriviranjem $\exp\left(\frac{1}{\hbar}\int_0^x p(x')\,dx'\right)$ i te članove ćemo zadržati.

$\boxed{20.4}$

$V = V_0 \ln(r/a)$

$$p^2(r) = 2m\left[E - V(r) - \frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{l(l+1)}{r^2}\right]$$



$$\boxed{l = 0}$$

$$\int_0^{r_0}\sqrt{2m\left[E - V_0\ln(r/a)\right]}\,dr = \left(n-\frac{1}{4}\right)\pi\hbar$$

Točka obrata definirana je jednadžbom

$$E = V_0 \cdot \ln(r_0/a)$$

Računamo integral

$$\sqrt{2m}\int_0^{r_0}\sqrt{V_0\ln(r_0/a) - V_0\ln(r/a)}\,dr = \sqrt{2mV_0}\int_0^{r_0}\sqrt{\ln(r_0/r)}\,dr$$

Promjena varijabli: $u \equiv \ln\left(\frac{r_0}{r}\right)$; $r = r_0 e^{-u}$; $dr = -r_0 e^{-u}\,du$

Granice: za r_0; $u = 0$

za 0; $u \to \infty$

$$\sqrt{2mV_0}\, r_0 \underbrace{\int_0^{\infty}\sqrt{u}\, e^{-u}\,du}_{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \sqrt{2mV_0}\, r_0 \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Dobijemo:

$$\sqrt{2mV_0\pi}\cdot\frac{r_0}{2} = \left(n-\frac{1}{4}\right)\pi\hbar$$

No,

$$r_0 = a e^{E/V_0}$$

pa je

$$E_n = V_0 \ln\left[\frac{\hbar}{a}\sqrt{\frac{2\pi}{mV_0}}\left(n-\frac{1}{4}\right)\right]$$

Razlika energija

$$E_{n+1} - E_n = V_0 \ln\left(\frac{n+\frac{3}{4}}{n-\frac{1}{4}}\right)$$

ne ovisi o masi čestice.

$\boxed{20.6}$

(a) $\psi(x) = \exp(i f(x)/\hbar)$

$f(x)$ općenito kompleksna funkcija

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{i}{\hbar} \exp(i f/\hbar) f'$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{i}{\hbar} \left[\exp(i f/\hbar) \cdot \frac{i}{\hbar} f'^2 + \exp(i f/\hbar) f'' \right]$$

$$p^2 \psi = -\hbar^2 \frac{d^2\psi}{dx^2} \quad ; \quad p^2 = 2m\left[E - V(x)\right]$$

$$p^2 \exp(i f/\hbar) = -\hbar^2 \frac{i}{\hbar} \left[\frac{i}{\hbar} f'^2 + f'' \right] \exp(i f/\hbar)$$

$$p^2 - f'^2 + i\hbar f'' = 0 \qquad (*)$$

(b) $f = f_0 + \hbar f_1 + \hbar^2 f_2 + \dots$

$$f' = f_0' + \hbar f_1' + \hbar^2 f_2'' + \dots$$

$$f'' = f_0'' + \hbar f_1'' + \hbar^2 f_2'' + \dots$$

$$(f')^2 = (f_0' + \hbar f_1' + \hbar^2 f_2' + \dots)(f_0' + \hbar f_1' + \hbar^2 f_2' + \dots)$$

$$= (f_0')^2 + \hbar(\underbrace{f_0' f_1' + f_0' f_1'}_{2 f_0' f_1'}) + \hbar^2 (f_0' f_2' + f_1'^2 + f_0' f_2') + \dots$$

Uvrstimo u $(*)$ i usporedimo članove uz jednake potencije od $\hbar$

$$p^2 = f_0'^2$$

$$i f_0'' = 2 f_0' f_1'$$

$$i f_1'' = 2 f_0' f_2' + f_1'^2$$

$$\vdots$$

(c)

$$f_0' = \pm p$$

$$\Rightarrow f_0 = \pm \int p(x)\,dx + C_1$$

$$f_1' = \frac{i}{2}\frac{f_0''}{f_0'} = \frac{i}{2}\frac{\pm p'}{\pm p} = \frac{i}{2}\frac{d}{dx}\ln p$$

$$\Rightarrow f_1 = \frac{i}{2}\ln p + C_2$$

Uvrstimo u početnu funkciju s tim da je

$$f \simeq f_0 + \hbar f_1$$

$$\psi(x) = \exp\left[\pm\frac{i}{\hbar}\int p(x)\,dx - \frac{1}{2}\underbrace{\ln p}_{p^{-1/2}} + C_3\right]$$

$$= \frac{C}{\sqrt{p}}\exp\left(\pm\frac{i}{\hbar}\int p\,dx\right)$$